文章编号: 1000-8608(2009)06-0990-05

整数规划的凝聚函数法

张丽丽[1], 李建宇[2], 李兴斯[*3]

(1.大连理工大学 数学科学学院,辽宁 大连 116024;
2.天津科技大学 机械工程学院,天津 300222;
3.大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室,辽宁 大连 116024)

摘要: 传统的代理约束方法虽可加速分支定界法或割平面法的求解速度,但往往会扩大原问题的可行域,不能保证得到原问题的最优解.考虑到代理约束乘子的取值特点,利用极大熵原理对传统代理约束方法进行了改进,给出求解整数规划问题的凝聚函数法,并研究了其理论可行性.当参数取适当大时,该方法得到的问题与原问题完全等价,从而可以通过该方法得到原问题的最优解,且无需对偶计算.算例结果阐释了凝聚函数法的有效性和可行性.

关键词: 整数规划;代理约束;极大熵原理;凝聚函数

中图分类号: O221 **文献标志码:** A

0 引 言

整数规划作为一类特殊的规划问题,因其应用的广泛性而日益引起研究者的重视[1~4].现实生活中的很多问题都可化为整数规划问题,如着色问题[1,2]、背包问题[3]、最大割问题[4]等.该类问题因其变量的非连续性,求解存在很大难度.

用以求解整数规划问题的传统方法包括隐枚举法、分支定界法、割平面法等,但这些方法较为繁琐且计算量大.Glover[5]于1965年提出一种所谓代理约束方法,用以求解0-1整数规划问题.虽然代理约束方法仅限于目标函数及约束为线性的情况,但较之传统方法,其具有明显的方便快捷的优点,且可以加速分支定界法等算法的计算速度.随后该方法被应用于求解一般整数规划问题[6~9].但此方法类似于传统的拉格朗日方法,亦是一种构建对偶的技术,因此需要同时在原空间与对偶空间进行交叉迭代,计算量也比较大.一般情况下,该方法往往会扩大原问题的可行域,并不能保证得到原问题的最优解.

若要成功地应用代理约束方法,即得到原问题的最优解,对应对偶间隙为0,一个充要条件便是保证代理约束法得到的最优解为原问题的可行点,也就是保证代理约束方法不会扩大原问题的可行域.对此,结合代理乘子的取值特点,本文利用极大熵原理给出解整数规划问题的凝聚函数法,以得到原整数规划问题的最优解.

1 代理约束方法

考虑整数规划问题

$$(\mathrm{P})\quad \begin{aligned} &\min\ f(\boldsymbol{x})\\ &\text{s.t.}\ g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0;\ i=1,2,\cdots,m\\ &\qquad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}\end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 为向量集合;$f:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}$;$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=(g_1(\boldsymbol{x})\quad g_2(\boldsymbol{x})\quad\cdots\quad g_m(\boldsymbol{x})):\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^m$.

Glover 给出的代理约束问题定义为

$$(\mathrm{SP})\quad \begin{aligned} &\min\ f(\boldsymbol{x})\\ &\text{s.t.}\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\leqslant\boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{u}=(u_1\quad u_2\quad\cdots\quad u_m)^{\mathrm{T}}$ 为代理乘子,且满足

收稿日期: 2007-09-23; **修回日期:** 2009-03-10.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572031,60675046).
作者简介: 张丽丽(1982-),女,博士生;李兴斯*(1942-),男,教授,博士生导师.

