第49卷第6期 大连理工大学学报 Vol.49, No.6
2009年11月 Journal of Dalian University of Technology Nov. 2009

应用数学

文章编号：1000-8608(2009)06-0985-05

两类相依随机序及其性质

陈燕红[1]， 艾卫群[2]， 宋立新[*1]

（1.大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024；
2.吉林大学 数学学院，吉林 长春 130012）

摘要：在危险率序和拟危险率序基础上，研究了条件随机向量的分布函数在随机序意义下的比较，提出了上象限危险率序和下象限拟危险率序的概念，研究了它们的基本性质，以及与其他随机序之间的关系. 这两类序密切相关，它们刻画了 n 元联合分布与它的任意一个一元边际分布之间的变化快慢的趋势. 在二元情形下，关于两类序的 Fréchet 下界是受控的，并且上象限危险率序和下象限拟危险率序分别包含右尾递增序和左尾递减序.

关键词：上象限危险率序；下象限拟危险率序；右尾递增；左尾递减

中图分类号：O212.4 **文献标志码**：A

0 引 言

随机序已经广泛应用到概率统计、金融保险等学科里. 比较两个分布函数时，运用随机序通常能得到较好的结果. 这一类研究主要包括 Lehmann[1] 提出的一些相依随机序的概念，Shaked 等[2]、Müller 等[3] 的上象限序（$\leqslant_{\mathrm{uo}}$）和下象限序（$\leqslant_{\mathrm{lo}}$），Joe[4] 的正象限相依序（$\leqslant_{\mathrm{PQD}}$），Shaked 等[2]、Hu 等[5] 的多元危险率序（$\leqslant_{\mathrm{hr}}$），Block 等[6]、Colangelo 等[7] 的多元逆危险率序（$\leqslant_{\mathrm{rh}}$）.

考虑一类随机向量，若它的 n 元联合分布要比其 $n-1$ 元边际分布变化更大，比较这类随机向量的分布，往往需要比较它们的条件分布. 本文基于这种情况，在危险率序和拟危险率序基础上，结合上象限序和下象限序，提出两个新的随机序的概念，即上象限危险率序（$\leqslant_{\mathrm{uohr}}$）和下象限拟危险率序（$\leqslant_{\mathrm{loqh}}$），并研究这两种序的一些基本性质，重点讨论与右尾递增序（$\leqslant^{*}_{\mathrm{RTI}}$）和左尾递减序（$\leqslant^{*}_{\mathrm{LTD}}$）的关系等.

1 定义和性质

定义 1 对所有的 $u_j \in [0,1]$，$i,j=1,2,\cdots,n$，$j\neq i$，如果

$$\left(X_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{X_j > F_j^{-1}(u_j)\}\right) \leqslant_{\mathrm{hr}} \left(Y_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{Y_j > G_j^{-1}(u_j)\}\right)$$

那么称随机向量 $\boldsymbol{X}$ 在上象限危险率序意义下小于等于随机向量 $\boldsymbol{Y}$，记做 $\boldsymbol{X}\leqslant_{\mathrm{uohr}}\boldsymbol{Y}$（或者 $F\leqslant_{\mathrm{uohr}}G$）.

如果

$$\left(X_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{X_j \leqslant F_j^{-1}(u_j)\}\right) \leqslant_{\mathrm{qh}} \left(Y_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{Y_j \leqslant G_j^{-1}(u_j)\}\right)$$

那么称随机向量 $\boldsymbol{X}$ 在下象限拟危险率序意义下小于等于随机向量 $\boldsymbol{Y}$，记做 $\boldsymbol{X}\leqslant_{\mathrm{loqh}}\boldsymbol{Y}$（或者 $F\leqslant_{\mathrm{loqh}}G$）.

令 $\overline{F}$ 和 $\overline{G}$ 分别为随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1\quad X_2\quad\cdots\quad X_n)$ 和 $\boldsymbol{Y}=(Y_1\quad Y_2\quad\cdots\quad Y_n)$ 的生存函数. 假设 F^{*}、G^{*}、F_{*}、G_{*} 分别是 $(X_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{X_j > F_j^{-1}(u_j)\})$、$(Y_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{Y_j > G_j^{-1}(u_j)\})$、$(X_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{X_j$

收稿日期：2007-10-16； **修回日期**：2009-02-28.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10271049).
作者简介：陈燕红(1980-)，女，博士生；宋立新*(1966-)，男，教授，博士生导师，E-mail：lxsong@dlut.edu.cn.

