第49卷第4期
2009年7月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 49, No. 4
July 2009

文章编号：1000-8608(2009)04-0587-07

随机相关结构下单因子混合高斯模型CDO定价问题

杨瑞成*[1,2]，秦学志[2]，陈 田[2]

（1. 鲁东大学 数学与信息学院，山东 烟台 264025；
2. 大连理工大学 管理学院，辽宁 大连 116024）

摘要：CDO是近十年来发展最为迅速的信用衍生产品之一，其核心问题为如何对CDO分券层进行定价. 基于此，通过引进混合高斯分布建立了随机相关结构条件下的单因子混合高斯定价模型，进一步给出了单个资产违约的概率分布，据此得出了整个资产池累积违约损失的概率分布，并分别得出了基于伯努利随机相关结构和对称随机相关结构条件下的具体表达形式. 在分析CDO分券层损失面的预期损失和收益面的预期收入的基础上，利用无套利定价原理得出了CDO分券层的合理信用价差.

关键词：债务抵押证券；混合高斯分布；随机相关结构；分券层；信用价差

中图分类号：F829.91　　**文献标志码**：A

0 引 言

CDO(collateralized debt obligation)，即债务抵押证券，是近几年国际金融市场上发展最为迅猛的信用衍生产品. 它以抵押债务信用为基础，通过各种资产证券化技术，对债券、贷款等资产组建资产池，重新分割投资回报和风险，以满足不同投资者需要的创新性衍生证券产品. 它的主要结构是由创始银行(创始机构或发起人)向债务人取得债权(包含贷放款项及债券)之后，将此债权以真实出售的方式转移至SPV(特殊目的的受托机构)，通过SPV将缺乏流动性且具违约可能之债权组合风险予以分散，并通过信用评级公司进行评级，然后重新包装成具有不同优先水平的分券层(tranche)发行给投资人. 分券层一般分为高级分券层(senior tranche)、中级分券层(mezzanine tranche)和股权级分券层(equity tranche)3种，其中中级分券层还可根据不同的投资需求进一步细分. 从资产池证券组合中得到的利息和本金按照“瀑布(waterfall)”机制进行分配，即首先满足高级分券层的支付，其次是中级分券层，依此类推，最后是股权级分券层. 这样，抵押组合所发生的损失首先由股权级分券层承担，然后依次由中级分券层及高级分券层承担，分券层级别越高所承担的风险越低，得到的利息也相应降低.

CDO对不同分券层的定价核心是资产池违约损失的计算，难点是标的资产之间违约相关性的度量，具有代表性的模型是因子Copula模型. 资产池的标的资产价值由市场共同因子、个别因子及其相关系数给出，最初市场共同因子的分布由高斯分布[1,2]给出. 由于金融市场数据普遍存在“厚尾现象”，而高斯分布不具备尾部相关性，此模型与市场数据的偏差较大[3,4]，且很难定量刻画“相关性微笑”(correlation smile)现象，于是文献[3]提出了双t-分布(double t-distribution) Copula模型，文献[4]提出了NIG(normal inverse Gaussian)Copula模型，文献[5]提出了多变量指数模型，同时文献[6]引入随机相关系数用以解决相关性微笑现象，这些模型较大地提高了模型与市场数据的拟合程度，并一定程度上解决了相关性微笑问题. 为进一步提高模型与市场数

收稿日期：2007-06-20；　**修回日期**：2009-04-14.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70771018)；中国博士后科学基金资助项目(20070410350)；教育部人文社会科学基金资助项目(05JA62905)；教育部新世纪优秀人才计划联合资助项目(2005).
作者简介：杨瑞成*(1970-)，男，2006-2009在大连理工大学做博士后工作，博士，副教授.

据的拟合程度，文献[7]提出了两种高斯分布混合的 Copula 模型，文献[8]通过实证分析发现利用3种高斯分布的混合高斯模型所得结果拟合程度更高，同时指出随着分券层数的增多，需要多个高斯分布混合才能有效提高拟合程度. 综上所述，为了更加有效地对 CDO 分券层进行定价，需构建多个高斯分布的混合因子模型，同时还要分析因子模型中的市场共同因子与个别因子间的相关性微笑问题. 基于此，本文用混合度为 I 的混合高斯分布表示市场共同因子，将市场共同因子和个别因子之间的相关系数由常数型或确定型的静态结构推广到随机条件下的动态结构，建立混合高斯因子 CDO 定价模型. 以此模型为基础，讨论整个资产池的累积违约损失概率分布，给出 CDO 分券层的定价公式.

