文章编号：1000-8608(2010)02-0283-08

四元数映射 $z \leftarrow z^2+c$ M 集多临界点问题研究

孙媛媛*， 王兴元

（大连理工大学 信息与通信工程学院，辽宁 大连 116024）

摘要： 研究了四元数映射 $z \leftarrow z^2+c$ 的 Mandelbrot 集（简称 M 集）在临界点不为 0 情况下的结构拓扑不变性和裂变演化规律；计算了 M 集的周期域边界，探讨了四元数 M 集周期轨道的拓扑规律. 通过在 M 集中参数 c 的选择构造了四元数 Julia 集，定性地分析了四元数 M 集与 Julia 集之间的对应关系. 实验结果表明，四元数 M 集临界点不唯一，其分形结构随不同临界点呈现出与以往 M 集不同的结构特点.

关键词： Mandelbrot 集；Julia 集；多临界点；四元数；分形

中图分类号： TP301.5 **文献标志码：** A

0 引 言

20 多年来，人们对复映射 $z \leftarrow z^2+c$ 所构造的 M-J 集已进行了深入研究[1~3]. 1982 年，Norton 发现 Julia 集不仅仅存在于复数平面，在以四元数为模型的四维空间中同样存在 Julia 集[4]. 对四元数 M-J 集的拓扑结构和内部特性的分析逐渐成为一个热点. Gomatam 等分析了映射 $F(Q)+C$ 和 $CF(Q)$ 下的四元数 M 集在高维空间的周期稳定性[5]；Buchanan 等计算并分析了 2 次、－1 次和－2 次四元数映射下 M 集稳定周期域的分布[6]；Shizuo 分析了四元数 M 集和 Julia 集的连通性以及四元数 Julia 集的拓扑结构[7]；Mitja 等从动力学角度分析了四元数 Julia 集[8]；程锦等从理论上分析和证明了指数为正整数的三元数映射的三维广义 M 集所具有的性质[9]；关柯等总结了四元数 Julia 集的某些特征[10]；于海等得到了四维 Bannach 空间与三维 Euclid 空间的对应关系[11]；Wang 等研究了四元数广义 M-J 集的拓扑结构[12]. 上述工作丰富了四元数分形理论，但是人们此前对四元数 M 集的构造多是从单一临界点 0 开始的. 本文将计算四元数映射 $z \leftarrow z^2+c$ 的 M 集的临界点集，并讨论临界点不同造成的四元数 M 集与一般 M 集的不同特性.

1 实验方法

1.1 四元数 M 集的临界点集

令四元数 $z = x_0 + x_1\mathrm{i} + x_2\mathrm{j} + x_3\mathrm{k}$，则 $f(z) = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + 2x_0x_1\mathrm{i} + 2x_0x_2\mathrm{j} + 2x_0x_3\mathrm{k} + c$，其 Jacobian 行列式可表示如下：

$$D(f) = \begin{vmatrix} 2x_0 & -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 \\ 2x_1 & 2x_0 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2x_0 & 0 \\ 2x_3 & 0 & 0 & 2x_0 \end{vmatrix} = 16x_0^2(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (1)$$

故四元数映射 $f: z \leftarrow z^2 + c$ 的临界点集是平面 $x_0 = 0$ 上的所有点.

1.2 逃逸时间算法与周期点查找结合法

对于四元数映射 $f: z \leftarrow z^2 + c$，取立体网格 $G(G \subset \mathbf{H})$ 内的点 c_0，利用逃逸时间算法判断 c_0 是否属于 M_f. 若 $c_0 \in M_f$，则判断 c_0 周期性，即求出 $|f^p(c_0) - c_0| < \varepsilon$（$\varepsilon$ 为误差范围，一般 ε 取 10^{-5}）成立的最小正整数 p，然后根据 p 值赋予 c_0 点相应的颜色；若 $c_0 \in \overline{M_f}$，则赋予 c_0 点为黑色. 重复上述过程，直到穷尽网格 G 内所有的点，即可获得 M 集.

1.3 对逃逸时间算法的一点改进

对于四元数映射 $f: z \leftarrow z^2 + c$，取立体网格

收稿日期： 2007-11-03； **修回日期：** 2009-09-20.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(60573172)；高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20070141014)；辽宁省自然科学基金资助项目(20082165).
作者简介： 孙媛媛*(1979-)，女，博士，讲师，E-mail：syuan@dlut.edu.cn；王兴元(1964-)，男，博士，教授，博士生导师.

