文章编号：1000-8608(2009)04-0545-06

高围压下岩石椭圆裂纹面构型变化规律

李　强[1,2]，杨　庆*[1,2]，栾茂田[1,2]

（1. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室，辽宁 大连 116024；
2. 大连理工大学 土木水利学院 岩土工程研究所，辽宁 大连 116024）

摘要：采用复变函数和保角变换的方法，对受压条件下张开型裂纹面的变形规律进行了分析，得出了变形过程中裂纹面新构型的参数方程，并给出了新的裂纹面构型的保角变换关系式；考虑到椭圆裂纹面在高围压下产生的较大变形，采用几何非线性的分析方法分析了构型方程参数的理论解，并与小变形线性方法的结果进行了对比分析，表明采用小变形结果误差不大. 扩充了受压条件下岩石张开型裂纹的非奇异断裂理论，为研究受压条件下裂纹面的闭合规律和裂纹变形对断裂破坏规律的影响提供了理论依据.

关键词：断裂力学；变形规律；闭合规律；围压；张开型裂纹

中图分类号：TU452　　**文献标志码：**A

0　引　言

受压条件下岩石断裂问题一直是岩石断裂力学的重要方向. 无论在工程实际中岩石内部裂纹，还是在实验中预制的裂纹，真正的闭合裂纹比较少，往往都是张开型的钝裂纹（椭圆裂纹）. 裂纹的破坏和闭合是研究张开型裂纹的两个重要方向. 岩体在高围压作用下往往能承受很大的压力，从而使裂纹面产生较大的变形，直至闭合，这为很多的实验证实[1].

在研究裂纹面的破坏规律中，李银平等[2]在实验中发现了裂纹扩展规律与裂纹的几何形状存在较大的关系. 在研究张开型裂纹的破坏规律时，张开型的裂纹面典型如椭圆裂纹面，在压缩作用下，其开裂与否和其裂纹面的周边拉（压）应力的分布相关，这与直线型裂纹的破坏模式不同. 直线型裂纹的裂纹面尖端存在着应力奇异问题，其开裂与否和裂尖的周向应力分布有密切的关系，而椭圆裂纹表面存在着应力集中，在闭合之前，没有应力奇异的问题，一般靠裂纹面的周向应力分布情况来判断其是否起裂，而裂纹的起裂位置也不在裂纹面尖端，这已经被很多的理论和实验所证实[1,3~6]，所以在分析张开型裂纹的起裂问题时更注重对裂纹面周向应力分布的分析. 从力学分析来看，裂纹面形状决定了其表面周边应力的分布情况，然而在以前的张开型裂纹破坏载荷分析中[1,3,4,7,8]，并没有考虑到裂纹面形状变化对裂纹面的周边应力分布的影响，而是直接采用受力前裂纹面的构型分析裂纹面周边应力的分布规律，这势必对裂纹开裂载荷和方向角的大小带来一定影响，所以研究裂纹面形状的变化对研究张开型裂纹面的破坏具有一定的意义.

在研究裂纹面的闭合规律中，通过分析高围压下裂纹面的变形过程，确定出裂纹面构型的变形规律，是研究裂纹面存在状态的基础. 而在诸多的文献中对此研究很少，通常都是简单地按线性的方法一次性计算裂纹面变形的大小[4,8~10]，对裂纹面构型的变化规律缺乏深入的研究，这给裂纹面的闭合分析带来了困难. 文献[5]采用正弦曲线近似地描述变形过程中裂纹面的构型，然后进行裂纹面的闭合分析，结论有一定的近似性.

本文在断裂理论的基础上，运用大变形分析方法分析裂纹面构型的变化规律，并给出新构型下的保角变换；采用积分方程的方法，得出裂纹面

收稿日期：2007-11-02；　**修回日期：**2009-06-01.
作者简介：李　强(1979-)，男，博士生，E-mail：anuoli@163.com；杨　庆*(1964-)，男，博士，教授，博士生导师，E-mail：qyang@dlut.edu.cn.