$\leqslant F_j^{-1}(u_j)\})$、$(Y_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{Y_j \leqslant G_j^{-1}(u_j)\})$ 的分布函数，由文献[4]知Fréchet下界 F^- 的定义，当 $F\in\mathscr{F}_2(F_1,F_2)$，$\mathscr{F}_2$ 表示已知边际分布 F_1、F_2 的二元分布函数族，$F^-(x_1,x_2)=\max\{F_1(x_1)+F_2(x_2)-1,0\}$，由于 $\bar{F}(x_1,x_2)=\overline{F_1}(x_1)+\overline{F_2}(x_2)-1+F(x_1,x_2)$，其对应的生存函数为 $\overline{F^-}(x_1,x_2)=\max\{\bar{F}_1(x_1)+\bar{F}_2(x_2)-1,0\}$. 现考虑二元的情况，$F^*=P\{X_i\mid X_j>F_j^{-1}(u_j),j\neq i\}$，令 $F_j^{-1}(u_j)=t$，$\bar{F}_j(t)\neq 0$，$F_j(t)\neq 0$，则有

$$\overline{F^{*-}}(x_i)=\frac{\max\{\bar{F}_i(x_i)+\bar{F}_j(t)-1,0\}}{\bar{F}_j(t)}$$

$$F_*^-(x_i)=\frac{\max\{F_i(x_i)+F_j(t)-1,0\}}{F_j(t)}$$

定理1 如果 $F\in\mathscr{F}_2(F_i,F_j)$，$\boldsymbol{X}=(X_i\quad X_j)$，$i\neq j$，那么 $F^-\leqslant_{\mathrm{uohr}}F$，$F^-\leqslant_{\mathrm{loqh}}F$.

证明 要证 $F^-\leqslant_{\mathrm{uohr}}F$，只需证 $(x_i,t)\leqslant(y_i,t)$ 时，$\overline{F^{*-}}(y_i)\ \overline{F^*}(x_i)\leqslant\overline{F^{*-}}(x_i)\ \overline{F^*}(y_i)$，故只需证 $\max\{\bar{F}_i(y_i)+\bar{F}_j(t)-1,0\}\bar{F}(x_i,t)\leqslant\max\{\bar{F}_i(x_i)+\bar{F}_j(t)-1,0\}\bar{F}(y_i,t)$.

当 $\bar{F}_i(y_i)+\bar{F}_j(t)-1\leqslant 0$ 时，显然成立；

当 $\bar{F}_i(y_i)+\bar{F}_j(t)-1\geqslant 0$ 时，由于 $F(y_i,t)\geqslant F(x_i,t)$，$\bar{F}(x_i,t)\geqslant\bar{F}(y_i,t)$，有

$$[\bar{F}_i(y_i)+\bar{F}_j(t)-1]\bar{F}(x_i,t)\leqslant$$
$$[\bar{F}_i(x_i)+\bar{F}_j(t)-1]\bar{F}(y_i,t)\Leftrightarrow$$
$$[F(y_i,t)-\bar{F}(y_i,t)]\bar{F}(x_i,t)\geqslant$$
$$[F(x_i,t)-\bar{F}(x_i,t)]\bar{F}(y_i,t)\Leftrightarrow$$
$$F(y_i,t)\bar{F}(x_i,t)\geqslant F(x_i,t)\bar{F}(y_i,t)$$

同理可得 $F^-\leqslant_{\mathrm{loqh}}F$. □

例1 令 F 为 (X_1,X_2) 的分布函数，在(1,1)、(1,2)、(2,1)、(3,3)的概率分别为1/5、1/5、1/5和2/5. 易得 $\overline{F^{*+}}(1,1)=1\geqslant\overline{F^*}(1,1)=2/3$，$\overline{F^{*+}}(2,2)=\overline{F^*}(2,2)=1$，所以 F^+ 和 F 并不适合 $\leqslant_{\mathrm{uohr}}$ 序关系. 再令 G 为 $(-X_1,-X_2)$ 的分布函数，容易得出 G^+ 和 G 也不具有 $\leqslant_{\mathrm{loqh}}$ 序关系.