$G(G\subset\mathbf{H})$ 内的点 c_0，利用逃逸时间算法进行迭代计算. 若迭代 m 次后，$|f^m(c_0)|<\delta(\delta$ 取 0.05，表示小的邻域半径)，则根据 m 的值对点进行相应着色. 如果始终未满足上述条件，判断 c_0 是否属于 M_f. 若 $c_0\in M_f$，则赋蓝色；若 $c_0\in\overline{M_f}$，则赋黑色. 重复上述过程，直到穷尽视窗 W 内所有的点，即可获得 M 集.

1.4 M 集上取点构造 J 集的周期轨道搜索比较法

(1) 在 M_f 上选取 p 周期点 c，令映射 $f:z\leftarrow z^2+c$ 从 $z_0=c$ 开始迭代，则 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a_k(k=1,2,\cdots,p)$，可认为 $a_k(k=1,2,\cdots,p)$ 是映射 $g(z)=f^p(z)$ 的不动点.

(2) 对立体网格 $G(G\subset\mathbf{H})$ 内的任意点 z，若 $\lim\limits_{n\to\infty}g^n(z)=a_k$，可根据 k 值赋予 z 点相应的颜色. 重复该过程，直到穷尽视窗 W 内所有的点，即可获得一种新的不同于逃逸时间算法构造的广义 J 集.

2 多临界点的四元数 M 集

2.1 四元数 M 集的性质

在构造不同临界点的 M 集之前，先给出如下定理.

定理 1 四元数映射 $f:z\leftarrow z^2+c$ 的 M 集，满足

$$f_{(0,q_1,q_2,q_3)}(c)=f_{(0,q,0,0)}(c)\tag{2}$$

其中 $q=\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}$，$f_{(0,q_1,q_2,q_3)}(c)$ 表示临界点为 $z_0(0,q_1,q_2,q_3)$ 的 M 集.

证明 因为 $f^{(1)}_{(0,q_1,q_2,q_3)}(c)=z_0^2+c=(0+q_1\mathrm{i}+q_2\mathrm{j}+q_3\mathrm{k})^2+c=c-(q_1^2+q_2^2+q_3^2)$，且 $f^{(1)}_{(0,q,0,0)}(c)=z_0'^2+c=(0+q\mathrm{i})^2+c=c-q^2=c-(q_1^2+q_2^2+q_3^2)$. 所以 $f_{(0,q_1,q_2,q_3)}(c)=f_{(0,q,0,0)}(c)$.

定理 2 四元数映射 $f:z\leftarrow z^2+c$ 的 M 集，满足

$$f_{(0,-q,0,0)}(c)=f_{(0,q,0,0)}(c)\tag{3}$$

定理 2 的证明与定理 1 相同，此处不再赘述. 这说明，从临界点 $z_0(0,q_1,q_2,q_3)$ 开始迭代构造的 M 集同构于临界点为 $z_0'(0,q,0,0)(q=\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2})$ 的 M 集，亦同构于临界点为 $z_0''(0,-q,0,0)$ 的 M 集. 这样在研究四元数 M 集的拓扑结构时，只要选择适当参数就可研究整个临界点集的 M 集了. 本文中，将临界点为 $z_0(0,q,0,0)$ 的 M 集映射记为 $f_{(q)}(c)$，文中所提的临界点值即指 q 值.

定理 3 四元数映射 $f:z\leftarrow z^2+c$ 的 M 集，有

$$f_{(q)}(c)=\overline{f_{(q)}(\bar c)}\tag{4}$$

证明 设 $c=|c|\mathrm{e}^{n\theta}$，则 $\bar c=|c|\mathrm{e}^{-n\theta}$. 因为

$$f^{(0)}_{(q)}(c)=z_0^2+c=|c|\mathrm{e}^{n\theta}-q^2$$

$$f^{(1)}_{(q)}(c)=(f^{(0)}_{(q)}(c))^2+|c|\mathrm{e}^{n\theta}=|c|^2\mathrm{e}^{2n\theta}+(1-2q^2)|c|\mathrm{e}^{n\theta}+q^4$$

而

$$f^{(0)}_{(q)}(\bar c)=z_0^2+\bar c=|c|\mathrm{e}^{-n\theta}-q^2$$

$$f^{(1)}_{(q)}(\bar c)=(f^{(0)}_{(q)}(\bar c))^2+|c|\mathrm{e}^{-n\theta}=|c|^2\mathrm{e}^{-2n\theta}+(1-2q^2)|c|\mathrm{e}^{-n\theta}+q^4$$

所以

$$f^{(1)}_{(q)}(c)=\overline{f^{(1)}_{(q)}(\bar c)}$$

假设 $f^{(k)}_{(q)}(c)=\overline{f^{(k)}_{(q)}(\bar c)}$ 成立，则有

$$f^{(k+1)}_{(q)}(c)=f^{(k)}_{(q)}[f^{(1)}_{(q)}(c)]=\overline{f^{(k)}_{(q)}[\overline{f^{(1)}_{(q)}(c)}]}=\overline{f^{(k)}_{(q)}[f^{(1)}_{(q)}(\bar c)]}=\overline{f^{(k+1)}_{(q)}(\bar c)}$$

命题真. 这解释了为什么不管从哪两个分维观察 M 集，实验得到的图形均是以实轴为对称的.