构型参数的理论解,为分析裂纹的闭合条件提供理论基础,同时也为分析裂纹面变形对张开型裂纹开裂规律的影响提供理论支持.

1 断裂力学基本理论

对于双向受压的中心椭圆斜裂纹模型,如图1所示(本文只对平面状态进行讨论).其中 σ_1 和 σ_2 分别为模型所受的压应力(本文以受压为正),$\sigma_2=\lambda\sigma_1$,$0\leqslant\lambda\leqslant 1$,$\alpha$ 为 x 轴与 σ_1 的夹角,a 和 b 分别是椭圆裂纹的长轴和短轴,$a=\rho b$,$0\leqslant\rho\leqslant 1$;坐标系为 x-y,裂纹面的椭圆方程为

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta \\ y &= b\sin\theta \end{aligned} \tag{1}$$

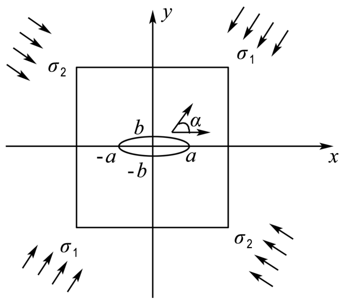

图 1 张开型裂纹模型

Fig. 1 The model of the open crack

采用保角变换方法将裂纹面变换为单位圆,将裂纹面外部变换到单位圆的内部,变换关系式为[6]

$$z=\omega(\xi)=R(m\xi+1/\xi) \tag{2}$$

式中

$$m=\frac{a-b}{a+b},\ R=\frac{a+b}{2} \tag{3}$$

由裂纹面的位移公式

$$2G(u_x+\mathrm{i}u_y)=k\varphi(\xi)-\frac{\omega(\xi)}{\overline{\omega'(\xi)}}\overline{\varphi'(\xi)}-\overline{\phi(\xi)} \tag{4}$$

进一步地可得出 z 平面上 u_x 和 u_y 的表达式:

$$\begin{aligned} u_x &= -d\cos\theta+e\sin\theta \\ u_y &= e\cos\theta+f\sin\theta \end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned} d &= -R(\kappa+1)\sigma_1\{[(m_1-1)(1+\lambda)-2(1-\lambda)\cos 2\alpha]/8E\}; \\ e &= -R(\kappa+1)\sigma_1\frac{2(1-\lambda)\sin 2\alpha}{8E}\sin\theta; \\ f &= -R(\kappa+1)\sigma_1\{[(m_1+1)(1+\lambda)-2(1-\lambda)\cos 2\alpha]/8E\} \end{aligned} \tag{6}$$

d、e 和 f 分别表示裂纹面的位移参数,G 为剪切模量,κ 为常数,满足

$$\kappa=\begin{cases}\dfrac{3-\nu}{1+\nu}; & \text{平面应力}\\ 3-4\nu; & \text{平面应变}\end{cases}$$

2 受压下椭圆裂纹构型的变化规律

考虑到岩体中椭圆裂纹在较高压应力作用下才能产生闭合,而在闭合前裂纹面将产生较大的变形,尤其对于复杂的加载过程,虽然在弹性小变形范围内计算出的总变形和加载过程无关,但考虑到裂纹面加载过程中随时可能闭合,从而导致边界条件的变化,所以需要研究裂纹的整个变形过程.本文采用几何非线性研究方法,引入了两种坐标系:Euler 坐标系和 Lagrange 坐标系. Euler 坐标系是初始坐标系,不随加载过程的变化而变化;Lagrange 坐标系随加载过程的变化而变化.取 z 平面坐标系作为 Euler 坐标系,取 ξ 平面坐标系作为 Lagrange 坐标系.当裂纹面的当前构型发生变化时,保角变换表达式将随之发生变化,ξ 平面的坐标系也将发生变化,从而 Lagrange 坐标系发生变化.

