



凝聚函数法求解斜拉桥成桥后误差调整问题研究

杜蓬娟^{*1,2}, 张哲¹, 孙建刚², 谭素杰²

(1. 大连理工大学 桥梁研究所, 辽宁 大连 116024;

2. 大连民族学院 土木建筑工程学院, 辽宁 大连 116600)

摘要: 针对斜拉桥成桥后的误差调整问题, 建立多目标、多约束的优化模型; 利用一种带参数的综合凝聚函数法, 将多个目标和多个约束分别凝聚为一个替代目标 $A(x)$ 和 $B(x)$, 使各个目标和各个约束在 $A(x)$ 和 $B(x)$ 中具有不同的权重. 通过凝聚函数法, 将多目标、多约束的非线性规划问题转化为光滑、可微的单目标、单约束优化问题. 数值算例表明该方法可以应用于大规模的非线性规划问题中.

关键词: 斜拉桥; 凝聚函数; 误差调整; 非线性规划

中图分类号: U448.27 **文献标志码:** A

0 引言

在斜拉桥设计中, 首先利用刚性支承连续梁法、弯曲能量最小法、影响矩阵法, 或者优化方法确定合理成桥状态索力和成桥线形, 然后根据施工方法建立施工控制模型, 利用倒拆方法或者优化方法计算施工阶段各项参数, 最后根据施工控制参数进行桥梁施工, 使成桥后结构内力和线形达到合理成桥状态^[1~5]. 从斜拉桥的设计和施工过程中可以看出, 斜拉桥的最大特点是可以通过调整索力改变结构的受力. 在斜拉桥的施工中, 由于各种因素的影响(包括温度、混凝土收缩徐变、材料容重、计算模型等), 成桥后的结构总会和理想状态存在偏差, 对这些偏差通过索力进行调整是斜拉桥施工中必须面对的一个问题.

目前常用的误差调整方法是借助有限元计算程序, 首先假定一组斜拉索的张拉序列及张拉值, 计算结构内力和线形改变量, 与误差进行对比, 如果该组张拉序列和张拉值能够将误差调整到允许范围, 该组序列则为该问题的解, 如果不符合要求, 不断地重复以上过程, 总能找到一组相对合理的索力张拉序列和张拉值, 使结构内力和线形都控

制在误差允许范围之内, 这种方法虽然简单易行, 但过于依赖经验, 没有明确的数学模型. 误差调整中有的通过建立该问题的矛盾方程组, 解该方程广义最小二乘解. 本文针对斜拉桥成桥后的误差调整问题, 利用一种带参数的综合凝聚函数法^[6~8], 将多目标、多约束的非线性规划问题转化为光滑、可微的单目标、单约束优化问题, 采用变尺度法中的 BFGS 法进行求解.

1 斜拉桥成桥后误差调整的优化模型

为了符合工程实际, 在有限元模型的建立中, 以斜拉索的伸长量作为调整量, 索力误差和桥面标高误差作为控制目标, 以索力调整量作为约束条件. 设全桥共有斜拉索 n 根, ΔT_i 为第 i 根索张力设计值 T'_i 与实测值 T_i 的误差, ΔZ_j 为成桥后第 j 个控制点标高设计值 Z'_j 与实测值 Z_j 的差值, 利用影响矩阵, 建立成桥后误差调整的优化模型.

索力残差

$$p_i = \left| \Delta T_i - \sum_{k=1}^n x_{ik} \Delta l_k \right|; i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

其中 x_{ik} 为第 k 根索调整单位长度时引起第 i 根索张力的变化值.

位移残差

$$q_j = \left| \Delta Z_j - \sum_{k=1}^n y_{jk} \Delta l_k \right|; j = 1, 2, \cdots, m \quad (2)$$

其中 y_{jk} 为第 k 根索调整单位长度时引起第 j 个控制点的位移变化值。

索长调整量的上下限

$$\Delta l_{lj} \leq \Delta l_j \leq \Delta l_{uj}; j = 1, 2, \cdots, n \quad (3)$$

通过以上分析，则斜拉桥成桥后的误差调整问题就可以通过下面的多目标问题来描述：

使目标 $(p_1, p_2, \cdots, p_n, q_1, q_2, \cdots, q_m)$ 在式(3)的约束条件下越小越好，即

$$\begin{aligned} \min f_i(\Delta l); i = 1, 2, \cdots, n + m \\ \text{s. t. } \Delta l_{lj} \leq \Delta l_j \leq \Delta l_{uj}; j = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $f_i = \{p_1, p_2, \cdots, p_n, q_1, q_2, \cdots, q_m\}$ 。

通过数学变换，可以将问题(4)转化为下式：

$$\begin{aligned} \min \max f_i(\Delta l); i = 1, 2, \cdots, n + m \\ \text{s. t. } \Delta l_{lj} \leq \Delta l_j \leq \Delta l_{uj}; j = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \quad (5)$$