定理 4[7] 四元数映射 $f:z\leftarrow z^2+c$ 的动力学特征与映射 $p_{c_0+\mathrm{i}|c|}:s+\mathrm{i}t\leftarrow(s+\mathrm{i}t)^2+c_0+\mathrm{i}|\boldsymbol{c}|$ 的动力学特征一致.

定理 4 揭示了四元数 M 集和复平面 M 集的关系. 同时也说明研究四元数 M 集的动力学特征及拓扑结构，只要研究与之相对应的二维截面上的 M 集即可.

图 1 为 q 取不同值时，四元数 M 集在第三、第四分维均为 0 时得到的二维截面. 图中黑色区域为逃逸区，彩色区域通过不同的颜色(由于印刷原因，彩色无法显示)标示了不同周期的稳定区：黄色代表 1 周期，洋红色代表 2 周期，红色代表 3 周期，青色代表 4 周期，绿色代表 5 周期，蓝色代表 6 周期，灰色代表 7 周期，白色代表 8 周期…黄色区域为 M 集的主瓣，是 1 周期点的集合，主瓣与一系列圆盘形的小花瓣连接在一起，并且每个小花瓣又被一些细节更小的小花瓣所环绕，以至无穷，这体现了明显的分形特征. 图 1(a)所示四元数 M 集体现了与复平面 M 集相同的特征. 观

察图 1(b)～(h)，M 集在临界点值不为 0 时，不但体现了上述特征，还表现出差异性. 随着临界点值的不断增大，雏瓣和主瓣相继出现了缺失，甚至退化. 如图 1(b)和放大图(i)所示，$q=0.30$ 时，3 周期(红色区域)已经出现退化，而 2 周期(洋红色区域)的变化刚刚开始. 图 1(c)和(d)中 2 周期变化更明显. 在图 1(e)～(h)中，1 周期区域不断退化缩小，直至画不出分形图形. 根据大量的实验数据得到，稳定区的变化并不是随意进行的，它沿着实轴正向进行. 当在正向上变化到一定程度时，再从负向上开始. 并且每个花瓣的变化也不是同时发生的，而是从周期较大的花瓣向周期较小的花瓣不断地过渡，直到这种影响波及到最大的花瓣(1 周期点区域).

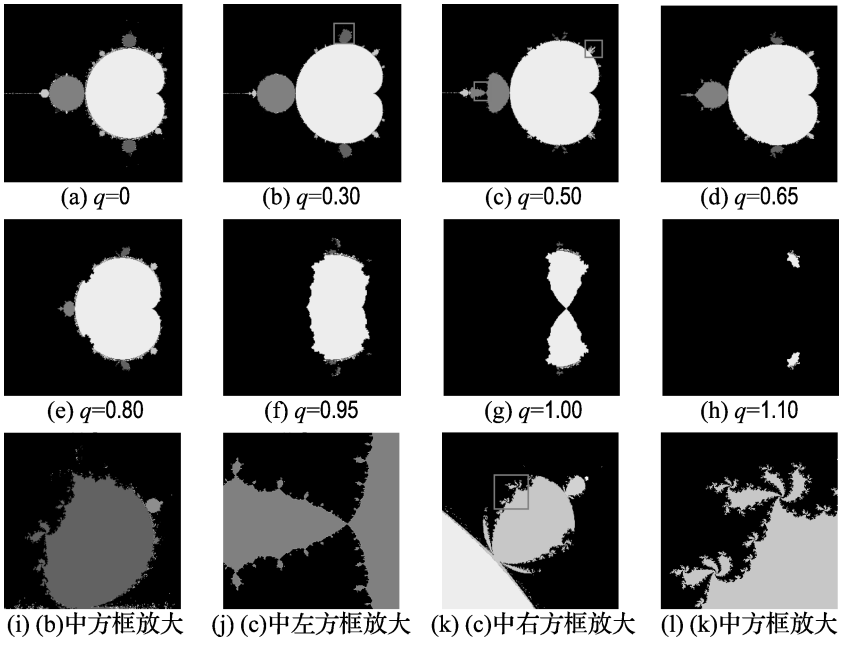


图 1　四元数 M 集 $f_{(q)}(c)$(第三、四分维均为 0)

Fig. 1　The quaternion M sets $f_{(q)}(c)$ (the third and fourth dimensions are 0)