例1表明当 $F\in\mathscr{F}_2(F_i,F_j)$ 时，$F\leqslant_{\mathrm{loqh}}F^+$ 和 $F\leqslant_{\mathrm{uohr}}F^+$ 不一定成立. 其中 F^+ 为Fréchet上界[4]，即 $F^+(x_i,x_j)=\min\{F_i(x_i),F_j(x_j)\}$，对应的生存函数为 $\overline{F^+}(x_i,x_j)=\min\{\overline{F_i}(x_i),\overline{F_j}(x_j)\}$，从而

$$\overline{F^{*+}}(x_i,x_j)=\min\left\{\frac{\overline{F_i}(x_i)}{\overline{F_j}(x_j)},1\right\}$$

$$F_*^+(x_i,x_j)=\min\left\{\frac{F_i(x_i)}{F_j(x_j)},1\right\}$$

其中 $(x_i,x_j)\in\mathbf{R}^2$，$i\neq j$.

下面的几个定理将给出序 $\leqslant_{\mathrm{uohr}}$ 和 $\leqslant_{\mathrm{loqh}}$ 的一些基本性质.

定理2 n 元随机向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$，若 $\boldsymbol{X}\leqslant_{\mathrm{uohr}}\boldsymbol{Y}$ $(\boldsymbol{X}\leqslant_{\mathrm{loqh}}\boldsymbol{Y})$，令 $I=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}\subset\{1,2,\cdots,n\}$，则

$$\boldsymbol{X}_I\leqslant_{\mathrm{uohr}}\boldsymbol{Y}_I\ (\boldsymbol{X}_I\leqslant_{\mathrm{loqh}}\boldsymbol{Y}_I)$$

只要在 $\boldsymbol{X}=(X_1\quad X_2\quad\cdots\quad X_n)$ 中取除 $(i_1,i_2,\cdots,i_k)$ 之外的其他 $n-k$ 个变量为 $-\infty(\infty)$ 即可.

定理3 令独立随机向量 $\boldsymbol{X}_i$，$i=1,2,\cdots,m$，其维数为 K_i，且各 X_{i_k}，$k\in\{1,2,\cdots,k_i\}$ 独立同分布. 同样独立随机向量 $\boldsymbol{Y}_i$，$i=1,2,\cdots,m$，其维数亦为 K_i，且每个 Y_{i_k}，$k\in\{1,2,\cdots,k_i\}$ 独立同分布，则有

(1) $(\boldsymbol{X}_i\leqslant_{\mathrm{uohr}}\boldsymbol{Y}_i,i=1,2,\cdots,m)\Rightarrow(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m)\leqslant_{\mathrm{uohr}}(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\cdots,\boldsymbol{Y}_m)$；

(2) $(\boldsymbol{X}_i\leqslant_{\mathrm{loqh}}\boldsymbol{Y}_i,i=1,2,\cdots,m)\Rightarrow(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m)\leqslant_{\mathrm{loqh}}(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\cdots,\boldsymbol{Y}_m)$.

证明 只证结论(1)，结论(2)可同理推得. 由于 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m$ 独立，且 X_{i_k}，$k\in\{1,2,\cdots,k_i\}$ 独立同分布，有

$$\frac{\overline{G^*}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)}{\overline{F^*}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)}=\frac{\bar{G}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)}{\bar{F}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)}=$$
$$\frac{\bar{G}(\boldsymbol{x}_1)}{\bar{F}(\boldsymbol{x}_1)}\ \frac{\bar{G}(\boldsymbol{x}_2)}{\bar{F}(\boldsymbol{x}_2)}\cdots\frac{\bar{G}(\boldsymbol{x}_m)}{\bar{F}(\boldsymbol{x}_m)}$$

因为 $\boldsymbol{X}_i\leqslant_{\mathrm{uohr}}\boldsymbol{Y}_i$，$\dfrac{\bar{G}(\boldsymbol{x}_i)}{\bar{F}(\boldsymbol{x}_i)}$ 是关于 $\boldsymbol{x}_i$ 单调递增的，从而上式关于 $\boldsymbol{x}$ 单调递增，其中 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1\quad\boldsymbol{x}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{x}_m)$. □