对于式(5)的多目标、多约束优化问题，一般采用传统的降维法、分层序列法、功效系数法或评价函数法，这些多目标规划算法都是将多目标转化为单目标规划后，仍在原有约束条件下进行计算，这在非线性程度较高、约束条件较多时，解题规模并没有得到减小，采用带参数的综合凝聚函数法则可以较好地解决这个问题。

2 凝聚函数法及其在误差调整中的应用

2.1 凝聚函数法

根据“min-max”法，多目标规划均可写成

$$\begin{aligned} \min \max f_i(x); i = 1, 2, \cdots, n \\ \text{s. t. } g_j(x) \leq 0; j = 1, 2, \cdots, m \end{aligned} \quad (6)$$

对于以上问题，即使目标函数和约束函数为线性函数，运用传统规划方法求解，也存在规模大、收敛慢的缺点，文献[7]利用 Jayne 的最大熵原理与确定概率分配问题，通过引进信息熵函数，

导出可微函数 $A(x) = \frac{1}{p_1} \ln \sum_{i=1}^n \exp [p_1 f_i(x)]$,

$B(x) = \frac{1}{p_2} \ln \sum_{j=1}^m \exp [p_2 g_j(x)]$ 。通过两个凝聚函数 $A(x)$ 、 $B(x)$ ，将目标凝聚为一个“替代”目标，将约束凝聚为一个“替代”约束，可以证明 $\max f_i(x) \leq A(x) \leq \max f_i(x) + \ln n/p_1$ ， $\max g_j(x) \leq B(x) \leq \max g_j(x) + \ln m/p_2$ ，当 p_1 、 p_2 趋于无穷大时，问题(6)等价于问题(7)。

$$\begin{aligned} \min A(x) = \frac{1}{p_1} \ln \sum_{i=1}^n \exp [p_1 f_i(x)] \\ \text{s. t. } B(x) = \frac{1}{p_2} \ln \sum_{j=1}^m \exp [p_2 g_j(x)] \leq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

通过对目标函数和约束条件同时凝聚，将问题(6)转化为求解问题(7)。当原问题至少有一个“紧”约束时，问题(7)中的不等式约束可以进一步写成等式约束，利用乘子惩罚函数，最后将问题转化为无约束的优化问题(8)：

$$\min F(x, \alpha, c) = A(x) + \alpha B(x) + cB^2(x)/2 \quad (8)$$

其中 α 为约束(7)的拉格朗日乘子， c 为惩罚因子。

对于式(8)，可采用变尺度法又称 DPF 法，该算法属于拟牛顿法的一种。由于它避免了计算二阶倒数矩阵及其逆矩阵，又比梯度法的收敛速度快，特别是对高维问题具有显著的优越性，计算公式如下：

$$\begin{cases} S(x^k) = -H(x^k) \nabla f(x^k) \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} S^{(k)} \\ \alpha^{(k)} = \min_{\alpha} f(x^{(k)} + \alpha S^{(k)}) \end{cases} \quad (9)$$

由于篇幅所限，具体计算过程可以参考相关资料^[9,10]。

2.2 数值算例及讨论

例子取文献[11]中的对称斜拉桥，桥梁尺寸及单元编号见图 1，计算模型参数见表 1。

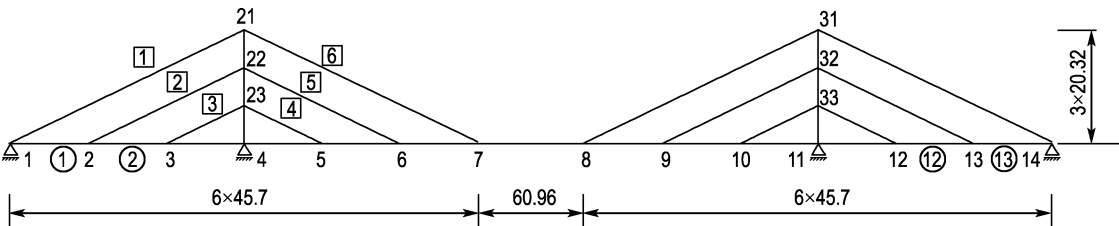


图 1 对称扇形斜拉桥

Fig. 1 Symmetric harp cable-stayed bridge

表 1 计算模型参数

Tab.1 The parameters of calculation model

构件		A/m^2	I/m^4	E/MPa	$W/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-1})$
梁		0.320	1.310	2.07×10^5	87.480
塔柱	上	0.203	0.210	2.07×10^5	—
	中	0.228	0.350	2.07×10^5	—
	下	0.269	0.430	2.07×10^5	—
斜拉索	边索	0.042	—	2.07×10^5	3.220
	内索	0.016	—	2.07×10^5	1.240

首先利用有限元程序对模型做结构分析计算,计算出斜拉索张力和桥面位移的影响矩阵.为了简单明了,在计算中将桥梁左侧拉索(1~6号)作为调整量,选取 7、8 两个节点的竖向位移作为控制量,形成两个影响矩阵(10)和(11).有了影响矩阵,就可以将准备好的数据作为输入部分,利用编制的优化程序进行计算.