2.2　四元数 M 集的稳定周期域

关于 M 集 $f_{(q)}(c)$ 的稳定周期域的边界，假设 $c=a+\mathrm{i}\sigma \cdot K$，$t=-q^2$，那么 1 周期轨道稳定区域的边界由下式给出：

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\cos\theta-\frac{1}{4}\cos 2\theta+t^2-t \\ K &= (\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta)n;\ 0\leqslant\theta<2\pi \end{aligned} \tag{5}$$

特别地，当 $t=0$ 时，1 周期稳定区的边界为

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\cos\theta-\frac{1}{4}\cos 2\theta \\ K &= (\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta)n;\ 0\leqslant\theta<2\pi \end{aligned} \tag{6}$$

这与复平面 M 集是一致的，如图 1(a)所示的黄色心形区域.

对于其他周期的稳定区的边界，符合下列定理的描述.

定理 5　映射 $f: z \leftarrow z^2+c$ 的 $p(p>1)$ 周期轨道为 $z_{(1)}, z_{(2)}, \cdots, z_{(p)}$ 的稳定区的边界由

$$\begin{cases} z_{(2)} = z_{(1)}^2+c \\ z_{(3)} = z_{(2)}^2+c \\ \vdots \\ z_{(p)} = z_{(p-1)}^2+c \\ \left|\prod\limits_{i=0}^{p-1} z_{(i)}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^p \end{cases} \tag{7}$$

确定.

证明　当 $p=2$ 时，$z_{(2)}=z_{(1)}^2+c=(z_{(0)}^2+c)^2+c$，根据 p 周期轨道的稳定区条件 $\left|\frac{\partial f^{(p)}(z)}{\partial z}\right|<1$，得到稳定区边界满足 $|z_1|\cdot|z_0|=\frac{1}{4}$. 假设当 $p=n$ 时，边界条件 $\left|\prod\limits_{i=0}^{n-1} z_{(i)}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 成立，则当 $p=n+1$ 时，$z_{(n+1)}=z_{(n)}^2+c$，$\left|\frac{\partial f^{(n+1)}(z)}{\partial z}\right|=2|z_n|\cdot\left|\frac{\partial f^{(n)}(z)}{\partial z}\right|=2|z_n|\times$

$2^n\left|\prod_{i=0}^{n-1}z_{(i)}\right|<1$，可推出$\left|\prod_{i=0}^{n}z_{(i)}\right|<\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，再由周期轨道的定义，可证定理 5 成立.

四元数 M 集 $f_{(q)}(c)$ 的 2 周期轨道的边界可由下式给出：

$$|(c+t)^2+c|<\frac{1}{4} \tag{8}$$

当临界点变化时，四元数 M 集的区域尽管出现了变化，但是不同周期的稳定区域范围并未变化. 变化只体现在区域内部，最为明显的是区域内部的缩小. 这说明，对于某点 $z(z\in\mathbf{H})$，若 $z\in f_{(q)}(c)$，则它的周期值是固定的，并不随着不同的临界点而发生改变. 这解释了为什么周期区域变化时，缩小部分的边界并未发现附着更大周期的雏瓣.

Douady 等的研究表明，对复平面 M 集的每个分支花瓣 L 均有明确的中心，其相反的吸引环是超稳定的，且最多可能有 2^{k-1} 个分支具有周期为 k 的吸引子[13]. 图 2 所示为采用改进的逃逸时间算法绘制的四元数 M 集，蓝色区域为稳定区，彩色区域标示了不同周期域中心点的位置，不同颜色代表的周期与图 1 相同. 图 2(j)～(l)分别是图 2(e)、(f)和(i)竖线标注处的二维虚轴截面. 从改进的算法可以看出，图 2 中彩色部分是不同周期的中心点及其邻域.