定理4 随机向量序列 $\{\boldsymbol{X}_k\}$、$\{\boldsymbol{Y}_k\}$，$k=1,2,\cdots$，满足当 $k\to\infty$ 时，存在 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$，使得 $\boldsymbol{X}_k\to\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}_k\to\boldsymbol{Y}$. 如果 $\boldsymbol{X}_k\leqslant_{\mathrm{uohr}}\boldsymbol{Y}_k$ $(\boldsymbol{X}_k\leqslant_{\mathrm{loqh}}\boldsymbol{Y}_k)$，$k=1,2,\cdots$ 成立，则有 $\boldsymbol{X}\leqslant_{\mathrm{uohr}}\boldsymbol{Y}$ $(\boldsymbol{X}\leqslant_{\mathrm{loqh}}\boldsymbol{Y})$.

定理5 假设 n 元随机向量 $\boldsymbol{X}=$

$(X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n)$和$\boldsymbol{Y}=(Y_1 \quad Y_2 \quad \cdots \quad Y_n)$属于同一 Fréchet 类.

(1) 若 $\boldsymbol{X} \leqslant_{\mathrm{uohr}} \boldsymbol{Y}$,且 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$ 是单调递增函数，则 $(\phi_1(X_1),\phi_2(X_2),\cdots,\phi_n(X_n)) \leqslant_{\mathrm{uohr}} (\phi_1(Y_1),\phi_2(Y_2),\cdots,\phi_n(Y_n))$.

(2) 若 $\boldsymbol{X} \leqslant_{\mathrm{loqh}} \boldsymbol{Y}$,且 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$ 是单调递增函数，则 $(\phi_1(X_1),\phi_2(X_2),\cdots,\phi_n(X_n)) \leqslant_{\mathrm{loqh}} (\phi_1(Y_1),\phi_2(Y_2),\cdots,\phi_n(Y_n))$.

(3) 若 $\boldsymbol{X} \leqslant_{\mathrm{uohr}} \boldsymbol{Y}$,且 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$ 是单调递减函数，则 $(\phi_1(X_1),\phi_2(X_2),\cdots,\phi_n(X_n)) \leqslant_{\mathrm{loqh}} (\phi_1(Y_1),\phi_2(Y_2),\cdots,\phi_n(Y_n))$.

(4) 若 $\boldsymbol{X} \leqslant_{\mathrm{loqh}} \boldsymbol{Y}$,且 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$ 是单调递减函数，则 $(\phi_1(X_1),\phi_2(X_2),\cdots,\phi_n(X_n)) \leqslant_{\mathrm{uohr}} (\phi_1(Y_1),\phi_2(Y_2),\cdots,\phi_n(Y_n))$.

证明　只证第一个结论,其他证明类似. 记 $F_{\phi_j}(x)=F_j(\phi_j^{-1}(x))$,则 $F_{\phi_j}^{-1}(u_j)=\phi_j(F_j^{-1}(u_j))$. 由于$(X_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{X_j > F_j^{-1}(u_j)\}) \leqslant_{\mathrm{hr}} (Y_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{Y_j > G_j^{-1}(u_j)\})$,且 ϕ_i 单调递增,有$(\phi_i(X_i) \mid \bigcap_{j\neq i}\{X_j > F_j^{-1}(u_j)\}) \leqslant_{\mathrm{hr}} (\phi_i(Y_i) \mid \bigcap_{j\neq i}\{Y_j > G_j^{-1}(u_j)\})$,等价于$(\phi_i(X_i) \mid \bigcap_{j\neq i}\{\phi_j(X_j) > F_{\phi_j}^{-1}(u_j)\}) \leqslant_{\mathrm{hr}} (\phi_i(Y_i) \mid \bigcap_{j\neq i}\{\phi_j(Y_j) > G_{\phi_j}^{-1}(u_j)\})$,结论成立. □

考虑 $\leqslant_{\mathrm{uohr}}$ 和 $\leqslant_{\mathrm{loqh}}$ 在多元参数族分布中的应用，假设 F_α^*、$F_{*,\alpha}$ 分别为$(X_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{X_j > F_j^{-1}(u_j)\})$,$(X_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{X_j \leqslant F_j^{-1}(u_j)\})$的分布函数.