为了验证程序的正确性,假定原来没有误差,现在人为地调整索的长度,把引起的误差作为设计值和测量值之间的误差,输入到程序中去.如果程序正确,则计算出来的最优调整量应与最初的人为调整量大小相等,符号相反.

$$X=\begin{pmatrix} 1\,366.81 & -643.82 & -73.05 & -271.60 & -254.22 & 1\,098.99 \\ -652.06 & 1\,770.72 & -974.40 & 56.96 & 435.50 & -149.38 \\ -87.90 & -977.67 & 3\,729.24 & 824.92 & 72.08 & -214.28 \\ -252.93 & 61.09 & 824.80 & 3\,743.22 & -963.99 & -156.28 \\ -235.03 & 439.60 & 72.39 & -964.27 & 1\,771.58 & -764.82 \\ 1\,139.72 & -135.19 & -202.13 & -164.84 & -767.23 & 1\,498.98 \end{pmatrix}$$

(10)

$$Y=\begin{pmatrix} 1.274\,80 & 0.099\,30 & 0.086\,10 & 0.158\,90 & 0.430\,43 & 1.274\,79 \\ 0.637\,40 & 0.033\,11 & -0.006\,60 & -0.013\,25 & 0.066\,22 & 0.695\,34 \end{pmatrix}$$

(11)

下面分 4 种情况进行讨论:

表 2 索力误差和位移误差

Tab.2 Error of cable force and displacement

No.	$\Delta F/t$						$\Delta v/m$	
	ΔF_1	ΔF_2	ΔF_3	ΔF_4	ΔF_5	ΔF_6	Δv_1	Δv_2
1	27.336	-13.041	-1.758	-5.059	-4.701	22.794	0.026 0	0.013 0
2	14.459	22.373	-21.311	-3.836	4.091	20.091	0.027 0	0.013 0
3	39.803	30.957	-25.577	-37.445	34.294	42.043	0.078 6	0.036 3
4	25.680	1.421	76.162	55.834	14.411	24.659	0.069 8	0.029 2

表 3 最优调整量

Tab.3 The best adjustment

No.	l_1/m	l_2/m	l_3/m	l_4/m	l_5/m	l_6/m
1	0.019 7	-0.000 2	-0.000 1	0.000 1	0.000 4	0.000 4
2	0.019 6	0.019 8	-0.000 1	0.000 1	0.000 5	0.000 5
3	0.019 0	0.019 4	-0.000 2	0.000 2	0.030 8	0.031 1
4	0.009 5	0.009 7	0.019 9	0.020 1	0.030 4	0.030 6

(1)第 1 根索放松 2 cm,即

$$l=(-0.02\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$$

(2)第 1 根索放松 2 cm,第 2 根索放松 2 cm,即

$$l=(-0.02\ -0.02\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$$

(3)第 1 根索放松 2 cm,第 2 根索放松 2 cm,第 4 根索放松 3 cm,第 5 根索放松 3 cm,即

$$l=(-0.02\ -0.02\ 0\ -0.03\ -0.03\ 0)^T$$

(4)第 1 根索放松 1 cm,第 2 根索放松 1 cm,第 3、4 根索放松 2 cm,第 5、6 根索放松 3 cm,即

$$l=(-0.01\ -0.01\ -0.02\ -0.02\ -0.03\ -0.03)^T$$

根据影响矩阵 X 、 Y ,很容易求出 4 组情况的索力误差和位移误差,见表 2. 根据计算出的 4 组误差,分 4 组情况利用所编程序进行求解,计算结果见表 3、4. 表 2、4 中的 ΔF 为斜拉索索力误差, Δv 为控制点位移误差.

在计算中,给定的约束条件为斜拉索的误差控制在设计值的 5%以内,目标是索力误差和位移误差. 调整量的初始值为(0 0 0 0 0 0).

从计算结果表 3、4 可以看出,对于 4 组情况,求出的最优调整量基本上与表 2 中的人为调整量相符,且方向相反,这就验证了程序和算法的正确性. 产生误差的原因与程序本身的精度要求有关.

算例给出的误差是人为的,它们之间是互相协调的,因此得到了比较准确的结果. 在实际中,现场测量到的索力误差和位移误差是由各种因素引起的,有的误差是不能通过索力调整来解决的,即误差之间是互不协调的,因此很难把索力误差和位移误差都调整到很小,一般认为,只要索力和位移误差都小于一固定值就可以了,比如索力误差可控制在 5%之内,位移误差控制在 ± 3 cm 之内.