1 模型介绍

定义 1（混合高斯分布） 记 $p(x;\mu_l,\sigma_l)$ 为一高斯分布密度，则称

$$\sum_{l=1}^{I} w_l p(x;\mu_l,\sigma_l) = \frac{1}{\delta}\sum_{l=1}^{I} \frac{w_l}{\sqrt{2\pi}\sigma_l} \exp\left(-\frac{(x-\mu_l)^2}{2\sigma_l^2}\right) \tag{1}$$

为期望为0、方差为1、混合度为 I 的混合高斯分布，记为 $f_{\mathrm{MG}}(w_l;\mu_l,\sigma_l)$. 其中 $w_l = 1-\sum_{m\neq l} w_m \in [0,1]$；$\delta = \sqrt{\sum_{l=1}^{I} w_l(\sigma_l^2+\mu_l^2)}$；$\mu_l = \dfrac{-\left(\sum_{m\neq l} w_m\mu_m\right)}{w_l}$；$m,l=1,2,\cdots,I$.

注 1 在定义1中，若 $I=1$，则 $w_1=1$，$\mu_1=0$，$\delta=\sigma_1$.

定义 2（单因子混合高斯模型） 假定 CDO 的抵押资产池由 n 个标的资产组成，第 i 个标的资产价值 X_i 受市场共同因子 Y 与个别因子 ε_i 影响，满足如下关系：

$$X_i = \tilde{\rho}_i Y + \sqrt{1-\tilde{\rho}_i^2}\,\varepsilon_i;\ i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

式中：Y 为混合度为 I 的混合高斯过程；ε_i 为标准高斯过程，其概率分布记为 $\Phi(0,1)$，且 ε_i 与 ε_j $(i\neq j)$ 相互独立；Y 与 ε_i 相互独立；$\tilde{\rho}_i\in[0,1]$，为独立于 Y 与 ε_i 的随机变量（保证了 $X_i\mid(\tilde{\rho}_i,Y)$ 与 $X_j\mid(\tilde{\rho}_j,Y)$ 间的相互独立性）.

注 2 令 $F_{X_i}(x)$ 表示随机变量 X_i 的概率分布函数，那么当 $\tilde{\rho}_i$ 为常数 $\bar{\rho}_i$ 时，$F_{X_i}(x)$ 可以通过随机向量函数的概率分布计算方法求出，把它记做 $F_{X_i|\bar{\rho}_i}(x)$，则

$$F_{X_i|\bar{\rho}_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\iint\limits_{\bar{\rho}_i y+\sqrt{1-\bar{\rho}_i^2}\varepsilon_i<x} [f_{\mathrm{MG}}(y)\times \exp(-v^2/2)]\mathrm{d}v\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[f_{\mathrm{MG}}(y)\times \int_{-\infty}^{(x-\bar{\rho}_i y)/\sqrt{1-\bar{\rho}_i^2}} \exp(-v^2/2)]\mathrm{d}v\mathrm{d}y \tag{3}$$

下面给出两种常见的随机相关结构[6,7]：

定义 3（伯努利随机相关结构） 称相关系数 $\tilde{\rho}_i$ 为伯努利随机相关结构，若 $\tilde{\rho}_i$ 满足

$$\tilde{\rho}_i = (1-B_i)\rho' + B_i\rho'' \tag{4}$$

其中 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 服从伯努利分布，满足 $p_{\rho'}=P\{B_i=0\}$，$p_{\rho''}=P\{B_i=1\}$，且诸 B_i 间相互独立；$\rho',\rho''\in[0,1]$，为两不相等的常数.

定义 4（对称随机相关结构） 若随机相关系数 $\tilde{\rho}_i$ 满足如下形式：

$$\tilde{\rho}_i = (1-B_s)(1-B_i)\rho + B_s \tag{5}$$

其中 $\rho\in[0,1]$，为常数，B_s 与 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为相互独立且均服从伯努利分布的随机变量，称 $\tilde{\rho}_i$ 为对称随机相关结构.

