

偶应力/应变梯度弹塑性理论有限元实现

冀 宾, 陈万吉*, 王胜军

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 引入了偶应力弹塑性理论的增量形式, 并提出了一种新的应变梯度理论, 该理论引入了两个细观材料长度, 结构较为简便. 采用 RCT9+RT9 单元对软化材料的剪切带问题进行分析, 该单元无多余零能模式且满足 C^{0-1} 分片检验, 即同时满足 C^1 常曲率分片检验和 C^0 线性应力分片检验. 数值结果表明, 利用传统弹塑性理论分析剪切带问题会出现显著的网格依赖性现象, 而偶应力/应变梯度理论可以有效地避免这一问题, 使计算结果收敛. 此外, 剪切带宽度随细观材料长度的减小而变窄.

关键词: 偶应力; 应变梯度; C^{0-1} 分片检验; 剪切带

中图分类号: O344.3 **文献标志码:** A

0 引言

在微/纳米级的工程现象中, 普遍存在着尺度效应的问题. 一系列的微观试验^[1~5]表明尺度效应广泛地存在于微米级的工程问题中.

在解决尺度效应问题上, 传统的连续体力学遇到了困难. 应变梯度理论引入了细观材料长度, 因为细观材料长度与缺陷尺寸存在一定的关系, 可以解释尺度效应. 最近 20 年, 应变梯度理论得到了迅速的发展, 被广泛应用于预测微观试验及复合/晶体材料的尺度效应、剪切带分析、断裂力学等领域, 并有一些研究者将之应用到混凝土和岩石的变形分析上, 也获得了一定的成功. 目前的应变梯度理论主要有两大类: 一类是在本构方程中引入应变梯度以及与之功共轭的高阶应力. 该理论的前身是 1909 年 Cosserat 兄弟建立的偶应力理论^[6]. 20 世纪 60 年代, Toupin^[7]、Koiter^[8] 和 Mindlin^[9] 对之进行了引申, 本构方程中引入应变梯度, 不仅与微观曲率有关而且与法向应变梯度有关. 在此基础上, Fleck 等从几何必需位错和统计存储位错的角度出发, 发展了偶应力塑性理论^[10] 和应变梯度塑性理论^[11,12], 引入了高阶应力与高阶应变, 该理论便于有限元的理论实现, 并且可以解释一系列微观试验的尺度效应. Gao 等^[12,13] 基于 Nix 等^[14] 发展的位错模型, 提出了一

种基于位错机制的应变梯度塑性理论, 即 MSG 理论. 该理论通过一个多尺度、分层次的框架, 将宏观塑性理论和位错理论有机地联系起来. 由于 Fleck-Hutchinson 框架及 Gao-Huang 框架各自的优越性, 很多人在此基础上提出了改进的应变梯度理论, 例如 Shu 等^[15] 提出的应变梯度晶体塑性理论, Huang 等^[16] 提出的 CMSG 理论. 另一类应变梯度理论是在屈服函数中引入等效塑性应变的 Laplace 算子. 这类理论首先由 Aifantis^[17,18] 提出, 由于本构关系与平衡方程保持不变, 仅修改了屈服函数, 结构更为简单.

有限元法仍然是求解应变梯度理论的主要方法, 现在建立的不协调的单元函数都只考虑分别满足 C^0 连续条件和 C^1 连续条件, Ai-kah 等^[19] 提出了同时考虑 C^0 和 C^1 连续的 C^{0-1} 分片检验条件, 并构建了可通过 C^{0-1} 分片检验的 RCT9+RT9^[20] 单元. 本文提出一种新的应变梯度理论, 并利用偶应力/应变梯度理论分析剪切带问题.

1 偶应力及应变梯度理论

1.1 偶应力理论

偶应力理论在本构方程中引入旋转梯度, 是应变梯度理论的一种反对称的特殊情况. 按照热力学一致性条件, 推导偶应力理论增量形式^[21].

Cauchy 应力

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} + r_{ij} \quad (1)$$

其中 σ_{ij} 为 τ_{ij} 对称部分, r_{ij} 为 τ_{ij} 反对称部分.