在分析裂纹变形的过程中,首先把 z 平面内的裂纹面变换到 ξ 平面内,然后把加载过程微分 $\mathrm{d}\sigma_1$,在 ξ 平面根据断裂力学知识计算出来 $\mathrm{d}\sigma_1$ 作用下裂纹面的位移,并将计算结果变换回 z 平面内,然后在 z 平面中对 $\mathrm{d}\sigma_1$ 进行积分计算,这样就在 z 平面上得到了整个加载过程中裂纹面的变形过程.在整个过程中采用 Lagrange 坐标系推导公式,然后转化到 Euler 坐标系中进行变形计算分析.

开始加载前,裂纹面参数方程满足式(1),保角变换满足式(2);加载后,裂纹面的位移参数 e 已不为零,这时裂纹面的构型方程变为

$$\begin{aligned} x &= (a-d)\cos\theta+e\sin\theta \\ y &= e\cos\theta+(b+f)\sin\theta \end{aligned} \tag{7}$$

其中 d、e 和 f 也称裂纹面的构型参数,由于原来裂纹构型方程已经发生变化,保角变换式(2)不再适应,应采用新的保角变换(8)进行变换:

$$z=\omega(\xi)=R(m_1\xi+\mathrm{i}m_2\xi+1/\xi) \tag{8}$$

其中

$$m_1=\frac{(a-d)-(b+f)}{(a-d)+(b+f)};$$

$$m_2=\frac{2c}{(a-d)+(b+f)};$$

$$R=\frac{(a-d)+(b+f)}{2} \tag{9}$$

当继续加载时，根据式(4)、(5)，这时新裂纹面构型下的位移为

$$d=-R(\kappa+1)\sigma_1\{[(m_1-1)(1+\lambda)-2(1-\lambda)\cos 2\alpha]/8E\};$$

$$e=-R(\kappa+1)\sigma_1\{[2(1-\lambda)\sin 2\alpha-(1+\lambda)m_2]/8E\}\sin\theta;$$

$$f=-R(\kappa+1)\sigma_1\{[(m_1+1)(1+\lambda)-2(1-\lambda)\cos 2\alpha]/8E\} \tag{10}$$

这时加载后裂纹面的构型仍可以写成形如式(7)的方程，保角变换则可以写成式(8)，继续加载，则可重复以上计算.

因此裂纹面在加载过程中，其新的构型方程总满足式(7)，新的保角变换满足式(8)、(9)，只要求解得到构型方程的参数 d、e 和 f，即可以求出加载过程中任何载荷下裂纹面的形状.

3　裂纹面构型方程参数求解

在求解裂纹面构型参数时，如果不考虑变形过程中裂纹面构型的变化对计算的影响，即小变形假设，计算结果是线性解，采用式(10)计算即可，但这对于高围压下裂纹变形较大的情况时可能会产生一定的误差；如果考虑变形过程中裂纹面构型的变化对裂纹面位移参数的影响，这将是几何非线性问题.本文按照大变形非线性方法计算出裂纹面构型参数的最终理论解，从而分析高应力下其非线性特征，以及高应力作用下采用小变形线性计算的裂纹面构型参数的误差.

根据圣维南原理可知裂纹面构型的变化对远端边界应力条件影响很小，在分析中边界应力采用原来构型的应力，而研究裂纹面变形过程则要考虑裂纹面构型的变化对其的影响.基于这种思想，分析了裂纹面位移参数 $d(\sigma)$、$e(\sigma)$ 和 $f(\sigma)$ 的表达式.