注 3 不论 B_i、B_s 取0还是1，可以验证 $\sqrt{1-\tilde{\rho}_i^2}$ 始终与 $(1-B_s)[\sqrt{1-\rho^2}(1-B_i)+B_i]$ 相等，因此在对称随机相关结构下，式(2)可写为

$$X_i = [(1-B_i)(1-B_s)\rho + B_s]Y + (1-B_s)[(1-B_i)\sqrt{1-\rho^2}+B_i]\varepsilon_i \tag{6}$$

从式(6)可以看出，市场共同因子和个别因子的系数除 ρ 和 $\sqrt{1-\rho^2}$ 的差别外具有对称特征，故把具有式(5)特征的随机结构称为对称随机相关结构.

2 资产池累积损失的概率分布

记 K_i 为资产池中第 i 家公司标的资产价值的违约边界，其违约时间定义如下：

$$\tau_i := \inf\{t\geqslant 0: X_i\leqslant K_i\};\ i=1,2,\cdots,n \tag{7}$$

那么，第 i 个标的资产违约时间的概率分布为

$$F_{\tau_i}(t)=P\{\tau_i\leqslant t\}=$$
$$P\{\tilde{\rho}Y+\sqrt{1-\tilde{\rho}_i^2}\varepsilon_i\leqslant K_i\}=$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\mathrm{MG}}(y)\int_0^1 E[I_{\{\tilde{\rho}_iY+\sqrt{1-\tilde{\rho}_i^2}\varepsilon_i\leqslant K_i\}}\mid(\tilde{\rho}_i=\bar{\rho},Y=y)]\mathrm{d}F_{\tilde{\rho}_i}(\bar{\rho})\mathrm{d}y=$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\mathrm{MG}}(y)\int_0^1 P\{\bar{\rho}y+\sqrt{1-\bar{\rho}^2}\varepsilon_i\leqslant K_i-\bar{\rho}y\mid(\tilde{\rho}_i=\bar{\rho},Y=y)\}\mathrm{d}F_{\tilde{\rho}_i}(\bar{\rho})\mathrm{d}y \tag{8}$$

其中 P 与 E 分别是关于 ε 的概率与数学期望，混合高斯密度函数 $f_{\mathrm{MG}}(y)=\sum_{i=1}^{I}\left[\frac{w_i}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\times\exp\left(-\frac{(y-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)\right]$ 为 Y 的密度函数，$F_{\tilde{\rho}_i}$ 为 $\tilde{\rho}_i$ 的概率分布函数.

从 $F_{\tau_i}(t)=P\{\tau_i\leqslant t\}=P\{\tilde{\rho}_iY+\tilde{\rho}_i^2\varepsilon_i\leqslant K_i\}$ 可以看出，如果知道 $F_{\tau_i}(t)$，可以求出违约边界，则 $K_i=F_{X_i}^{-1}(F_{\tau_i}(t))$；特别地，记 $K_i=F_{X_i|\bar{\rho}}^{-1}(F_{\tau_i}(t))$ 为在 $\tilde{\rho}_i=\bar{\rho}$ 条件下的违约边界值. 在通常情况下，K_i 往往借助于违约率（hazard rate）h_i 给出，根据违约率的定义[9,10]可知

$$h_i(t)=\frac{f_{\tau_i}(t)}{1-F_{\tau_i}(t)}=\frac{1}{1-F_{\tau_i}(t)}\frac{\mathrm{d}F_{\tau_i}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{9}$$

即

$$F_{\tau_i}(t)=1-\exp\left(-\int_{t_0}^{t}h_i(s)\mathrm{d}s\right) \tag{10}$$

于是

$$K_i=F_{X_i}^{-1}\left[1-\exp\left(-\int_0^t h_i(s)\mathrm{d}s\right)\right] \tag{11}$$

假定资产池满足齐次性，即对所有的 $i=1,2,\cdots,n$ 来说，$\tilde{\rho}_i=\tilde{\rho}$（$\tilde{\rho}$ 为随机变量），$K_i=K$，每一标的资产的回复率 $R_i=R\in[0,1)$，违约率 $h_i=h$，记 $p_i(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))=P\{\tau_i\leqslant t\mid(\tilde{\rho}_i=\bar{\rho},Y=y)\}$ 为第 i 标的资产在 $(\tilde{\rho}_i=\bar{\rho},Y=y)$ 条件下的违约时刻概率，则

$$p_i(t\mid(\tilde{\rho}_i=\bar{\rho},Y=y))=$$
$$P\{\tau_i\leqslant t\mid(\tilde{\rho}_i=\bar{\rho},Y=y)\}=$$
$$P\{X_i\leqslant K_i\mid(\tilde{\rho}_i=\bar{\rho},Y=y)\} \tag{12}$$