几何方程

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\chi_{ji} = \omega_{i,j} = \frac{1}{2}e_{ist}u_{t,sj} \quad (3)$$

其中 χ_{ji} 为曲率张量分量, ω_i 为旋转矢量分量.

本构方程

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl}^e, \quad \dot{m}_{ij} = M_{ijkl}^e \dot{\chi}_{kl}^e \quad (4)$$

其中 m_{ij} 为偶应力分量; $M_{ijkl}^e = 2Gl^2\delta_{ik}\delta_{jl}$, l 为细观材料长度.

平衡方程

$$\tau_{ji,j} = 0; m_{ji,j} + e_{ist}\tau_{st} = 0 \quad (5)$$

虚功原理

$$\int_V (\sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij} + m_{ij}\delta\chi_{ij})dV = \int_S (t_i u_i + \omega_i q_i) dS \quad (6)$$

边界力

$$t_i = \tau_{ji}n_j; \quad q_i = m_{ji}n_j \quad (7)$$

流动法则

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p; \quad \dot{\chi}_{ij} = \dot{\chi}_{ij}^e + \dot{\chi}_{ij}^p \quad (8)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}; \quad \dot{\chi}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial m_{ij}} \quad (9)$$

其中 g 为塑性势函数. 对于关联塑性, $g = f$, f 为屈服函数.

塑性一致性条件

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial m_{ij}} \dot{m}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = 0 \quad (10)$$

由式(4)、(8) ~ (10) 得

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl} - D_{ijkl}^e \dot{\chi}_{kl} \quad (11)$$

$$\dot{m}_{ij} = M_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl} - M_{ijkl}^e \dot{\chi}_{kl} \quad (12)$$

式中

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^e - D_{ijkl}^p;$$

$$D_{ijkl}^e = \frac{1}{A} D_{ijst}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_s} \frac{\partial f}{\partial m_{mn}} M_{mnkl}^e$$

$$M_{ijkl}^{ep} = M_{ijkl}^e - M_{ijkl}^p$$

$$M_{ijkl}^e = \frac{1}{A} M_{ijst}^e \frac{\partial g}{\partial m_s} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnkl}^e$$

其中

$$D_{ijkl}^p = \frac{1}{A} D_{ijst}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_s} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnkl}^e$$

$$M_{ijkl}^p = \frac{1}{A} M_{ijst}^e \frac{\partial g}{\partial m_s} \frac{\partial f}{\partial m_{mn}} M_{mnkl}^e$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial f}{\partial m_{ij}} M_{ijkl}^e \frac{\partial g}{\partial m_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial \lambda}$$

1.2 应变梯度理论

在偶应力基础上进一步考虑正应变的变化率, 本构方程直接引入应变梯度项, 建立一种应变梯度理论, 包含两个细观材料长度, 分别作用在高阶应变的体积项和剪切项.

几何方程

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (13)$$

$$\eta_{kij} = \epsilon_{ij,k} \quad (14)$$

将应变 ϵ_{ij} 和高阶应变 η_{kij} 分解为偏量和静水部分:

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\epsilon_{kk}; \quad \eta_{kij} = \eta'_{kij} + \eta^h_{kij} \quad (15)$$

$$\eta'_{kij} = \eta_{kij} - \eta^h_{kij}; \quad \eta^h_{kij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\eta_{kpp} \quad (16)$$

其中 η'_{kij} 和 η^h_{kij} 分别为 η_{kij} 的偏量部分和静水部分.