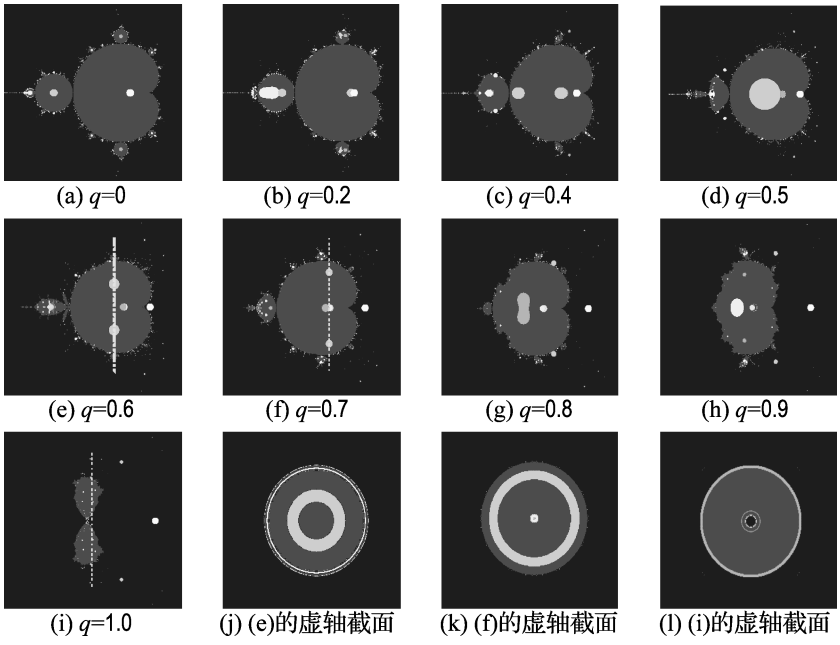


图 2 改进的逃逸时间算法绘制的四元数 M 集 $f_{(q)}(c)$

Fig. 2 The quaternion M sets $f_{(q)}(c)$ utilizing the improved escape time algorithm

下面计算四元数 M 集 $f_{(q)}(c)$1～3 周期的中心点.

(1) $k=1$

$c-q^2=0$，1 周期的中心在$(q^2,0,0,0)$. 从图 2 中可以看出，随着 q 的不断增大，1 周期的中心不断地右移.

(2) $k=2$

2 周期的中心由$(c-q^2)^2+c=0$ 给出，展开此式得到

$$c^2+(1-2q^2)c+q^4=0 \tag{9}$$

当 $q^2\leqslant\frac{1}{4}$ 时，式(9)有 2 个(或 1 个)实根，这说明此时 2 周期的中心点在实轴上(见图 2(a)～(d)). 当 $q^2>\frac{1}{4}$ 时，式(9)有一对共轭解，如图 2(e)～(i)所示，洋红色区域有 2 个. 但是对于四元数 M 集，并非只有 2 个中心，2 周期的中心应该分布在以$(q^2-\frac{1}{2},0)$为中心，半径为$\sqrt{q^2-\frac{1}{4}}$的圆上. 实验结果见两虚轴截面图 2(j)～(l).

(3) $k=3$

3 周期的中心由$((c-q^2)^2+c)^2+c=0$给出，展开此式得到

$$c^4+(2-4q^2)c^3+(1-4q^2+6q^4)c^2+(1+2q^4-4q^6)c+q^8=0 \tag{10}$$

当 $q=0$ 时，方程 3 个根为 $-1.754\ 9$ 和

$-0.122\,6 \pm 0.744\,9\mathrm{i}$(抛弃根 0). 第一个根的位置正好在实轴上 2 周期区域的左侧，后面两个根的位置在比 2 周期更靠近实轴的地方. 当 $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，式(10) 为 $c^4+\frac{1}{2}c^2+c+\frac{1}{16}=0$，该式有 4 个根，分别为两个实数解 $-0.064\,6$、$-0.804\,2$ 和一对共轭解 $0.434\,4 \pm 1.007\,1\mathrm{i}$. 当 $q=1$ 时，式(10) 为 $c^4-2c^3+3c^2-c+1=0$，该式有两对共轭解，分别为 $0.043\,3 \pm 0.641\,2\mathrm{i}$ 和 $0.956\,7 \pm 1.227\,2\mathrm{i}$. 上述计算说明，随着 q 的增大，3 周期的中心整体在不断沿实轴正向移动. 实验结果见图 2(a)～(i) 的红色区域.

2.3　四元数 M 集的分岔图

在过去的研究中，一维多次映射 $x \leftarrow p(x,u)$ 的混沌或者周期性行为的研究通常采用分岔图作为一种普遍的工具. 本文构造的分岔图研究的是四元数映射的实数坐标轴邻域部分，因为它具有较好的图形可视化优点. 实验结果表明，四元数映射在实数坐标轴上的投影具有相对于一维二次映射的混沌和周期性行为的图形显示.

从图 3 中可以看出不同的临界点值对四元数 M 集混沌或者周期性行为的影响. 图 3(a) 为临界点值为 0 时的分岔图，此时的图形与一维复数映射是一致的. 可以观察到图形具有周期倍分岔现象，这种周期变化先是 1 周期，然后 1 周期分岔变为 2 周期，2 周期再分岔变为 4 周期，逐渐进入到混沌状态. 在图 3(b)～(d)中也可以明显地看出这种特性. 但是同时也看到分岔图随着临界点值的变化而受到了影响. 主要表现为分岔图随着临界点值的增大而变窄，某些区域沿着实轴的正方向逐渐地消失. 这对应了在 2.1 节中发现的稳定周期域逐渐消失的现象，并且在实轴上消失的周期域是从较大周期域逐渐波及到较小周期域，这与 2.1 节的结论也是一致的. 如图 3(e)和(f)所示，当临界点值大于 0.70 时四元数 M 集上的混沌现象已经完全消失了. 这主要是因为当临界点值较大时，在实轴上已经无法找到周期为 2 以上的稳定域了. 另外，从分岔图中还可以看到，临界点值非 0 时周期岔变规律受到一些影响. 如图 3(g)和(h)所示，当 $q=0.40$ 时，从 2 周期岔变为 4 周期时产生了振荡.