则齐次资产条件下 $p_i(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))$ 对所有的 i 相同，记为 $p(t\mid(\tilde{\rho}_i=\bar{\rho},Y=y))$. 根据在 $(\tilde{\rho}_i,Y)$ 条件下 X_i 之间的相互独立性知

$$P\{(\tau_{\gamma_1}\leqslant t,\cdots,\tau_{\gamma_m}\leqslant t)\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y)\}=$$
$$\prod_{j=1}^{m}P\{\tau_{\gamma_j}\leqslant t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y)\}=$$
$$\prod_{j=1}^{m}p_{\gamma_j}(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y)) \tag{13}$$

其中 $\gamma_j(j=1,\cdots,m)$ 为取值于 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的整数.

定义违约计数过程 $N(t)=\sum_{i=1}^{n}I_{\{\tau_i\leqslant t\}}$（在初始时刻 t_0 处满足 $N(t_0)=0$），则 t 时刻资产池的累积违约损失为

$$L(t)=M\sum_{i=1}^{n}(1-R)I_{\{\tau_i\leqslant t\}}=M(1-R)N(t) \tag{14}$$

其中 M 为每一标的资产的名目本金.

由式(14)可以看出，$L(t)$ 的取值范围为 $\Pi\triangleq\{0,M(1-R),\cdots,nM(1-R)\}$，且满足

$$P\{L(t)=C\}=P\left\{N(t)=\frac{C}{(1-R)M}\right\} \tag{15}$$

其中 $C\in\Pi$.

由 X_i 在 $(\tilde{\rho}_i=\bar{\rho},Y=y)$ 条件下的独立性知，在 $(\tilde{\rho}_i=\bar{\rho},Y=y)$ 的条件下 τ_i 之间亦相互独立，且在齐次资产池的条件下，所有的 $p_i(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))$ 均等于 $p(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))$，故

$$P\{N(t)=k\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y)\}=$$
$$\sum_{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_k\}\in\{1,\cdots,n\}}P\{(\tau_{\gamma_1}\leqslant t,\cdots,\tau_{\gamma_k}\leqslant t)\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y)\}=\binom{n}{k}[p(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))]^k[1-p(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))]^{n-k} \tag{16}$$

于是得如下结论：

定理 1　单因子混合高斯模型下的齐次资产池累积违约损失的概率分布满足

$$P\{L(t)=C\}=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\mathrm{MG}}(y)\int_0^1\binom{n}{\bar{k}}[p(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))]^{\bar{k}}[1-p(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))]^{n-\bar{k}}\mathrm{d}F_{\tilde{\rho}}(\bar{\rho})\mathrm{d}y \tag{17}$$

其中 $\bar{k}\triangleq\frac{C}{(1-R)M}$.

证明

$$P\{L(t)=C\}=P\{N(t)=\bar{k}\}=E[P(N(t)=\bar{k}\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))]=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\mathrm{MG}}(y)\int_0^1 P\{N(t)=\bar{k}\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y)\}\mathrm{d}F_{\tilde{\rho}}(\bar{\rho})\mathrm{d}y \tag{18}$$

利用式(8)与(16)得结论成立.

注4 若$\tilde{\rho}$为离散型随机变量，概率分布为$P\{\tilde{\rho}=\rho_\gamma\}=p_\gamma$，其中$\gamma=1,2,\cdots,Z$，常数$\rho_\gamma\in[0,1]$，则

$$\int_0^1\binom{n}{\bar{k}}[p(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))]^{\bar{k}}[1-p(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))]^{n-\bar{k}}\mathrm{d}F_{\tilde{\rho}}(\bar{\rho})=\sum_{\gamma=1}^{Z}\binom{n}{\bar{k}}[p(t\mid(\tilde{\rho}=\rho_\gamma,Y=y))]^{\bar{k}}[1-p(t\mid(\tilde{\rho}=\rho_\gamma,Y=y))]^{n-\bar{k}}p_\gamma \tag{19}$$

由于在齐次资产池的条件下，对所有的$i=1,\cdots,n$来说，$F_{X_i}^{-1}$、τ_i、F_{τ_i}、ρ_i及$\tilde{\rho}_i$均相同，为叙述方便，仍以第i资产的相应量代替其他资产的相应量，下面讨论基于两种特殊随机相关结构的齐次资产池累积违约损失的概率分布.