设加载过程中任一时刻 $\sigma_1=\sigma$ 和 $\sigma_2=\lambda\sigma$，裂纹面当前构型中的位移参数为 $d(\sigma)$、$e(\sigma)$ 和 $f(\sigma)$，在应力微元 $\mathrm{d}\sigma$ 作用下，裂纹面构型参数为

$$\mathrm{d}(d(\sigma))=(\kappa+1)\frac{(b+f(\sigma))(1+\lambda)}{8G}\mathrm{d}\sigma+(\kappa+1)\frac{(1-\lambda)[a-d(\sigma)+b+f(\sigma)]\cos 2\alpha}{8G}\mathrm{d}\sigma;$$

$$\mathrm{d}(e(\sigma))=-(\kappa+1)\frac{(a-d(\sigma)+b+f(\sigma))(1-\lambda)\sin 2\alpha}{8G}\mathrm{d}\sigma+\frac{(\kappa+1)(1+\lambda)e(\sigma)}{8G}\mathrm{d}\sigma;$$

$$\mathrm{d}(f(\sigma))=(\kappa+1)\frac{-(a-d(\sigma))(1+\lambda)}{8G}\mathrm{d}\sigma+\frac{(\kappa+1)(1-\lambda)[a-d(\sigma)+b+f(\sigma)]\cos 2\alpha}{8G}\mathrm{d}\sigma \tag{11}$$

对式(11)积分并化简，可得裂纹面构型参数为

$$d(\sigma_1)=\int_0^{\sigma_1}\frac{(\kappa+1)[b(1+\lambda)+(a+b)(1-\lambda)\cos 2\alpha]}{8G}\mathrm{d}\sigma+\int_0^{\sigma_1}f(\sigma)\frac{(\kappa+1)[(1+\lambda)+(1-\lambda)\cos 2\alpha]}{8G}\mathrm{d}\sigma-\int_0^{\sigma_1}d(\sigma)\frac{(\kappa+1)(1-\lambda)\cos 2\alpha}{8G}\mathrm{d}\sigma;$$

$$f(\sigma_1)=\int_0^{\sigma_1}-\frac{(\kappa+1)[a(1+\lambda)-(1-\lambda)(a+b)\cos 2\alpha]}{8G}\mathrm{d}\sigma+\int_0^{\sigma_1}f(\sigma)\frac{(\kappa+1)(1-\lambda)\cos 2\alpha}{8G}\mathrm{d}\sigma+\int_0^{\sigma_1}d(\sigma)\frac{(\kappa+1)[(1+\lambda)-(1-\lambda)\cos 2\alpha]}{8G}\mathrm{d}\sigma;$$

$$e(\sigma_1)=\int_0^{\sigma_1}\frac{(\kappa+1)(1+\lambda)e(\sigma)}{8G}\mathrm{d}\sigma-\int_0^{\sigma_1}(\kappa+1)\frac{(a-d(\sigma)+b+f(\sigma))(1-\lambda)\sin 2\alpha}{8G}\mathrm{d}\sigma \tag{12}$$

式(12)中 $d(\sigma)$ 和 $f(\sigma)$ 组成一个 Voltern 第二类积分方程组，解方程组(12)可得

$$d(\sigma)=C_1\mathrm{e}^{r_1\sigma}+C_2\mathrm{e}^{-r_1\sigma}+a;$$

$$f(\sigma)=C_3\mathrm{e}^{r_1\sigma}+C_4\mathrm{e}^{-r_1\sigma}+b;$$

$$e(\sigma)=C_5(\sigma)\mathrm{e}^{r_1\sigma}+C_6\mathrm{e}^{-r_1\sigma}+$$

$$\frac{2(1-\lambda)b}{(1+\lambda)}\sin 2\alpha \tag{13}$$

其中

$$r_1=\frac{(\kappa+1)(1+\lambda)}{8G}$$

$$C_1 = -\frac{(a-b)(1+\lambda)-(a+b)(1-\lambda)\cos 2\alpha}{2(1+\lambda)}$$

$$C_2 = -\frac{(a+b)(1+\lambda)+(a+b)(1-\lambda)\cos 2\alpha}{2(1+\lambda)}$$

$$C_3 = -\frac{(a+b)(1+\lambda)-(a+b)(1-\lambda)\cos 2\alpha}{2(1+\lambda)}$$

$$C_4 = -\frac{(b-a)(1+\lambda)+(a+b)(1-\lambda)\cos 2\alpha}{2(1+\lambda)}$$

$$C_5(\sigma) = \frac{(a+4b)(1-\lambda)}{2(1+\lambda)}\sin 2\alpha + \sigma\frac{b(1-\lambda)(\kappa+1)}{8G}\sin 2\alpha$$

$$C_6 = -\frac{a(1-\lambda)}{2(1+\lambda)}\sin 2\alpha$$

从解(13)的形式来看，裂纹面位移参数的变化规律随压缩载荷大致呈指数函数形式，其非线性程度和岩体所受的压缩载荷大小直接相关.