$u \in \boldsymbol{\Lambda} = \left\{u \geqslant \mathbf{0} : \sum_{i=1}^{m} u_i = 1\right\}$. 代理对偶问题为

$$\text{(SD)} \quad \max_{u \in \boldsymbol{\Lambda}} s(\boldsymbol{u}) := \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leqslant \mathbf{0}, x_j \text{ 为整数}; j = 1,2,\cdots,n\} \tag{3}$$

显然，若 $\boldsymbol{x}$ 满足原问题(P) 的约束一定满足代理约束问题(SP) 的约束，而满足代理约束问题(SP) 的约束通常却不满足原问题(P) 的约束，即扩大了原问题(P) 的可行域. 令 $\boldsymbol{x}^*$ 及 $\boldsymbol{x}_s^*$ 分别表示问题(P) 及问题(SP) 的最优解，则对于任意的 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\Lambda}$，均有 $f(\boldsymbol{x}_s^*) \leqslant f(\boldsymbol{x}^*)$. 倘若 $\boldsymbol{x}_s^*$ 为原问题(P) 的可行点，则 $\boldsymbol{x}_s^*$ 亦为原问题(P) 的最优解；若 $\boldsymbol{x}_s^*$ 不可行，此时便出现代理对偶间隙. Glover[9] 是通过解代理对偶问题(SD) 来调整代理乘子取值的，由于这种方法需要在原空间和对偶空间交叉迭代，求解连续优化问题计算量非常大，因此求解整数规划问题计算量更大.

2　求解整数规划的凝聚函数法

易见，问题(P) 等价于

$$\begin{aligned} \text{(MP)} \quad & \min f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{s.t.} \ \gamma(\boldsymbol{x}) \leqslant 0 \\ & \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\gamma(\boldsymbol{x}) := \max_{1 \leqslant i \leqslant m}\{g_i(\boldsymbol{x})\}$ 为极大值函数.

将代理约束问题(SP) 与问题(MP) 进行比较可以发现，对于任意 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\Lambda}$，它们的约束函数之间均存在下述不等式关系：

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leqslant \gamma(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

因此，代理约束法的乘子调整应使 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 逼近 $\gamma(\boldsymbol{x})$，即应解如下的极大化问题(对偶问题)：

$$\max_{u \in \boldsymbol{\Lambda}} g_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

上述问题的目标函数是关于变量 $\boldsymbol{u}$ 的线性函数，其最优解总是出现在单纯形 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的顶点上，即对应约束取最大值的那个代理乘子取 1 而其余的代理乘子皆为 0. 而且，随着迭代进行，这个问题的最优点将从一个极点跳到另一个极点. 代理约束问题会扩大原问题可行域的原因是代理乘子取值不合理. 为解决这个问题，应用极大熵原理. 代理乘子位于单纯形 $\boldsymbol{\Lambda}$ 内，在未知其他信息的前提下，要求代理乘子满足熵函数值极大，即

$$\max_{u \in \boldsymbol{\Lambda}} H(\boldsymbol{u}) = -\sum_{i=1}^{m} u_i \ln u_i \tag{7}$$

使用一个加权系数 p 把目标函数式(6) 与(7) 合成一个，即解如下的“复合”极大化问题：

$$\max_{u \in \boldsymbol{\Lambda}} g_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = g_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \frac{1}{p} H(\boldsymbol{u}) \tag{8}$$

其最优解唯一，为

$$u_i = \frac{\exp(p g_i(\boldsymbol{x}))}{\sum_{k=1}^{m} \exp(p g_k(\boldsymbol{x}))}; \ i = 1,2,\cdots,m \tag{9}$$

将式(9) 代回到复合目标函数中消去代理乘子 $\boldsymbol{u}$，即可得到

$$g_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) = \frac{1}{p} \ln\left(\sum_{i=1}^{m} \exp(p g_i(\boldsymbol{x}))\right) \tag{10}$$

从而将问题(P) 转化为问题

$$\begin{aligned} (\mathrm{EP}(p)) \quad & \min f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{s.t.} \ g_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) = \frac{1}{p} \times \\ & \qquad \ln\left(\sum_{i=1}^{m} \exp(p g_i(\boldsymbol{x}))\right) \leqslant 0 \\ & \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \end{aligned} \tag{11}$$

式(10) 即文献[10] 用以求解极大极小问题的凝聚函数，此函数可很好地解决极大极小问题的不可微性. 下面研究应用凝聚函数求解整数规划问题的理论可行性.