本构方程

$$\dot{\tau}_{ij} = D_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl}^e - Kl_1^2 \delta_{ij} \nabla^2 \dot{\epsilon}_{mm}^e - 2Gl_2^2 \nabla^2 \dot{\epsilon}_{ij}^e \quad (17)$$

其中 τ_{ij} 为 Cauchy 应力; l_1 和 l_2 均为细观材料长度, 分别作用于高阶应变的体积项和剪切项. 定义 σ_{ij} 、 m_{kij} 分别为低阶应力和高阶应力, 它们的表达式为

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl}^e \quad (18)$$

$$\dot{m}_{kij} = 3Kl_1^2 (\dot{\eta}_{kij}^e)^e + 2Gl_2^2 (\dot{\eta}_{kij}^e)^e \quad (19)$$

则有

$$\dot{\tau}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{m}_{kij,k} \quad (20)$$

平衡方程

$$\tau_{ij,j} = 0 \text{ 或 } (\sigma_{ij} - m_{kij,k})_{,j} = 0 \quad (21)$$

虚功原理

$$\int_V (\sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij} + m_{kij}\delta\eta_{kij})dV = \int_{S_\sigma} (t_i \delta u_i + \mu_i n_k \delta u_{i,k})dS \quad (22)$$

边界力

$$t_i = \sigma_{ij}n_j - n_j n_k n_l m_{kij,l} - (n_j D_k + n_k D_j) m_{kij} + (n_j n_k D_l n_l - D_j n_k) m_{kij};$$

$$\mu_i = m_{kij} n_j n_k \quad (23)$$

其中 $D_k = (\delta_{kl} - n_k n_l) \frac{\partial}{\partial x_l}$.

流动法则

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p; \quad \dot{\eta}_{kij} = \dot{\eta}_{kij}^e + \dot{\eta}_{kij}^p \quad (24)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}; \quad \dot{\eta}_{kij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial m_{kij}} \quad (25)$$

塑性一致性条件

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial m_{kij}} \dot{m}_{kij} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = 0 \quad (26)$$

由式(18)、(19)、(24) ~ (26) 得

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijmn}^{\text{ep}} \dot{\epsilon}_{mn} - D_{kijmn}^c \dot{\eta}_{kmn} \quad (27)$$

$$\dot{m}_{kij} = M_{kljmn}^{\text{ep}} \dot{\eta}_{lmn} - M_{kijmn}^c \dot{\epsilon}_{mn} \quad (28)$$

式中

$$D_{ijmn}^{\text{ep}} = D_{ijmn}^e - D_{ijmn}^p$$

$$D_{kijmn}^c = \frac{1}{A} D_{ijst}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_{st}} \frac{\partial f}{\partial m_{kpq}} M_{pqmn}^e$$

$$M_{kljmn}^{\text{ep}} = M_{ijmn}^e \delta_{kl} - M_{kljmn}^p$$

$$M_{kijmn}^c = \frac{1}{A} M_{ijst}^e \frac{\partial g}{\partial m_{kst}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} D_{pqmn}^e$$

其中

$$D_{ijmn}^p = \frac{1}{A} D_{ijst}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_{st}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} D_{pqmn}^e$$

$$M_{ijmn}^e = Kl_1^2 \delta_{ij} \delta_{mn} - \frac{2G}{3} l_2^2 \delta_{ij} \delta_{mn} +$$

$$Gl_2^2 (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm})$$

$$M_{kljmn}^p = \frac{1}{A} M_{ijst}^e \frac{\partial g}{\partial m_{kst}} \frac{\partial f}{\partial m_{lpq}} M_{pqmn}^e$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijmn}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial m_{kij}} M_{ijmn}^e \frac{\partial g}{\partial m_{kmn}} - \frac{\partial f}{\partial \lambda}$$

应当注意, l_1 作用在体积项, 与传统弹塑性一样, 体积项保持弹性. 因此进入塑性后仅 l_2 起作用.

2 剪切带分析

考虑平面应变受压缩例题, 试件长 $h = 120$ mm, 宽 $w = 60$ mm. 剪切模量 $G = 4\,000$ MPa, 泊松比 $\nu = 0.499$ (近不可压缩). 试件符合 von Mises 屈服准则, 整体软化模量 $H = -400$ MPa. 初始屈服强度 $\sigma_y = 100$ MPa. 材料的应力-应变曲线见图 1. 左下角 $10\text{ mm} \times 10\text{ mm}$ 缺陷区域, 初始屈服强度 $\sigma_y = 90$ MPa. 值得一提的是, 左下角缺陷仅为触发剪切带产生, 对计算结果影响可以忽略不计. 网格划分见图 2.