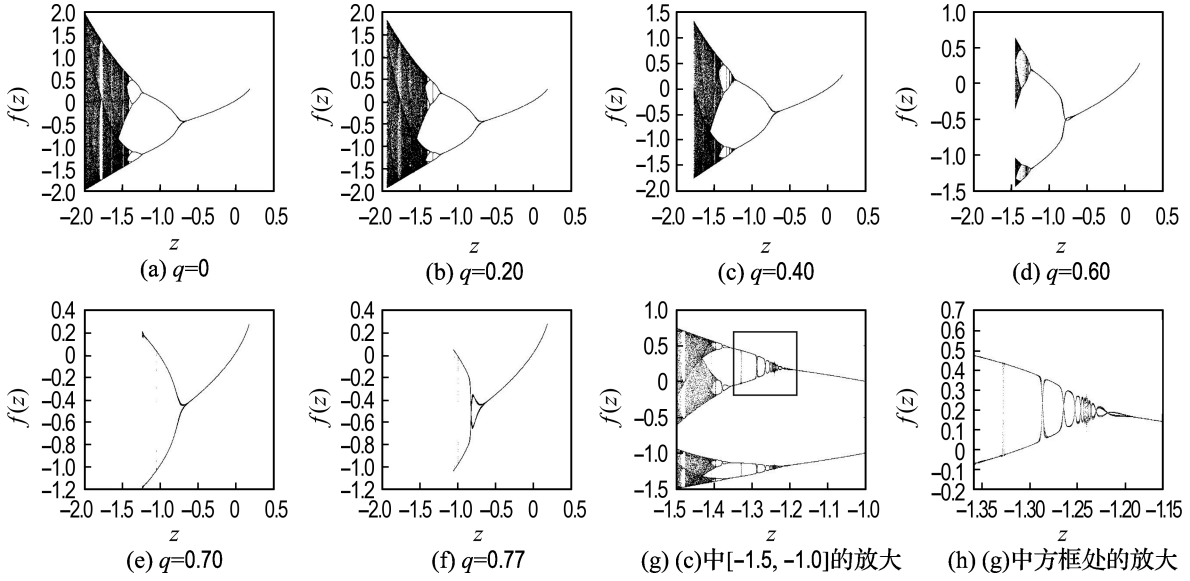


图 3　四元数 M 集的分岔图

Fig. 3　The bifurcation diagrams of the quaternion M sets

2.4　四元数 M 集的分形维数

分形是复杂系统，其复杂性可以用非整数维(即分维)描述. 分形维数的重要性在于它们能够用数据定义，并且能通过实验手段近似地计算. 常见的维数有豪斯道夫维数、盒维数、相似维数、信息维数、关联维数、填充维数、李雅普诺夫维数以及广义维数等. 在实际应用中，常用的是盒维数，它能够通过实验近似地计算，并且在一些比较“规则”的集上，这种维数的值与豪斯道夫维数是相等的.

定义 1　设集 A 是度量空间 $(\boldsymbol{R}^d,\rho_E)$ 上的有界子集，对每个 $\delta>0$，用 $N_\delta(A)$ 表示覆盖 A 的半

径为 δ 的闭球的最少个数，如果

$$\lim_{\delta\to\infty}\frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta}$$

存在，则称这个极限值为集 A 的盒维数，记为 $\dim_B A$.

表 1 为本文计算的部分临界点值情况下 M 集的盒维数. 从表中可以看出，随着临界点值的增大，四元数 M 集的分维基本上保持着逐步下降的趋势. 而当临界点值大于 1.0 时，M 集的维数突然下降很快. 从上述计算可以看出，盒维数反映了不同临界点下四元数 M 集整个周期域的状况. 随着临界点值的增大，M 集的周期域出现了紧缩，并且 M 集的边界逐渐模糊，导致很多大周期的稳定域消失，这使得盒维数逐渐降低. 而当临界点值大于 1.0 时，M 集的稳定周期域急剧缩小，使得盒维数变化加剧，直至不能产生任何分形结构为止(见图 1(g)和(h)).