为了方便分析非线性程度，同时便于求解，对以上的位移方程(13)在 $\sigma=0$ 处进行泰勒展开可得

$$d(\sigma) = \sum_{i=1}^{n}\frac{r^i[C_1+(-1)^iC_2]}{i!}\left(\frac{\sigma}{G}\right)^i + \Delta d;$$

$$f(\sigma) = \sum_{i=1}^{n}\frac{r^i[C_3+(-1)^iC_4]}{i!}\left(\frac{\sigma}{G}\right)^i + \Delta f;$$

$$e(\sigma) = \frac{L_1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{r^{i-1}[(4-2n)b+(-1)^{n-1}a]}{i!}\times\left(\frac{\sigma}{G}\right)^i + \Delta e \tag{14}$$

分析式(14)，当 $n=1$ 时，也就是裂纹表达式的线性项部分，代入参数化简可得

$$d_1 = -(\kappa+1)\frac{-b(1+\lambda)-(1-\lambda)(a+b)\cos 2\alpha}{8G}\sigma;$$

$$e_1 = -(\kappa+1)\frac{(a+b)(1-\lambda)\sin 2\alpha}{8G}\sigma;$$

$$f_1 = -(\kappa+1)\frac{a(1+\lambda)-(1-\lambda)(a+b)\cos 2\alpha}{8G}\sigma \tag{15}$$

式(15)与各位移参数的线性解(6)相同，即非线性解(15)可以退化到线性解(6)，这从一方面验证了裂纹面位移参数表达式(13)的正确性.

令 $p=\sigma_1(1+\lambda)/2$，p 为静水压力，结合式(15)可得到线性计算裂纹变形参数的最大绝对误差为

$$\Delta d = -a\left(\frac{(\kappa+1)p}{4G}\right)^2;$$

$$\Delta f = -b\left(\frac{(\kappa+1)p}{4G}\right)^2;$$

$$\Delta e = -e_1\left(\frac{(\kappa+1)p}{4G}\right)^2 \tag{16}$$

从式(16)可以计算出各位移参数的相对误差. 从式(16)可以看出，当静水压力远小于材料的剪切模量时，采用线弹性计算裂纹面构型参数误差很小，即直接采用式(10)计算裂纹面的构型参数；如果静水压力很大时，采用线性分析会带来一定的误差，采用本文理论解式(13)更为准确.

4 讨 论

由于在建立受压作用下裂纹面变形方程的过程中，计算裂纹面位移参数是建立在裂纹面当前构型基础上，当加载的载荷值取微元时，剪切模量取对应于该点应力值的模量，从而可以采用积分方法计算. 所以上述方法同样适合于非线性弹性岩石裂纹面的变形分析. 非线性弹性岩石材料中，积分方程(12)适合，只是积分核不再是常数，通过解 Voltern 第二类积分方程组可得裂纹面构型参数，已知剪切模量 G 的表达式可求得裂纹面参数的解.

5 算例分析

本算例应用了软岩砂质岩参数，弹性模量 $E=1$ GPa，泊松比 $\nu=0.35$，载荷 $\sigma_2=\lambda\sigma_1$，裂纹面参数 $b=1.5$ cm，$a=10$ cm，曲率半径 0.02 cm，$\alpha=30°$.

加载过程分两步. 第 1 步：$\sigma_1^1=70$ MPa，$\lambda=1$；第 2 步：$\sigma_1^2=70$ MPa，$\lambda=0$，参考图 1.