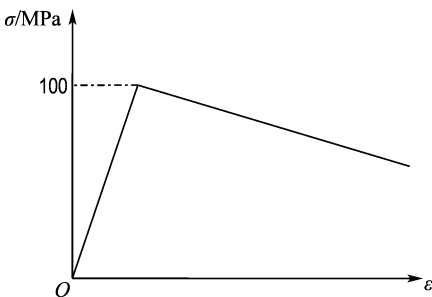


图 1 材料的应力-应变曲线

Fig. 1 The stress-strain curve of material

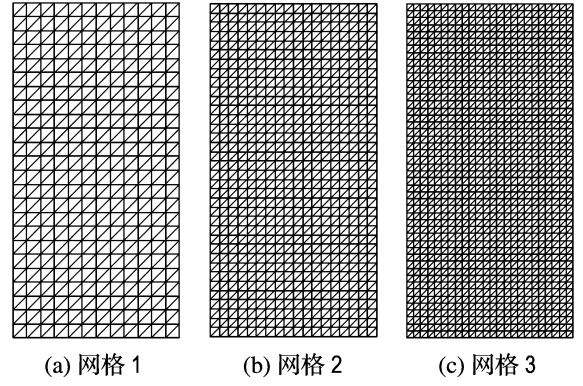


图 2 剪切带计算网格划分

Fig. 2 Finite element meshes in shear band problem

用有限元软件 ABAQUS 的 UEL 子程序自定义 RCT9+RT9 单元, 将偶应力理论及应变梯度理论的本构关系加入其中, 对剪切带进行分析. 首先考虑顶部施加位移与节点结构反力曲线关系. P 为单位厚度结构反力, v_{top} 为顶部施加位移. 计算位移与反力曲线见图 3~5.

计算所得的等效塑性应变等值线如图 6~9 所示.

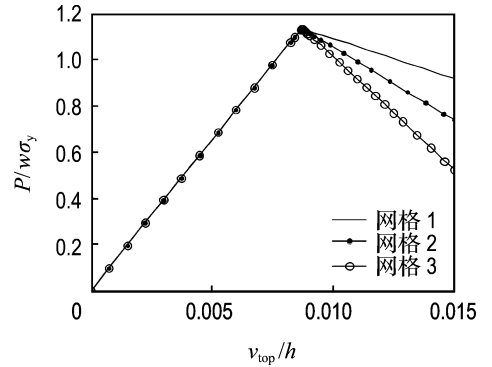


图 3 传统弹塑性理论的位移-反力曲线

Fig. 3 Displacement-reaction diagrams of classical elasto-plasticity theory

从图 3 和 6 中可以看出, 采用传统弹塑性理论计算剪切带, 不同的网格得到的位移-反力曲线不一致, 网格越密, 材料的软化行为越明显, 计算得到的剪切带宽度越窄. 这说明: 传统弹塑性计算结果依赖于网格.

利用偶应力/应变梯度弹塑性理论进行计算, 由图 4、5 可以发现, 计算结果能够很好地收敛. 偶应力理论中的细观材料长度 l 与应变梯度理论中的 l_1 、 l_2 对结果的影响不一样. 对于应变梯度理论, 由于剪切带的形成和体积应变无关, l_1 对结果的影响可以忽略. 由图 7~9 可见, 对于相同的细