2.1 伯努利随机相关结构下累积违约损失的概率分布

定理2 在伯努利随机相关结构条件下，单因子混合高斯模型下的齐次资产池累积违约损失的概率分布满足

$$P\{L(t)=C\}=\binom{n}{\bar{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}[\Lambda_1^{\bar{k}}(1-\Lambda_1)^{n-\bar{k}}p_{\rho'}+\Lambda_2^{\bar{k}}(1-\Lambda_2)^{n-\bar{k}}p_{\rho''}]f_{\mathrm{MG}}(y)\mathrm{d}y \tag{20}$$

其中

$$\Lambda_1=\Phi\left[\frac{F_{X_i\mid\rho'}^{-1}(F_{\tau_i}(t))-\rho' y}{\sqrt{1-\rho'^2}}\right]$$

$$\Lambda_2=\Phi\left[\frac{F_{X_i\mid\rho''}^{-1}(F_{\tau_i}(t))-\rho'' y}{\sqrt{1-\rho''^2}}\right]$$

证明 根据伯努利相关结构的特征，$\tilde{\rho}_i$分别以$p_{\rho'}$、$p_{\rho''}$的概率取值ρ'与ρ''. 记$\bar{\rho}_0=\rho'$，$\bar{\rho}_1=\rho''$，由式(19)知

$$\int_0^1\binom{n}{\bar{k}}[p(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))]^{\bar{k}}[1-p(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))]^{n-\bar{k}}\mathrm{d}F_{\tilde{\rho}}(\bar{\rho})=\binom{n}{\bar{k}}[\Lambda_1^{\bar{k}}(1-\Lambda_1)^{n-\bar{k}}p_{\rho'}+\Lambda_2^{\bar{k}}(1-\Lambda_2)^{n-\bar{k}}p_{\rho''}] \tag{21}$$

将式(21)代入式(17)即得结论成立.

2.2 对称随机相关结构下累积违约损失的概率分布

记$p=P\{B_i=1\}$，$p_{\mathrm{s}}=P\{B_{\mathrm{s}}=1\}$，则由式(19)知

$$\int_0^1[p(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))]^{\bar{k}}[1-p(t\mid\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))]^{n-\bar{k}}\mathrm{d}F_{\tilde{\rho}}(\bar{\rho})=\sum_{\alpha,\beta=0}^{l}\{[P\{\bar{\rho}_{\alpha\beta}y+\sqrt{1-\bar{\rho}_{\alpha\beta}^2}\varepsilon_i\leqslant K_i\mid(\tilde{\rho}_i=\bar{\rho}_{\alpha\beta},Y=y,B_i=\alpha,B_{\mathrm{s}}=\beta)\}]^{\bar{k}}\times[1-P\{\bar{\rho}_{\alpha\beta}y+\sqrt{1-\bar{\rho}_{\alpha\beta}^2}\varepsilon_i\leqslant K_i\mid(\tilde{\rho}_i=\bar{\rho}_{\alpha\beta},Y=y,B_i=\alpha,B_{\mathrm{s}}=\beta)\}]^{n-\bar{k}}\times P\{B_i=\alpha\}P\{B_{\mathrm{s}}=\beta\}\}=p(1-p_{\mathrm{s}})\Theta_1^{\bar{k}}[1-\Theta_1]^{n-\bar{k}}+(1-p)(1-p_{\mathrm{s}})\Theta_2^{\bar{k}}[1-\Theta_2]^{n-\bar{k}} \tag{22}$$

其中$\Theta_1=F_{X_i\mid 0}^{-1}(F_{\tau_i}(t))$；$\Theta_2=\Phi\{[F_{X_i\mid\rho}^{-1}(F_{\tau_i}(t))-\rho y]/\sqrt{1-\rho^2}\}$；$\alpha,\beta\in\{0,1\}$；$\bar{\rho}_{00}=\rho$，$\bar{\rho}_{10}=0$，$\bar{\rho}_{11}=\bar{\rho}_{01}=1$.