表 1 四元数 M 集的分维

Tab. 1 Fractal dimensions of the quaternion M sets

q	M 集的盒维数	q	M 集的盒维数
0	4.034 3	0.6	3.946 9
0.1	4.033 3	0.7	3.973 1
0.2	4.017 1	0.8	3.940 9
0.3	3.998 6	0.9	3.905 0
0.4	3.970 3	1.0	3.600 5
0.5	3.947 5	1.1	2.716 2

3 四元数 Julia 集

定理 6 四元数映射 $f:z\leftarrow z^2+c$ 的 Julia 集，有

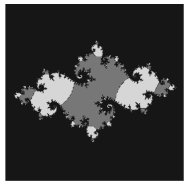
$$g(z)=g(-z) \tag{11}$$

证明 设 $z=|z|e^{n\theta}$，则 $-z=|z|e^{n(\theta+\pi)}$，$g(-z)=|z|^2e^{2n(\theta+\pi)}+c=|z|^2e^{2n\theta}+c=g(z)$.

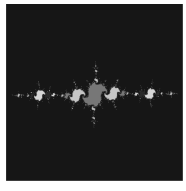
该定理表明四元数 Julia 集关于原点对称，从图 4 各图中可以看到这个性质.



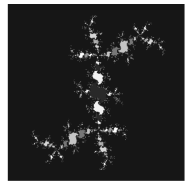
(a) 1周期，c=(0.291 666 8,0.024 86,0,0)



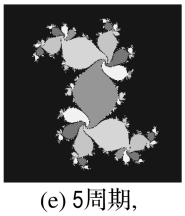
(b) 2周期，c=(-0.737 5,0.125,0,0)



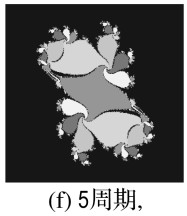
(c) 4周期，c=(-1.275,0.037 5,0,0)



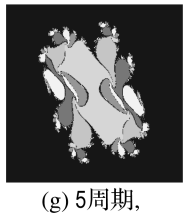
(d) 8周期，c=(0.325,0.555 2,0,0)



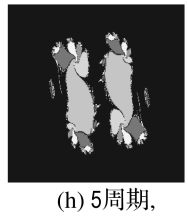
(e) 5周期，c=(0.358 3,-0.331 497,0,0)



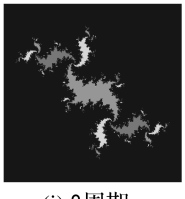
(f) 5周期，c=(0.358 3,-0.331 497,0,0)，k=0.3



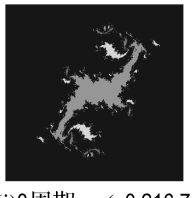
(g) 5周期，c=(0.358 3,-0.331 497,0,0)，k=0.5



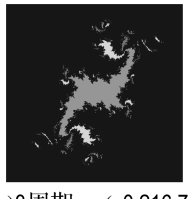
(h) 5周期，c=(0.358 3,-0.331 497,0,0)，k=0.8



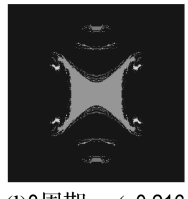
(i) 3周期，c=(-0.216 7,-0.754,0,0)



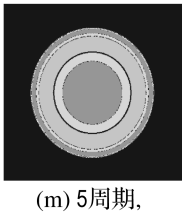
(j)3周期，c=(-0.216 7,0.5,0.564 372 22,0)



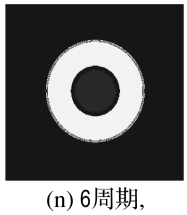
(k)3周期，c=(-0.216 7,0.564 372 22,-0.5,0)



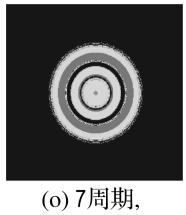
(l)3周期，c=(-0.216 7,0,-0.5,0.564 372 22)



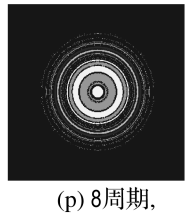
(m) 5周期，c=(0.358 3,-0.331 497,0,0)，r=0.3



(n) 6周期，c=(0.383 3,-0.215 5,0,0)



(o) 7周期，c=(-0.633 2,0,0,-0.372 9)



(p) 8周期，c=(0.325,0,0.555 2,0)

图 4 四元数 Julia 集

Fig. 4 The quaternion Julia sets

定理 7　若参数 c 的标量部分以及范数相同，则四元数 Julia 集在拓扑结构上保持一致，其迭代后趋向的周期不动点也保持相同范数.