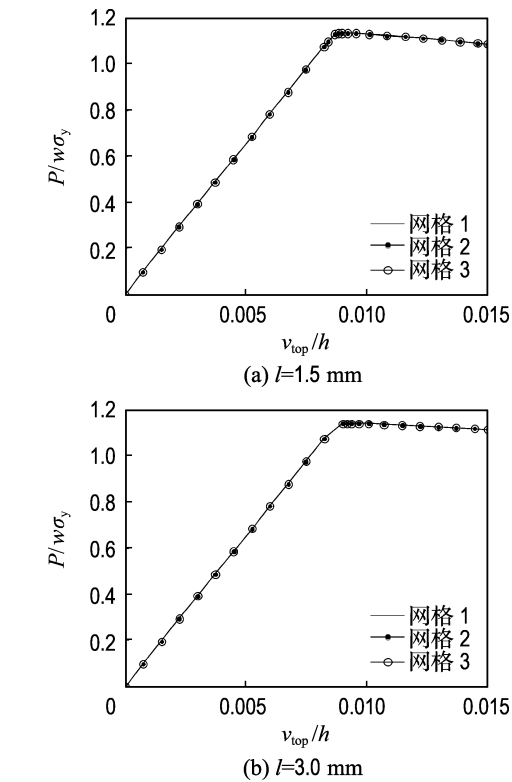


图 4 偶应力弹塑性理论的位移-反力曲线
Fig. 4 Displacement-reaction diagrams of couple stress elasto-plasticity theory

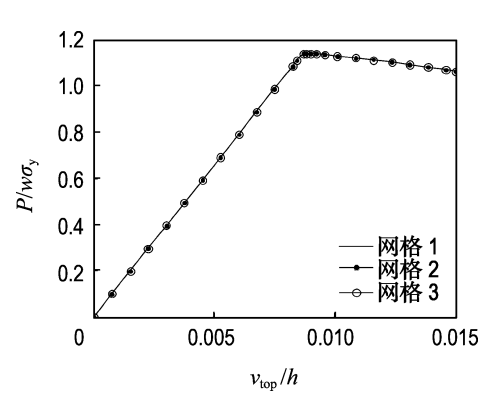


图 5 应变梯度弹塑性理论的位移-反力曲线 ($l_1=0, l_2=3$ mm)
Fig. 5 Displacement-reaction diagrams of strain gradient elasto-plasticity theory ($l_1=0, l_2=3$ mm)

观材料长度,计算所得的剪切带宽度偶应力较应变梯度理论略小;对于相同的理论,剪切带宽度随细观材料长度变小而变窄.这符合以往文献中对剪切带例题分析的结果.

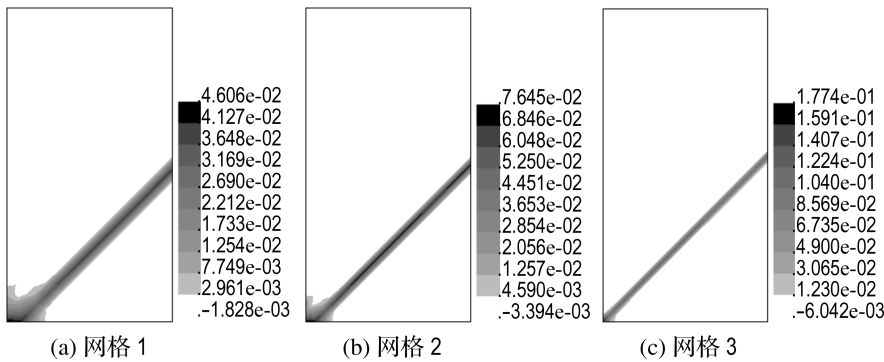


图 6 传统弹塑性理论的等效塑性应变等值线
Fig. 6 Equivalent plastic strain of classical elasto-plasticity theory

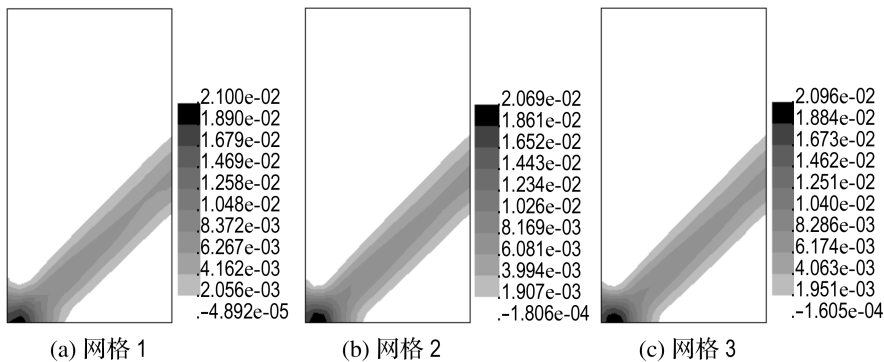


图 7 偶应力弹塑性理论的等效塑性应变等值线 ($l=1.5$ mm)
Fig. 7 Equivalent plastic strain of couple stress elasto-plasticity theory ($l=1.5$ mm)