定理 6　(1) 如果$\overline{F_\alpha^*}$ 的偏导数存在,对于所有 $\alpha\leqslant\beta$,$\boldsymbol{X}_\alpha \leqslant_{\mathrm{uohr}} \boldsymbol{X}_\beta$,则当且仅当$\dfrac{\partial}{\partial x_i}\log\overline{F_\alpha^*}$ 关于α单调递增,$i=1,2,\cdots,n$;

(2) 如果 $F_{*,\alpha}$ 的偏导数存在,对于所有 $\alpha\leqslant\beta$,$\boldsymbol{X}_\alpha \leqslant_{\mathrm{loqh}} \boldsymbol{X}_\beta$,则当且仅当$\dfrac{\partial}{\partial x_i}\log F_{*,\alpha}$ 关于 α 单调递减,$i=1,2,\cdots,n$.

证明　仅证明结论(2),类似可证结论(1). 对于所有的 $\alpha\leqslant\beta$,$\boldsymbol{X}_\alpha \leqslant_{\mathrm{loqh}} \boldsymbol{X}_\beta$,当且仅当 $F_{*,\beta}/F_{*,\alpha}$ 关于 x_i 单调递减,又由于 $F_{*,\alpha}$ 的偏导数存在,则等价于$\dfrac{\partial}{\partial x_i}\log\dfrac{F_{*,\beta}}{F_{*,\alpha}}=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\log F_{*,\beta}-\dfrac{\partial}{\partial x_i}\log F_{*,\alpha}\leqslant 0$,等价于$\dfrac{\partial}{\partial x_i}\log F_{*,\alpha}$ 关于 α 单调递减,$i=1,2,\cdots,n$. □

通过两个例子来说明随机序 $\leqslant_{\mathrm{uohr}}$ 和 $\leqslant_{\mathrm{loqh}}$ 的比较.

例 2　(Farlie-Gumbel-Morgenstern 分布) n 元Farlie-Gumbel-Morgenstern 分布的一般形式为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\Big(\prod_{i=1}^n F_i(x_i)\Big)\times \Big(1+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}[a_{i_1i_2}\bar F_{i_1}(x_{i_1})\times \bar F_{i_2}(x_{i_2})]+\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant n}[a_{i_1i_2i_3}\times \bar F_{i_1}(x_{i_1})\bar F_{i_2}(x_{i_2})\bar F_{i_3}(x_{i_3})]+\cdots+ a_{12\cdots n}\bar F_1(x_1)\bar F_2(x_2)\cdots\bar F_n(x_n)\Big)$$

取 F_i 为$[0,1]$上的均匀分布,令 $0\leqslant a_{12\cdots n}=\alpha\leqslant 1$，其他参数为 0，则 $F_{n,\alpha}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\Big(\prod_{i=1}^n x_i\Big)\Big(1+\alpha\prod_{i=1}^n(1-x_i)\Big)$,其中 $x_i\in[0,1]$. 令$(X_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{X_j\leqslant x_j\})$的分布为 $F_{*,\alpha}$,则 $F_{*,\alpha}=x_i\Big[1+\alpha\prod_{i=1}^n(1-x_i)\Big]\Big/\Big[1+\alpha\prod_{j\neq i}(1-x_j)\Big]$. 当$0\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant 1$,$x_i\leqslant y_i\in[0,1]$,$i=1,2,\cdots,n$ 时,可得

$$x_iy_i\frac{\Big(1+\alpha_2\prod_{i=1}^n(1-x_i)\Big)}{\Big(1+\alpha_2\prod_{j\neq i}(1-x_j)\Big)}\frac{\Big(1+\alpha_1\prod_{i=1}^n(1-y_i)\Big)}{\Big(1+\alpha_1\prod_{j\neq i}(1-y_j)\Big)}\geqslant x_iy_i\frac{\Big(1+\alpha_1\prod_{i=1}^n(1-x_i)\Big)}{\Big(1+\alpha_1\prod_{j\neq i}(1-x_j)\Big)}\frac{\Big(1+\alpha_2\prod_{i=1}^n(1-x_i)\Big)}{\Big(1+\alpha_2\prod_{j\neq i}(1-x_j)\Big)}$$

所以 $F_{*,\alpha_1}\leqslant_{\mathrm{loqh}}F_{*,\alpha_2}$.