首先分别采用式(10)和式(13)计算裂纹面构型参数的线性解和理论解，并计算了线性计算方法的误差，如图 2 和 3，反映加载中裂纹面构型参数的非线性特性.

综合图 2 和 3 分析可知：裂纹面构型参数中，参数 d 的理论值和线性值差别较大，其他的理论值和线性值差别较小，这和式(16)的计算结果相符. 从中看出，对一般的加载过程(加载远小于剪切模量时)，裂纹面构型参数可直接采用线性解式(11)计算裂纹面构型参数.

根据所求的裂纹面构型参数可得加载过程中裂纹面构型的变化，如图 4.

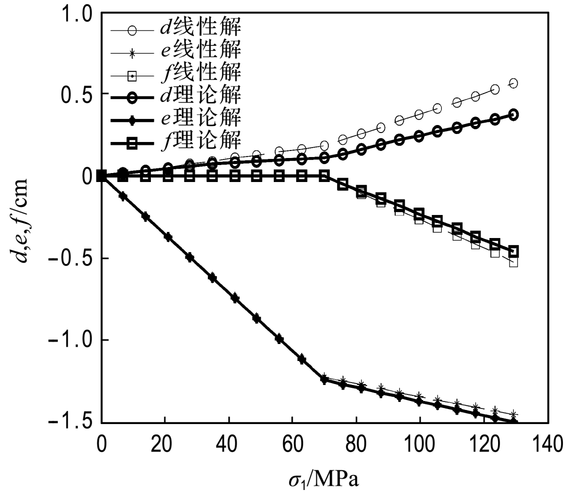

图 2　加载过程中裂纹面构型参数变化

Fig. 2　Displacement parameters varying with loading

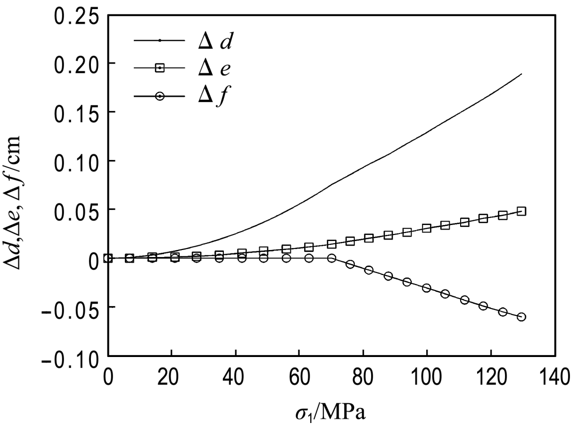

图 3　加载过程中裂纹面构型参数误差的变化

Fig. 3　Error of displacement parameters varying with loading

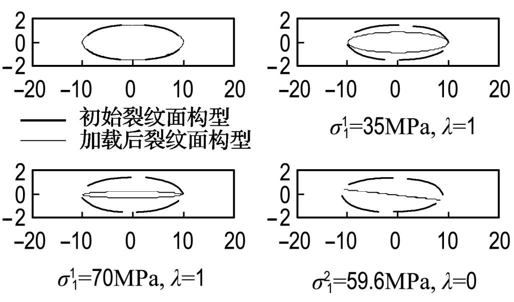

图 4　加载过程中裂纹面形状的变化

Fig. 4　Sharps of the crack surface varying with loading

对应于以上的加载过程，在第 1 步加载结束后，裂纹面构型方程为

$$x = 9.8157\cos\theta$$

$$y = 0.2715\sin\theta$$

当第 2 步加载到 $\sigma_1^2 = 59.6$ MPa 时，裂纹面发生了闭合，这时裂纹面的方程为

$$x = 9.5377\cos\theta - 0.4569\sin\theta$$

$$y = -0.4569\cos\theta + 0.0219\sin\theta$$

消去参数以上的构型方程等价于一个直线方程：$0.4569x + 9.5377y = 0$.