3　理论结果

Greenberg 等[8] 在研究代理对偶问题的性质时指出了寻找代理对偶问题最优解的可行方向，“在寻找代理对偶问题的最优解时，不能减小不可行不等式对应的代理乘子，同时不能增大可行不等式对应的代理乘子”. 由式(9) 给出的代理乘子，对于乘子 u_k、u_l 有 $u_k / u_l = \exp(p(g_k - g_l))$，显然有 $g_k > g_l \Leftrightarrow u_k > u_l$，即约束函数值越大则对应的代理乘子越大，这就从理论上杜绝了传统代理约束方法扩大原问题可行域的可能性.

令 $\boldsymbol{F}(\cdot)$ 表示优化问题$(\cdot)$ 的可行域，$v(\cdot)$ 表示优化问题$(\cdot)$ 的最优值. $I = \{i \mid g_i(\boldsymbol{x}) = 0\}$，$L_i = \min_{x \in \boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{F}}\{g_i(\boldsymbol{x})\}$，$L = \min_i\{L_i\}$，$G_i = \max_{x \in \boldsymbol{F}}\{g_i(\boldsymbol{x}) \mid i \notin$

$I\}$，$G=\max\limits_{i}\{G_i\}$，$\lceil a \rceil$表示不小于数a的最小整数，$|I|$表示集合I包含的元素个数，显然有$L>0$.

定理1　对于$p<q<\infty$，有$\boldsymbol{F}(\mathrm{EP}(p))\subseteq\boldsymbol{F}(\mathrm{EP}(q))$.

证明　对于$p<q$，若$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{S}(\mathrm{EP}(p))$，则由凝聚函数的单调性[11]有

$$\frac{1}{q}\ln\Big(\sum_{i=1}^{m}\exp(qg_i(\boldsymbol{x}))\Big)\leqslant \frac{1}{p}\ln\Big(\sum_{i=1}^{m}\exp(pg_i(\boldsymbol{x}))\Big)\leqslant 0$$

即$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{F}(\mathrm{EP}(q))$，从而$\boldsymbol{F}(\mathrm{EP}(p))\subseteq\boldsymbol{F}(\mathrm{EP}(q))$.　□

定理2　对于问题(EP(p))，及数$L>0$(如上定义)，若$p\geqslant p_0=\lceil \ln m/L\rceil$，则有$\boldsymbol{F}(\mathrm{EP}(p))=\boldsymbol{F}(\mathrm{P})$.

证明　首先证明$\boldsymbol{F}(\mathrm{EP}(p))\subseteq\boldsymbol{F}(\mathrm{P})$，由定理1可知，对于所有的$p\geqslant p_0$，有$\boldsymbol{F}(\mathrm{EP}(p_0))\subseteq\boldsymbol{F}(\mathrm{EP}(p))$. 由文献[11]可知对凝聚函数有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{g_i(\boldsymbol{x})\}\leqslant\frac{1}{p}\ln\Big(\sum_{i=1}^{m}\exp(pg_i(\hat{\boldsymbol{x}}))\Big)\leqslant \frac{1}{p}\ln m+\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{g_i(\hat{\boldsymbol{x}})\}$$

假设$\hat{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{F}(\mathrm{EP}(p))$，自然有$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{g_i(\boldsymbol{x})\}\leqslant\frac{1}{p}\ln\Big(\sum_{i=1}^{m}\exp(pg_i(\hat{\boldsymbol{x}}))\Big)\leqslant 0$，即$\hat{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{F}(\mathrm{P})$，从而有$\boldsymbol{F}(\mathrm{EP}(p))\subseteq\boldsymbol{F}(\mathrm{P})$.

下证$\boldsymbol{F}(\mathrm{P})\subseteq\boldsymbol{F}(\mathrm{EP}(p))$.