将式(22)代入式(18)，同定理2的证明类似可得如下结论：

定理3 若随机相关系数满足对称随机相关结构，则单因子混合高斯模型下的资产池累积违约损失分布满足

$$P\{L(t)=C\}=\binom{n}{\bar{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\{p(1-p_{\mathrm{s}})\Theta_1^{\bar{k}}[1-\Theta_1]^{n-\bar{k}}+(1-p)(1-p_{\mathrm{s}})\Theta_2^{\bar{k}}\times[1-\Theta_2]^{n-\bar{k}}\}f_{\mathrm{MG}}(y)\mathrm{d}y \tag{23}$$

证明 根据定理1，由式(17)知

$$P\{L(t)=C\}=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\mathrm{MG}}(y)\int_0^1\binom{n}{\bar{k}}[p(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))]^{\bar{k}}[1-p(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))]^{n-\bar{k}}\mathrm{d}F_{\tilde{\rho}}(\bar{\rho})\mathrm{d}y=\binom{n}{\bar{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\mathrm{MG}}(y)\int_0^1[p(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=y))]^{\bar{k}}[1-p(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=$$

$$y))]^{n-\bar{k}}\mathrm{d}F_{\hat{\rho}}(\bar{\rho})\mathrm{d}y \tag{24}$$

将式(22)代入式(24)得

$$\begin{aligned}P\{L(t)=C\}&=\binom{n}{\bar{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\mathrm{MG}}(y)\int_0^1[p(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},\\&Y=y))]^{\bar{k}}[1-p(t\mid(\tilde{\rho}=\bar{\rho},Y=\\&y))]^{n-\bar{k}}\mathrm{d}F_{\hat{\rho}}(\bar{\rho})\mathrm{d}y=\\&\binom{n}{\bar{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\mathrm{MG}}(y)\{p(1-p_{\mathrm{s}})\times\\&\Theta_1^{\bar{k}}[1-\Theta_1]^{n-\bar{k}}+(1-p)\times\\&(1-p_{\mathrm{s}})\Theta_2^{\bar{k}}[1-\Theta_2]^{n-\bar{k}}\}\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{25}$$

即结论成立.

3　CDO 定价

所谓 CDO 定价,是指给 CDO 不同分券层赋以合理的信用价差.从投资者的角度可分为损失面 DL(default leg)和收益面 PL(premium leg),当标的资产发生违约时,损失面是投资人投资相应分券层所应承担的损失金额现值,而收益面是投资人投资相应分券层所应获得的收益金额现值,在无套利的条件下,损失面必须等于收益面,据此可以求出各分券层的合理信用价差.

3.1　损失面的预期损失

不失一般性,设某一分券层承担的总损失为$[K_1,K_u]$,当资产池累积损失 $L(t)$ 小于这个分券层的下界 K_1 时,投资者不承担任何损失;如果累积损失 $L(t)$ 大于这个分券层的下界 K_1 但小于上界 K_u,这个分券层的投资者需承担 $L(t)-K_1$ 的损失;一旦累积损失比例超过 K_u,则这个分券层的投资者需承担的损失为其本金总额 K_u-K_1,即

$$L_{DL}(t)=\begin{cases}0; & L(t)<K_1\\ L(t)-K_1; & K_1\leqslant L(t)\leqslant K_u\\ K_u-K_1; & L(t)>K_u\end{cases} \tag{26}$$

也就是说

$$\begin{aligned}L_{DL}(t)=&(K_u-K_1)I_{\{L(t)>K_u\}}+\\&(L(t)-K_1)I_{\{L(t)\in[K_1,K_u]\}}\end{aligned} \tag{27}$$

由于 $L_{DL}(t)$ 为一递增跳过程,可由 Riemann-Stieltijes 积分表示损失面的价值

$$DL=\int_{t_0}^{T}D(t_0,t)\mathrm{d}L_{DL}(t) \tag{28}$$

其中 $D(t_0,t)$ 为 t 时刻的无风险贴现因子.