例 3　(多元 Gumbel 指数分布) 对于正参数 $\lambda=\{\lambda_I,I\subseteq\{1,2,\cdots,n\},I\neq\varnothing\}$,假设生存函数为 $\bar F_\lambda=\exp\{-\sum_I\lambda_I\prod_{i\in I}x_i\}$,$(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)\geqslant(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$. 另一正参数 $\lambda^*=\{\lambda_I^*,I\subseteq\{1,2,\cdots,n\},I\neq\varnothing\}$，假设 $\boldsymbol{Y}_{\lambda^*}=$

$(Y_1 \quad Y_2 \quad \cdots \quad Y_n)$ 的生存函数为 $\bar{G}_{\lambda^*}$. 令 $X_i \overset{\mathrm{st}}{=\!=} Y_i$，有 $\lambda_i = \lambda_i^*$，$i = 1,2,\cdots,n$. 记 $\overline{F^*}$、$\overline{G^*}$ 分别为 $(X_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{X_j > x_j\})$ 与 $(Y_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{Y_j > x_j\})$ 的生存函数，当 $\lambda \geqslant \lambda^*$ 时

$$\frac{\overline{G^*}}{\overline{F^*}} = \exp\Big\{-x_i\Big(\sum_j \nu_{ij}x_j + \sum_{j\neq k}\nu_{ijk}x_jx_k + \cdots + \nu_{12\cdots n}\prod_j x_j\Big)\Big\}$$

其中 $\nu_{ij} = \lambda_{ij}^* - \lambda_{ij} \leqslant 0,\cdots,\nu_{12\cdots n} = \lambda_{12\cdots n}^* - \lambda_{12\cdots n} \leqslant 0$，从而 $(X_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{X_j > x_j\}) \leqslant_{\mathrm{hr}} (Y_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{Y_j > x_j\})$. 又 $X_i \overset{\mathrm{st}}{=\!=} Y_i$，有

$$\Big(X_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{X_j > F_j^{-1}(u_j)\}\Big) \leqslant_{\mathrm{hr}} \Big(Y_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{Y_j > G_j^{-1}(u_j)\}\Big);u_j \in [0,1]$$

成立，即 $\boldsymbol{X} \leqslant_{\mathrm{uohr}} \boldsymbol{Y}$.

2　与其他随机序的关系

对于 n 元随机向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$，因为 $\boldsymbol{X} \leqslant_{\mathrm{hr}} \boldsymbol{Y} \Rightarrow \boldsymbol{X} \leqslant_{\mathrm{uo}} \boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{X} \leqslant_{\mathrm{qh}} \boldsymbol{Y} \Rightarrow \boldsymbol{X} \geqslant_{\mathrm{lo}} \boldsymbol{Y}$，从而

$$\boldsymbol{X} \leqslant_{\mathrm{uohr}} \boldsymbol{Y} \Rightarrow \Big(X_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{X_j > F_j^{-1}(u_j)\}\Big) \leqslant_{\mathrm{uo}} \Big(Y_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{Y_j > G_j^{-1}(u_j)\}\Big)$$

$$\boldsymbol{X} \leqslant_{\mathrm{loqh}} \boldsymbol{Y} \Rightarrow \Big(X_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{X_j > F_j^{-1}(u_j)\}\Big) \geqslant_{\mathrm{lo}} \Big(Y_i \mid \bigcap_{j\neq i}\{Y_j > G_j^{-1}(u_j)\}\Big)$$

定理 7　令二元随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1 \quad X_2)$，$\boldsymbol{X}^I = (Y_1 \quad Y_2)$，$Y_1$、$Y_2$ 相互独立，且 $Y_i \overset{\mathrm{st}}{=\!=} X_i$，$i = 1,2$，则

(1) $\mathrm{RTI}(X_j \mid X_i),i \neq j,i,j = 1,2 \Leftrightarrow \boldsymbol{X}^I \leqslant_{\mathrm{uohr}} \boldsymbol{X}$；

(2) $\mathrm{LTD}(X_j \mid X_i),i \neq j,i,j = 1,2 \Leftrightarrow \boldsymbol{X}^I \leqslant_{\mathrm{loqh}} \boldsymbol{X}$.