显然裂纹面构型方程发生很大的变化，即其形状在加载过程中也发生了较大的变化，且当第 2 步加载到 $\sigma_1^2 = 59.6$ MPa 时裂纹面从原来的张开型转为闭合，若继续加载裂纹面将会出现摩擦作用，裂纹面的边界条件将发生变化，这时研究裂纹面的构型显然有重要意义.

6　结　语

通过几何非线性的分析方法，分析了加载过程中裂纹面构型的变形规律. 给出了加载过程中新的裂纹面构型的参数方程形式，并给出了变形后裂纹面构型的保角变换形式，形式简单便于进行理论推导分析.

采用几何非线性的方法得出了裂纹面构型参数的理论解，误差分析表明，当载荷远小于剪切模量的数值时，可直接采用其线性解得出裂纹面的构型方程，误差不大.

本文分析表明高围压作用下裂纹面的形状会发生很大的变化，直至最后闭合，导致裂纹面应力边界条件的变化，所以在分析张开型裂纹的闭合和破坏时，应该考虑裂纹面的构型变化. 本文给出了变形后裂纹面的构型方程及保角变换关系式，从而可很方便地分析裂纹面的闭合情况以及裂纹面变形对其表面应力分布的影响，为分析张开型裂纹面的闭合破坏规律提供了理论依据.

参考文献：

[1] 李　贺，尹光志，许　江，等. 岩石断裂力学[M]. 重庆：重庆大学出版社，1988：119-122

[2] 李银平，杨春和. 裂纹几何特征对压剪复合断裂的影响分析[J]. 岩土力学与工程学报，2006，**25**(3)：462-466

[3] 郭少华，孙宗颀. 压应力下脆性椭圆型裂纹的断裂规律[J]. 中南工业大学学报，2001，**32**(5)：457-460

[4] MCCLINTOCK F A, WALSH J B. Friction on Griffith cracks in rocks under pressure [C]// **4th U. S. National Congress for Applied Mechanics**. New York:ASME Press, 1962:1015-1021

[5] GOU S H, SUN Z Q. Research on the closing law and stress intensity factor of an elliptical crack under compressive loading [J]. **Transactions of Nonferrous Metals Society of China**, 2002, **5**(12):966-969

[6] 范天佑. 断裂力学理论基础[M]. 北京:科学出版社, 2003

[7] JAEGER J C, COOK N G W. **Fundamentals of Rock Mechanics:3rd ed.** [M]. London:Chapman and Hall, 1979

[8] 文丕华. 岩石钝裂纹表面闭合与摩擦效应的研究[J]. 水利学报, 1989, **2**:60-66

[9] CHEN D L, WEISS B, STICKLER R. A model for crack closure [J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 1996, **53**(4):493-509

[10] 郭少华. 岩石类材料的压缩断裂的实验与理论研究[D]. 武汉:中南大学, 2003

Research on deformation of crack surface of rock masses under high confining compression

LI Qiang[1,2], YANG Qing*[1,2], LUAN Mao-tian[1,2]

(1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. Institute of Geotechnical Engineering, School of Civil and Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China))

Abstract: The law of the deformation of the open crack surface under compression is researched. The methods of complex function and conformal transformation are combined to construct the parameter function which describes the deforming crack surface. Furthermore, the new expression of conformal transformation for the deformed crack is deduced to analyze the characteristics of closure and fracture of the open crack. Considering the large deformation of crack surface under high confining pressure, geometric non-linear analysis method is utilized to fix the parameters, whose results are contrasted with those by linear analysis method, and it is shown that little error is caused by small deformation assumption. Based on the proposed method, the deformation of crack surface is calculated under any loads, which shows validity of conclusion. The above result develops the theory of nonsingular fracture mechanics, which will provide the theoretical basis both for the study of closing law of crack surface under compressive loading and the study of the crack deformation′s influence on the crack′s breaking.

Key words: fracture mechanics; law of deformation; closing law; confining pressure; open crack