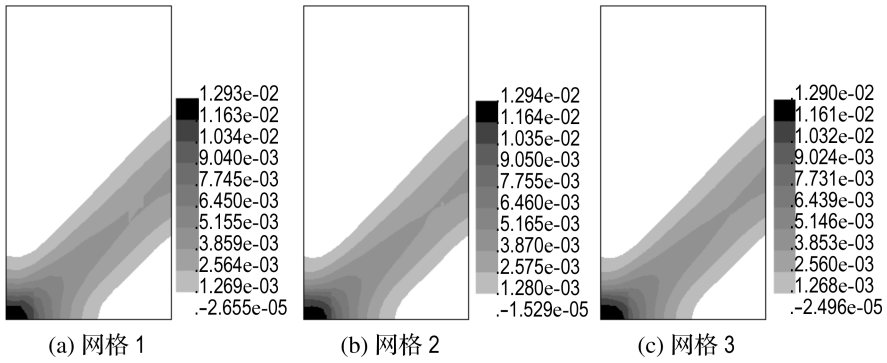


图 8 偶应力弹塑性理论的等效塑性应变等值线($l=3.0\text{ mm}$)

Fig. 8 Equivalent plastic strain of couple stress elasto-plasticity theory ($l=3.0\text{ mm}$)

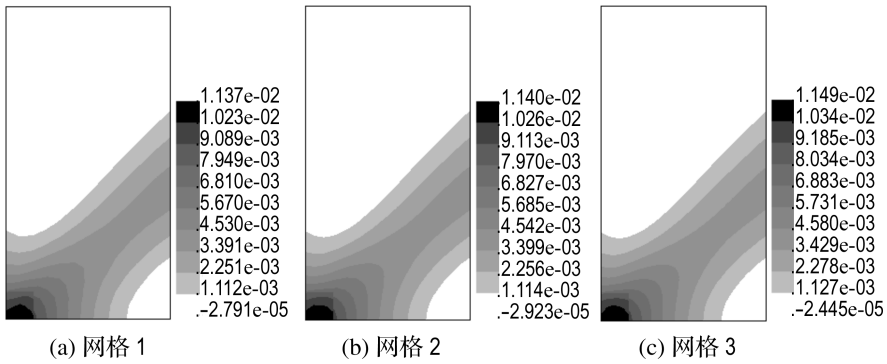


图 9 应变梯度弹塑性理论的等效塑性应变等值线($l_1=0, l_2=3\text{ mm}$)

Fig. 9 Equivalent plastic strain of strain gradient elasto-plasticity theory ($l_1=0, l_2=3\text{ mm}$)

本文对应变梯度理论采用 $l_1=3\text{ mm}, l_2=0$ 进行分析,发现计算结果不收敛,这再次证明了 l_1 在剪切带问题中不起作用,它无法避免网格依赖性问题.

3 结 论

(1)设计了一种新的应变梯度理论,含有两个细观材料长度,其中 l_1 作用在体积项,只对弹性变形起作用, l_2 作用在剪切项.

(2)采用 RCT9+RT9 单元对偶应力/应变梯度理论进行计算,该单元可确保通过 C^{0-1} 分片检验.

(3)对剪切带例题进行分析,结果收敛,且剪切带宽度随细观材料长度变小而变窄.而对于相同的细观材料长度,偶应力计算的剪切带宽度比应变梯度理论计算所得结果略小.