由于 $L_{DL}(t_0)=0$,对式(28)利用分部积分展开后两边取期望得

$$\begin{aligned}E[DL]=&D(t_0,T)E[L_{DL}(T)]+\\&\int_{t_0}^{T}E[L_{DL}(t)]\mathrm{d}D(t_0,t)\end{aligned} \tag{29}$$

其中

$$\begin{aligned}E[L_{DL}(t)]=&(K_u-K_1)P\{L(t)>K_u\}+\\&\int_{K_1}^{K_u}(x-K_1)\mathrm{d}F_L(x)\end{aligned} \tag{30}$$

3.2　收益面的预期收入

记 s 为分券层$[K_1,K_u]$的合理信用价差,即 CDO 分券层$[K_1,K_u]$的价格,假定利息给付日期为$\{t_i:i=0,1,\cdots,N\}$且满足 $t_0<t_1<\cdots<t_{N-1}<t_N=T$,则

$$\begin{aligned}PL=&\sum_{i=1}^{N}D(t_0,t_i)s\Delta t_i\{(K_u-K_1)I_{\{L(t_i)<K_1\}}+\\&(K_u-L(t_i))I_{\{L(t_i)\in[K_1,K_u]\}}\}\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}E[PL]=&\sum_{i=1}^{N}D(t_0,t_i)s\Delta t_i\Big\{(K_u-K_1)\times\\&P\{L(t_i)<K_1\}+\\&\int_{K_1}^{K_u}(K_u-x)\mathrm{d}F_L(x)\Big\}\end{aligned} \tag{32}$$

其中 $F_L(x)$ 为 $L(t)$ 的分布函数.

3.3　合理信用价差

由 3.1 和 3.2 的分析得如下结论:

定理 4　在无套利假设条件下,分券层$[K_1,K_u]$的合理信用价差公式(即 CDO 的分券层价格公式)如下:

$$s=\frac{D(t_0,T)E[L_{DL}(T)]+\int_{t_0}^{T}E[L_{DL}(t)]\mathrm{d}D(t_0,t)}{\sum_{i=1}^{N}D(t_0,t_k)\Delta t_i\Big\{(K_u-K_1)P[L(t_i)<K_1]+\int_{K_1}^{K_u}(K_u-x)\mathrm{d}F_L(x)\Big\}} \tag{33}$$

其中 $E[L_{DL}(t)]$ 由式(30)给出,$F_L(x)$ 为资产池累积违约损失 $L(t)$ 的分布函数,可借助于式(17)得出.

证明　根据无套利定价原理,损失面 DL 的

预期损失和收益面 PL 的预期收入在数值上应该相等，即相应期望值相等，也就是 $E[DL]=E[PL]$，据此求得合理的信用价差 s. 为此将式(29)和(32)代入 $E[DL]=E[PL]$，得

$$D(t_0,T)E[L_{DL}(T)]+\int_{t_0}^{T}E[L_{DL}(t)]\mathrm{d}D(t_0,t)=\sum_{i=1}^{N}D(t_0,t_i)s\Delta t_i\left\{(K_u-K_1)P\{L(t_i)<K_1\}+\int_{K_1}^{K_u}(K_u-x)\mathrm{d}F_L(x)\right\}=s\left\{\sum_{i=1}^{N}D(t_0,t_i)\Delta t_i\left\{(K_u-K_1)P\{L(t_i)<K_1\}+\int_{K_1}^{K_u}(K_u-x)\mathrm{d}F_L(x)\right\}\right\} \tag{34}$$

由此得式(33)成立.

4 数值计算

本文将给出基于伯努利随机相关结构的信用价差(分券层价格)的数值计算结果. 假定一种CDO发行期限为5 a(初始时刻 t_0 等于0)，每季度付息一次；无风险贴现因子 $D(0,t)=\exp(-0.05t)$. 混合度 $I=4$ 的混合高斯过程由期望值为 $\mu_1=-10$，$\mu_2=-15$，$\mu_3=-17$，$\mu_4=161/88$；$w_1=0.05$，$w_2=0.04$，$w_3=0.03$，$w_4=0.88$；$\sigma=1$ 的高斯过程构成. 资产池由100个标的资产构成并满足齐次性，每个标的资产的名目本金 $M=1$，回复率 $R=40\%$，资产池每个标的资产违约率 $h=1\%$；伯努利随机相关结构中参数 $p_{\rho'}=0.2$，$p_{\rho''}=0.8$，$\rho'=0.05$，$\rho''=0.50$. 针对分券层的划分国际上主要有两种标准：iTraxx Europe标准和DJ CDX NAIG标准. 表1基于伯努利相关结构给出了针对这两种划分标准下的分券层价格.