若$\hat{\boldsymbol{x}}\notin\boldsymbol{F}(\mathrm{EP}(p))$，则显然有$\frac{1}{p}\ln\Big(\sum_{i=1}^{m}\exp(pg_i(\hat{\boldsymbol{x}}))\Big)\geqslant\frac{1}{p}\ln(\exp(pL))=L$，下证此时必有$\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}})=(g_1(\hat{\boldsymbol{x}})\ \ g_2(\hat{\boldsymbol{x}})\ \cdots\ g_m(\hat{\boldsymbol{x}}))>\boldsymbol{0}$.

利用反证法，假设此时有$\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}})=(g_1(\hat{\boldsymbol{x}})\ \ g_2(\hat{\boldsymbol{x}})\ \cdots\ g_m(\hat{\boldsymbol{x}}))<\boldsymbol{0}$，且$\frac{1}{p}\ln\Big(\sum_{i=1}^{m}\exp(pg_i(\hat{\boldsymbol{x}}))\Big)\geqslant L$. 由假设条件，所有的可行点都位于可行域内部，$\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}})=(g_1(\hat{\boldsymbol{x}})\ \ g_2(\hat{\boldsymbol{x}})\ \cdots\ g_m(\hat{\boldsymbol{x}}))\neq\boldsymbol{0}$. 若保持$\frac{1}{p}\ln\Big(\sum_{i=1}^{m}\exp(pg_i(\hat{\boldsymbol{x}}))\Big)\geqslant L$，必有$\frac{1}{p}\ln(m\exp(pG))\geqslant\frac{1}{p}\ln\Big(\sum_{i=1}^{m}\exp(pg_i(\hat{\boldsymbol{x}}))\Big)\geqslant L$，从而$\exp(pG)\geqslant\exp(pL)/m$. 由$G$的定义知$G<0$，从而对于$p>0$有$\exp(pG)<1$，而$p\geqslant\lceil\ln m/L\rceil$有$\exp(pL)/m\geqslant 1$，矛盾.

所以只要$p\geqslant\lceil\ln m/L\rceil$，必有$\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}})=(g_1(\hat{\boldsymbol{x}})\ \ g_2(\hat{\boldsymbol{x}})\ \cdots\ g_m(\hat{\boldsymbol{x}}))>\boldsymbol{0}$，即$\hat{\boldsymbol{x}}\notin\boldsymbol{F}(\mathrm{P})$，从而$\boldsymbol{F}(\mathrm{P})\subseteq\boldsymbol{F}(\mathrm{EP}(p))$.

综上可知，若$p\geqslant p_0=\lceil\ln m/L\rceil$，则有$\boldsymbol{F}(\mathrm{EP}(p))=\boldsymbol{F}(\mathrm{P})$.　□

定理3　对于问题(P)与问题(EP(p))，及数$L>0$(如前定义)，若$p\geqslant p_0=\lceil\ln m/L\rceil$，则有$v(\mathrm{EP}(p))=v(\mathrm{P})$.

证明　比较问题(P)与问题(EP(p))可见，两者的差别仅在于可行域，而由定理2可知，问题(P)与问题(EP(p))在$p\geqslant p_0=\lceil\ln m/L\rceil$时完全等价，从而有$v(\mathrm{EP}(p))=v(\mathrm{P})$.　□

虽然理论表明参数p需取足够大，问题(EP(p))与问题(P)才完全等价，但实际应用中并无需参数取太大值. 进一步地，对于整系数整数规划问题，可以确定地给出参数p的阈值.

推论1　对于问题(P)，假设所有约束函数均为整数值函数——如各系数为整数的多项式函数，若$p\geqslant p_0=\lceil\ln m\rceil$，则有$v(\mathrm{EP}(p))=v(\mathrm{P})$.