证明　若 X_j 关于 X_i 是 RTI 的，$i \neq j,i,j = 1,2$，即对所有 $u_j \geqslant 0$，$P\{X_j > F_j^{-1}(u_j) \mid X_i > x_i\}$ 关于 x_i 单调递增. 由于 $P\{X_i > x_i \mid X_j > F_j^{-1}(u_j)\}/\overline{F_i}(x_i) = P\{X_j > F_j^{-1}(u_j) \mid X_i > x_i\}/\bar{F}_j(F_j^{-1}(u_j))$，等价于对所有的 x_i，$P\{X_i > x_i \mid X_j > F_j^{-1}(u_j)\}$ 关于 u_j 单调递减的，即 $X_i \leqslant_{\mathrm{hr}} \{X_i \mid X_j > F_j^{-1}(u_j),j \neq i\}$. 又因为 Y_1、Y_2 相互独立，且 $Y_i \overset{\mathrm{st}}{=\!=} X_i$，等价于 $\{Y_i \mid Y_j > G_j^{-1}(u_j),j \neq i\} \leqslant_{\mathrm{hr}} \{X_i \mid X_j > F_j^{-1}(u_j),j \neq i\}$，亦即 $\boldsymbol{X}^I \leqslant_{\mathrm{uohr}} \boldsymbol{X}$.

同理可得结论(2).　□

Hollander 等[8] 介绍了其他两种 RTI 和 LTD 序，即 $\leqslant_{\mathrm{RTI}}^*$ 和 $\leqslant_{\mathrm{LTD}}^*$，下面讨论上章定义的随机序与这两个序之间的关系.

定理 8　假设二元分布函数 F 和 G 的边际分布相同，那么

$$F \leqslant_{\mathrm{uohr}} G \Rightarrow F \leqslant_{\mathrm{RTI}}^* G,\ F \leqslant_{\mathrm{loqh}} G \Rightarrow F \leqslant_{\mathrm{LTD}}^* G$$

证明　下面考虑的情形都是 $j \neq i \in \{1,2\}$，对 $\forall u_j$，给定 $x_i \leqslant x_i^*$.

如果 $F \leqslant_{\mathrm{uohr}} G$，易得 $\bar{F}(x_i,F_j^{-1}(u_j))\bar{G}(x_i^*,G_j^{-1}(u_j)) \geqslant \bar{F}(x_i^*,F_j^{-1}(u_j))\bar{G}(x_i,G_j^{-1}(u_j))$，$\bar{F}(x_i^* \mid F_j^{-1}(u_j)) \leqslant \bar{G}(x_i^* \mid G_j^{-1}(u_j))$，并且 $\dfrac{G(x_i,G_j^{-1}(u_j))}{F_i(x_i)} \geqslant \dfrac{G(x_i^*,G_j^{-1}(u_j))}{F_i(x_i^*)}$，所以

$$\begin{aligned}&P\{X_j \leqslant F_j^{-1}(u_j) \mid X_i > x_i\} - P\{X_j \leqslant F_j^{-1}(u_j) \mid X_i > x_i^*\} = \\&\frac{\bar{F}(x_i^*,F_j^{-1}(u_j))}{\overline{F_i}(x_i^*)} - \frac{\bar{F}(x_i,F_j^{-1}(u_j))}{\overline{F_i}(x_i)} \leqslant \\&\frac{\bar{F}(x_i^*,F_j^{-1}(u_j))}{\bar{G}(x_i^*,G_j^{-1}(u_j))}\Big(\frac{\bar{G}(x_i^*,G_j^{-1}(u_j))}{\overline{F_i}(x_i^*)} - \frac{\bar{G}(x_i,G_j^{-1}(u_j))}{\overline{F_i}(x_i)}\Big) \leqslant \\&P\{Y_j \leqslant F_j^{-1}(u_j) \mid Y_i > x_i\} - P\{Y_j \leqslant F_j^{-1}(u_j) \mid Y_i > x_i^*\}\end{aligned}$$

因而，$F \leqslant_{\mathrm{RTI}}^* G$ 成立.