表1表明，在给定的参数值下，CDO股权级分券层的价格远大于其他分券层的价格，这是由于当资产池发生违约时首先由股权级分券层承担损失，其所承担的风险相当高，而对于其他分券层来说，其承担的风险相对来说要小得多，其收到的利息(分券层价格)也相应减少. 在实际发行过程中，由于股权级分券层承担的风险最高，因此，除表中给出的利息(股权级价格)之外，该分券层投资者还可获得按季度预先支付的500个年度基点. 从表1可以看出，最高分券层22%～100%或30%～100%的价格相当低(所承担的风险也相当小)，几乎没人购买，因此该分券层很少发行甚至不发行.

表1 基于两种国际划分标准的分券层价格(单位：BPs)

Tab.1 Price of CDO tranches based on two standards (unit: BPs)

iTraxx Europe (5 a)		DJ CDX NAIG (5 a)	
分券层/%	分券层价格	分券层/%	分券层价格
0～3	333.057 0	0～3	333.057 0
3～6	67.371 6	3～7	40.181 9
6～9	42.790 7	7～10	32.919 5
9～12	32.919 5	10～15	22.625 1
12～22	12.585 3	15～30	10.550 1
22～100	0.294 5	30～100	0.231 8

5 结 论

本文在高斯Copula模型的基础上，用混合高斯分布模拟市场共同因子，针对相关性微笑现象引入随机相关系数，建立了随机相关结构条件下的单因子混合高斯定价模型. 通过对资产池累积违约损失概率分布的分析，在伯努利随机相关结构和对称随机相关结构条件下，分别给出了相应概率分布的具体形式，在此基础上得出了CDO分券层的合理信用价差公式，并以伯努利随机相关结构为例，在给定具体参数值的条件下得出了分券层价格的数值计算结果.

参考文献：

[1] LI D X. On default correlation: a copula approach [J]. **Journal of Fixed Income**, 2000, **9**(3):43-54

[2] LAURENT J P, GREGORY J. Basket default swaps, CDOs and factor copulas [R/OL]. (2003-02-07). http://www.defaultrisk.com/pp_crdrv_25.htm

[3] HULL J, WHITE A. Valuation of a CDO and an n-th to default CDS without Monte Carlo simulation [J]. **Journal of Derivatives**, 2004, **12**(2):8-23

[4] KALEMANOVA A, SCHMID B, WERNER R. The

normal inverse Gaussian distribution for synthetic CDO pricing [R/OL]. (2005-08-01). http://www.defaultrisk.com/pp_crdrv_91.htm

[5] GIESECKE K. A simple exponential model for dependent defaults [J]. **Journal of Fixed Income**, 2003, **13**(3):74-83

[6] FERRARESE C. A comparative analysis of correlation skew modeling techniques for CDO index tranches [R/OL]. (2006-09-08). http://www.defaultrisk.com/pp_crdrv_91.htm

[7] BURTSCHELL X, GREGORY J, LAURENT J P. Beyond the Gaussian copula: stochastic and local correlation [R/OL]. (2005-10-03). http://laurent.jeanpaul.free.fr/stochastic_local_correlation.pdf

[8] XU Geng. Extending Gaussian copula with jumps to match correlation smile [R/OL]. (2006-11-18). http://www.defaultrisk.com/pp_corr100.htm

[9] SCHONBUCHER P J. **Credit Derivatives Pricing Models: Models, Pricing, and Implementation** [M]. New York: Wiley, 2003

[10] 冯　谦，杨朝军. 担保债权凭证定价——Copula函数的非参数估计与应用[J]. 运筹与管理，2006，**15**(5):104-107

Valuation of CDO based on single factor Gaussian mixture model with stochastic correlation structure

YANG Rui-cheng[*1,2], QIN Xue-zhi[2], CHEN Tian[2]

(1. School of Mathematics and Information, Ludong University, Yantai 264025, China;
2. School of Management, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: CDO is one of the most popular credit derivative products during the latest ten years, and the key issue is how to price the tranche. For solving this problem, by introducing the mixed Gaussian distribution, the single factor Gaussian mixture model with the stochastic correlation structure is established. Furthermore, the probability distribution of single asset is given, and the probability distribution of cumulative default loss of the whole portfolio pool is derived. At the same time, the explicit forms on Bernoulli stochastic correlation structure and symmetric stochastic correlation structure are obtained. Besides, based on analyzing the expected default leg and premium leg, according to the arbitrage-free principle, the fair credit spread of CDO tranche is derived.

Key words: collateralized debt obligation (CDO); Gaussian mixture distribution; stochastic correlation structure; tranche; credit spread