证明　注意到此时有$L_i=\min\limits_{x\in\boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{F}}\{g_i(\boldsymbol{x})\}\geqslant 1$，从而有$\ln m\geqslant\ln m/L$，由定理3可知$p>p_0=\lceil\ln m\rceil$时，必有$v(\mathrm{EP}(p))=v(\mathrm{P})$.　□

例1[12]

$$\begin{aligned}
&\min\ f(\boldsymbol{x})=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2+1\\
&\text{s.t.}\ \ g_1(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2-16\leqslant 0\\
&\qquad g_2(\boldsymbol{x})=-x_1+2x_2-4\leqslant 0\\
&\qquad g_3(\boldsymbol{x})=2x_1-x_2-4\leqslant 0\\
&\qquad 0\leqslant x_1\leqslant 4\\
&\qquad 0\leqslant x_2\leqslant 4
\end{aligned}\tag{12}$$

应用凝聚函数后，随着参数p的增大，问题(EP(p))的可行域如图1所示. 由$\ln m=\ln 3=$

1.0986 可得，此时只要 $p \geqslant \lceil p_0 \rceil = \lceil 1.0986 \rceil = 2$ 即可，与图 1 所示的结果相同.

最后针对 Myers[13] 提出的一个测试问题进行计算，以阐释凝聚函数法的有效性和可行性.

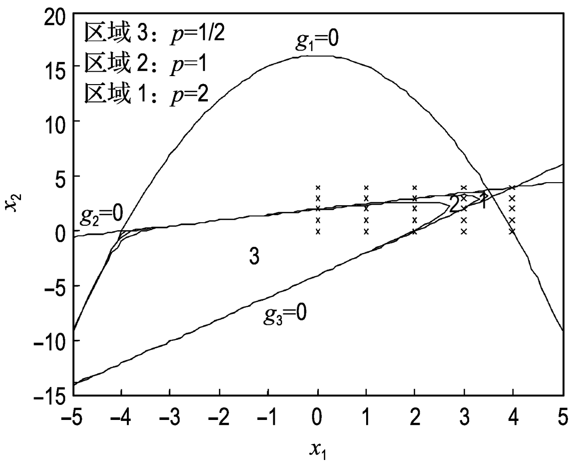

图 1　例 1 中凝聚函数法确定的可行域

Fig. 1　Feasible region of aggregate function method in Example 1

例 2　Myers 问题[13]

$$\begin{aligned}\min f(\boldsymbol{x}) = {} & 4.0\exp(x_1) + 5.0\exp(-0.4x_2) - \\ & 2.0x_3 + x_4^3 + 3.0x_4^2 + 0.1x_5^6 + x_6^2 - \\ & \ln(2.0x_7 + 1.0) - \ln(x_8 + 3.0) + \\ & x_9^2 - 4.0x_9 + x_{10}^3 + \sqrt{x_2 + 4.0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\ g_1(\boldsymbol{x}) = {} & 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 5x_5 - 3x_6 + x_7 + \\ & 2x_9 - 26.6 \leqslant 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_2(\boldsymbol{x}) = {} & 2x_2 + 5x_3 - 4x_5 + 2x_6 - 2x_9 - \\ & 2x_{10} + 6.6 \leqslant 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_3(\boldsymbol{x}) = {} & -7x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 6x_7 - \\ & x_9 - 2x_{10} + 57.7 \leqslant 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_4(\boldsymbol{x}) = {} & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 + \\ & x_6 - 4x_7 + 3x_8 + 3x_9 - 2x_{10} - \\ & 5.8 \leqslant 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_5(\boldsymbol{x}) = {} & -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + \\ & 2x_6 + x_8 - 6x_9 + 3x_{10} - 10.5 \leqslant 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_6(\boldsymbol{x}) = {} & -2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 - \\ & 2x_7 - 3x_9 + 4x_{10} + 7.5 \leqslant 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_7(\boldsymbol{x}) = {} & 2x_1 - 5x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 + \\ & x_7 + x_{10} - 20.5 \leqslant 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_8(\boldsymbol{x}) = {} & -5x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 + \\ & x_6 + 2x_7 - 3x_8 - 3x_{10} - 35.1 \leqslant 0\end{aligned}$$

$$x_i \in \mathbf{Z} \text{ 且 } x_i \geqslant 0;\ i = 1,2,\cdots,10$$

Myers 给出的最优解为 $\boldsymbol{x}^* = (2\ \ 3\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 5\ \ 5\ \ 1\ \ 4)$，最优值 $f^* = 94.33$. 利用凝聚函数法处理约束后，计算结果为 $\boldsymbol{x}^* = (0\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 7\ \ 3\ \ 3\ \ 3)$，$f^* = 26.2963$.