同理，如果 $F \leqslant_{\mathrm{loqh}} G$，那么 $F \leqslant_{\mathrm{LTD}}^* G$.　□

推论 1　如定理 7 所给条件，下面两个等价关系成立：

(1) $\boldsymbol{X}^I \leqslant_{\mathrm{uohr}} \boldsymbol{X} \Leftrightarrow \boldsymbol{X}^I \leqslant_{\mathrm{RTI}}^* \boldsymbol{X} \Leftrightarrow \mathrm{RTI}(X_i \mid X_j),i,j = 1,2,i \neq j$；

(2) $\boldsymbol{X}^I \leqslant_{\mathrm{loqh}} \boldsymbol{X} \Leftrightarrow \boldsymbol{X}^I \leqslant_{\mathrm{LTD}}^* \boldsymbol{X} \Leftrightarrow \mathrm{LTD}(X_i \mid X_j)$，$i,j = 1,2,i \neq j$.

这是由于当 $\boldsymbol{X}^I \leqslant_{\mathrm{RTI}}^{*} \boldsymbol{X}, x_1 \leqslant x_2$ 时，即 $G_{x_1}^{*}(y) - G_{x_2}^{*}(y) = F_2(y) - F_2(y) = 0 \leqslant F_{x_1}^{*}(y) - F_{x_2}^{*}(y)$，$P\{X_2 > y \mid X_1 > x\}$ 关于 x 单调递增. 当 $\boldsymbol{X}^I \leqslant_{\mathrm{LTD}}^{*} \boldsymbol{X}, x_1 \leqslant x_2$ 时，即 $G_{*,x_1}(y) - G_{*,x_2}(y) = 0 \leqslant F_{*,x_1}(y) - F_{*,x_2}(y)$，$P\{X_2 \leqslant y \mid X_1 \leqslant x\}$ 关于 x 单调递减.

3　结　语

随机序一直是概率统计学比较关心的课题，本文定义了上象限危险率序和下象限拟危险率序，给出了它们的一些基本性质，重点考查了与 RTI、LTD、RTI*、LTD* 等随机序的关系，对随机序理论的发展和完善有重要的意义.

参考文献：

[1] LEHMANN E L. Some concepts of dependence [J]. **The Annals of Mathematical Statistics**，1966，**37**(5)：1137-1153

[2] SHAKED M，SHANTHIKUHAR J G. **Stochastic Orders and Their Applications** [M]. San Diego：Academic Press，1994

[3] MÜLLER A，STOYAN D. **Comparison Methods for Stochastic Models and Risks** [M]. New York：Wiley，2002

[4] JOE H. **Multivariate Models and Dependence Concepts** [M]. London：Chapman and Hall，1997

[5] HU Tai-zhong，KHALEDI Baha-eldin，SHAKED M. Multivariate hazard rate orders [J]. **Journal of Multivariate Analysis**，2003，**84**(1)：173-189

[6] BLOCK H，SAVITS T H，SINGH H. The reversed hazard rate function [J]. **Probability in the Engineering and Informational Sciences**，1998，**12**(1)：69-90

[7] COLANGELO A，SCARSINI M，SHAKED M. Some notions of multivariate positive dependence [J]. **Insurance：Mathematics and Economics**，2005，**37**(1)：13-26

[8] HOLLANDER M，PROSCHAN F，SCONING J. Information，censoring，and dependence [C] // BLOCK H W，SAMPSON A R，SAVITS T H，eds. **Topics in Statistical Dependence：IMS Lecture Notes-Monograph Series.** Hayward：Institute of Mathematical Statistics，1990：257-268

Two classes of dependence stochastic orders and their properties

CHEN Yan-hong[1]，AI Wei-qun[2]，SONG Li-xin[*1]

(1. School of Mathematical Sciences，Dalian University of Technology，Dalian 116024，China；
2. Mathematics School，Jilin University，Changchun 130012，China)

Abstract：Based on hazard orders and quasi hazard orders together with the comparison of conditional random vectors under stochastic orders，the concepts of upper orthant hazard order and lower orthant quasi hazard order are presented，and their basic properties as well as the relationship with other stochastic orders are explored. The two orders are closely related，and they describe the change trend between n-dimensional distribution and its univariate marginal distribution. In the bivariate case，the lower Fréchet bound is dominated，and the upper orthant hazard order and the lower orthant quasi hazard order imply the right tail increasing order and the left tail decreasing order，respectively.

Key words：upper orthant hazard order；lower orthant quasi hazard order；right tail increasing；left tail decreasing