参考文献：

[1] LLOYD D J. Particle reinforced aluminum and magnesium matrix composites [J]. **International**

Materials Reviews, 1994, **39**(1):1-23

[2] FLECK N A, MULLER G M, ASHBY M F, *et al.* Strain gradient plasticity:theory and experiment [J]. **Acta Metallurgica et Materialia**, 1994, **42**(2):475-487

[3] STOLKEN J S, EVANS A G. A microbend test method for measuring the plasticity length scale [J]. **Acta Materialia**, 1998, **46**(14):5109-5115

[4] STELMASHENKO N A, WALLS M G, BROWN L M, *et al.* Microindentation on W and Mo oriented single crystals:an STM study [J]. **Acta Metallurgica et Materialia**, 1993, **41**(10):2855-2865

[5] MA Q, CLARKE D R. Size-dependent hardness of silver single-crystals [J]. **Journal of Materials Research**, 1995, **10**(4):853-863

[6] COSSERAT E, COSSERAT F. **Theorie des Corp Deformables** [M]. Paris:Herman, 1909

[7] TOUPIN R A. Elastic materials with couple stresses [J]. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, 1962, **11**(1):385-414

[8] KOITER W T. Couple stresses in the theory of elasticity, I and II [J]. **Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Seris B**,

- 1964, **67**(1):17-44
- [9] MINDLIN R D. Microstructure in linear elasticity [J]. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, 1964, **16**(1):51-78
- [10] FLECK N A, HUTCHINSON J W. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity [J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1993, **41**(12):1825-1857
- [11] FLECK N A, HUTCHINSON J W. Strain gradient plasticity [J]. **Advances in Applied Mechanics**, 1997, **33**:295-361
- [12] GAO H, HUANG Y, NIX W D, *et al.* Mechanism-based strain gradient plasticity — I. Theory [J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1999, **47**(6):1239-1263
- [13] HUANG Y, GAO H, NIX W D, *et al.* Mechanism-based strain gradient plasticity — II. Analysis [J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 2000, **48**(1):99-128
- [14] NIX W D, GAO H J. Indentation size effects in crystalline materials: A law for strain gradient plasticity [J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1998, **46**(3):411-425
- [15] SHU J Y, FLECK N A. Strain gradient crystal plasticity: size-dependent deformation of bicrystals [J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1999, **47**(2):297-324
- [16] HUANG Y, QU S, HWANG K C, *et al.* A conventional theory of mechanism-based strain gradient plasticity [J]. **International Journal of Plasticity**, 2004, **20**(4-5):753-782
- [17] AIFANTIS E C. On the microstructural origin of certain inelastic models [J]. **ASME Journal of Engineering Materials and Technology**, 1984, **106**(4):326-330
- [18] AIFANTIS E C. The physics of plastic deformation [J]. **International Journal of Plasticity**, 1987, **3**(3):211-247
- [19] AI-KAH S, CHEN W J. Finite element formulations of strain gradient theory for microstructures and the C^{0-1} patch test [J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2004, **61**(3):433-454
- [20] KR NER E. Dislocations and continuum mechanics [J]. **Applied Mechanics Reviews**, 1962, **15**(8):599-606
- [21] RISTINMAA M, VECCHI M. Use of couple-stress theory in elasto-plasticity [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1996, **136**(3-4):205-224

Finite element methods in couple stress/strain gradient elasto-plasticity theory

Jl Bin, CHEN Wan-ji*, WANG Sheng-jun

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The flow theory of couple stress gradient elasto-plasticity is derived and a new strain gradient theory is introduced, which includes only two length scales and has a simple structure. A RCT9 + RT9 plane triangular element is applied to shear band problem of softening materials. This element has no spurious zero energy modes and passes the C^{0-1} patch test, namely passing the C^1 constant curvature patch test and the C^0 linear stress patch test simultaneously. Numerical results show that pathological mesh dependence as obtained in traditional finite element computations with conventional continuum models is no longer encountered. The width of shear band grows more narrow with smaller length scales.

Key words: couple stress; strain gradient; C^{0-1} patch test; shear band