4　结　语

求解整数规划的凝聚函数法可看做是对传统代理约束方法的一种改进. 利用极大熵原理更合理地(自适应地)确定了最优代理乘子，可以避免扩大原问题的可行域，且在实际应用中并无须对偶计算. 算例结果亦阐释了该方法的有效性. 进一步的应用，包括该方法对大规模整数规划问题的应用及针对各类具体的整数规划子问题，结合其各自的结构特点进行求解等将在后续工作中给出.

参考文献：

[1] DORN R, HAO J K. A new genetic local search algorithm for graph coloring [C] // **Proceedings of the 5th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature**. London: Springer-Verlag, 1998: 745-754

[2] GALIIER P, HAO J K. Hybrid evolutionary algorithms for graph coloring [J]. **Journal of Combinatorial Optimization**, 1999, **3**(4): 379-397

[3] OSORIO M A, GLOVER F. Exploiting surrogate constraint analysis for fixing variables in both bounds for multidimensional Knapsack problems [C] // CH'AVEZ E, FAVELA J, MEJIA M, eds. **Proceedings of the Fourth Mexican International Conference on Computer Science**. New Jersey: IEEE Computer Society, 2003: 263-267

[4] JOHNSON D S, TRICK M A. **Cliques, Coloring, and Satisfiability: Second DIMACS Implementation Challenge** [M]. Washington D C: American

Mathematical Society, 1996

[5] GLOVER F. A mutiphase-dual algorithm for the zero-one integer programming problem [J]. **Operations Research**, 1965, **13**(6):879-919

[6] GLOVER F. Surrogate constraints [J]. **Operations Research**, 1968, **16**(4):741-749

[7] GLOVER F. Tutorial on surrogate constraint approaches for optimization in graphs [J]. **Journal of Heuristics**, 2003, **9**(3):175-227

[8] GREENBERG H J, PIERSKALLA W P. Surrogate mathematical programming [J]. **Operations Research**, 1970, **18**(5):924-939

[9] GLOVER F. Surrogate constraint duality in mathematical programming [J]. **Operations Research**, 1975, **23**(3):434-451

[10] LI X S. An entropy-based aggregate method for minimax optimization [J]. **Engineering Optimization**, 1992, **18**(4):277-285

[11] 李兴斯. 非线性极大极小问题的一个有效解法[J]. 科学通报, 1991, **36**(1):1448-1450

[12] GUIGNARD M, KIM S. Lagrangian decomposition: a model yielding stronger Lagrangian relaxation bounds [J]. **Mathematical Programming**, 1993, **33**:262-273

[13] MYERS D C. The design of branch and bound, Lagrangian relaxation and subgradient strategies for mixed integer programming problems[D]. Blacksburg:Virginia Polytechnic Institute and State University, 1984

An aggregate function method for integer programming

ZHANG Li-li[1], LI Jian-yu[2], LI Xing-si[*3]

(1. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. School of Mechanical Engineering, Tianjin University of Science and Technology, Tianjin 300222, China;
3. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The conventional surrogate constraint method, which can improve the efficiency of branch-and-bound or cutting plane algorithms, can not guarantee to find the optimal solution of the primal problem. A duality gap which is caused by the relaxation of the feasible region of the primal problem often exists. Combining the surrogate constraint method and the maximum entropy principle, an aggregate function method for integer programming is given, which can obtain an absolutely equivalent single constraint problem for the primal problem, and the theoretical feasibility of this method is also studied. Furthermore, this method is guaranteed to succeed in identifying an optimal solution of the primal problem without any actual dual search when parameters are set above the threshold value. The results of the example illustrate the validity and feasibility of the aggregate function method.

Key words: integer programming; surrogate constraint; maximum entropy principle; aggregate function