表 4 调整后的索力误差和位移误差

Tab. 4 Error of cable force and displacement after adjustment

No.	$\Delta F/t$						$\Delta v/10^{-4}m$	
	ΔF_1	ΔF_2	ΔF_3	ΔF_4	ΔF_5	ΔF_6	Δv_1	Δv_2
1	-0.037 0	-0.037 0	-0.037 0	0.037 0	0.037 0	0.037 0	1.905 8	3.712 4
2	-0.032 2	-0.032 2	-0.032 2	0.032 2	0.032 2	0.032 2	-3.218 0	1.626 0
3	2.456×10^{-4}	-8.962×10^{-7}	5.977×10^{-6}	-6.294×10^{-6}	-7.129×10^{-5}	-1.562×10^{-4}	-5.414 8	2.815 9
4	-3.919×10^{-4}	-3.696×10^{-4}	-8.485×10^{-6}	1.547×10^{-5}	3.655×10^{-5}	5.612×10^{-4}	-2.474 0	1.204 0

3 结 论

(1)斜拉桥成桥后的误差调整问题是确定一组张拉变量序列,使主梁线形误差、内力误差或者索力误差都控制在允许范围之内,并且索的调整个数尽可能的少.该问题是一个多目标、多约束的优化问题.本文通过引入综合凝聚函数,将多个目标和多个约束同时进行凝聚,使多目标、多约束问题转化为单目标、单约束问题,利用拉格朗日乘子法,求解该问题.该方法具有模型简单、收敛平稳、收敛速度快等优点.

(2)综合凝聚函数法,是通过寻求一个替代目标 $A(x)$ 和一个替代约束 $B(x)$,使原问题得到简化.替代就是均衡各个目标和各个约束,又使它们在 $A(x)$ 和 $B(x)$ 中具有不同的权重,即拉格朗日乘子.拉格朗日乘子的意义在于在寻求最优解的过程中,各个目标成为最大目标,各个约束成为最紧约束的概率.数值算例表明,凝聚函数法是求解多目标、多约束问题的有效方法,其他大型非线性规划问题可以采用该方法减小求解规模,加快收敛速度.

参考文献：

[1] 颜东煌,刘光栋. 确定斜拉桥合理施工状态的正装迭代法[J]. 中国公路学报, 1999, 12(2):60-64

[2] CHEN D W, THAM L G, LEE P K. Determination of initial cable forces in prestressed concrete cable-stayed bridges for given design deck profiles using the force equilibrium method [J]. **Computers & Structures**, 2000, 74(1):1-9

[3] 肖汝诚,项海帆. 斜拉桥索力优化及其工程应用[J]. 计算力学学报, 1998, 15(1):118-126

[4] WANG P H, TSENG T C, YANG C G. Initial shape of cable-stayed bridges [J]. **Computers & Structures**, 1993, 46(6):1095-1106

[5] KASUGA A, ARAI H, BREEN J E, *et al.* Optimum cable-force adjustments in concrete cable-stayed bridges [J]. **Journal of Structural Engineering**, 1995, 121(4):685-694

[6] 杜蓬娟,张 哲,黄才良. 斜拉桥成桥后误差调整的优化方法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2005, 37(7): 1016-1018

[7] 李兴斯. 解非线性规划的凝聚函数法[J]. 中国科学: A, 1991, 21(12):1283-1288

[8] 李兴斯. 一类不可微优化问题的有效解法[J]. 中国科学: A, 1994, 24(4):371-377

[9] 程耿东. 工程结构优化基础[M]. 北京:水利电力出版社, 1984

[10] 张可村. 工程优化的算法与分析[M]. 西安:西安交通大学出版社, 1998

[11] WANG Pao-his, YANG Chiung-guei. Parametric studies on cable-stayed bridges [J]. **Computers & Structures**, 1996, 60(2):243-260

Analysis of error adjustment for cable-stayed bridges
in finished state via aggregate function approach

DU Peng-juan^{*1,2}, ZHANG Zhe¹, SUN Jian-gang², TAN Su-jie²

(1. Bridge Institute, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. Department of Civil Engineering and Architecture, Dalian Nationalities University, Dalian 116600, China)

Abstract: The optimization model of error adjustment with multi-objective and multi-constraint is established by using the integrated aggregate function with parameters. The multi-objective and the multi-constraint are respectively aggregated to $A(x)$ and $B(x)$ with different weight in the substitute. The question of multi-objective and multi-constraint is converted into an optimization with single objective and constraint, which is smooth and differentiable. Numerical example indicates that the method can be used in the large scale non-linear programming.

Key words: cable-stayed bridges; aggregate function; error adjustment; non-linear programming