该定理的前半部分是定理 4 在四元数 Julia 集中的体现，见图 4(i)～(l). 尽管它们在实虚两轴的投影看起来不尽相同，实际上这是 Julia 集旋转了一定角度造成的结果. 而在四元数空间中如果参数 c 遵循定理 7 中的条件，它们将保持着结构上的一致[12]. 后半部分结论由本文经过大量的实验发现，示例见表 2. 由于实验采用的机器计算精度有限，表中数据误差范围在 10^{-4}.

Hart 等已经证明了当 $c \in \mathbf{C}$，j、k 存在对称性[14]. 本文发现这种对称性存在普遍性，将其条件推广得到如下定理.

定理 8

(1) 若 $c = |c| e^{i\theta}$，则对点 $z(q_0,q_1,q_2,0)$ 和 $z'(q_0,q_1,q_2',q_3')$，如果满足 $q_2^2 = {q_2'}^2 + {q_3'}^2$，则有 $|g(z)| = |g(z')|$；

(2) 同样的，若 $c = |c| e^{j\theta}$，则对点 $z(q_0,q_1,q_2,0)$ 和 $z'(q_0,q_1',q_2,q_3')$，如果满足 $q_1^2 = {q_1'}^2 + {q_3'}^2$，则有 $|g(z)| = |g(z')|$；

(3) 若 $c = |c| e^{k\theta}$，则对点 $z(q_0,q_1,0,q_3)$ 和 $z'(q_0,q_1',q_2',q_3)$，如果满足 $q_1^2 = {q_1'}^2 + {q_2'}^2$，则有 $|g(z)| = |g(z')|$.

该定理表明如果满足给定的条件，四元数 Julia 集在某两个虚轴上的投影是圆盘形状. 从图 4(m)～(p)中可以看到这个性质.

图 4 给出的是于四元数 M 集中选点构造的 Julia 集在任意两个分维平面的投影. 如无特别说明，均为另外两个分维为 0 时的投影. 图中黑色表示逃逸区，彩色区域为稳定区，不同的颜色代表趋向不同的周期不动点. 在第三、四分维均取 0 时，图形与复平面 Julia 集是相同的(见图 4(a)～(e)). 而随着第四分维取值的不断增大，分形图形不断收缩，图形面积不断缩小，中间主瓣与周围雏瓣也在不断地融合，整个图形范围越来越小，直至不再产生分形图形(见图 4(f)～(h)). 这个过程中尽管也出现了图形收缩、扭曲的现象，但是始终保持着关于原点对称的特性，这与定理 6 是一致的. 不同 Julia 集的周期值和不动点即由参数 c 在 M 集中的相应周期域的位置决定(见图 4(a)～(h)). 本文通过大量实验发现，如果参数 c 选自任何一个 M 集，即 $c \in \bigcup_{q \geqslant 0} f_{(q)}(c)$，则对应的 Julia 集即为连通的，否则相应的 Julia 集无周期性，无法构造其图像.

表 2　四元数 Julia 集的周期点(3 周期)

Tab. 2　The period point in the quaternion Julia sets (3-period)

	c			
	(−0.216 7,−0.754,0,0)	(−0.216 7,0.564 372 22,−0.5,0)	(−0.216 7,0,−0.5,0.564 372 22)	(−0.216 7,0.5,0,−0.564 372 22)
周期点	(0.166 0,−0.044 2,0,0)	(0.166 1,0.033 1,−0.029 4,0)	(0.166 0,0,−0.029 3,0.033 1)	(0.166 0,0.029 4,0,−0.033 1)
	(−0.191 1,−0.768 7,0,0)	(−0.191 1,0.575 4,−0.509 7,0)	(−0.191 1,0,−0.509 7,0.575 4)	(−0.191 1,0.509 7,0,−0.575 4)
	(−0.771 1,−0.460 2,0,0)	(−0.771 1,0.344 5,−0.305 2,0)	(−0.771 1,0,−0.305 2,0.344 5)	(−0.771 1,0.305 2,0,−0.344 5)

4　结　论

本文采用逃逸时间算法与周期点查找结合法，构造了四元数映射 $f: z \leftarrow z^2+c$ 的多临界点 M 集，探索了多临界点情况下四元数 M 集的拓扑结构和裂变演化规律，计算了四元数 M 集的周期域中心位置和边界条件. 实验结果表明，不同的临界点会导致周期区域中心发生转移或分化成多个，区域面积也会萎缩或退化，并且萎缩处会出现与周期域特性相一致的分形结构. 另外，通过定性地建立 M 集上点的坐标与 Julia 集整体结构之间的对应关系，发现四元数 M 集包含了四元数Julia 集构造的大量信息. 如果参数 c 取自由任何一个临界点决定的四元数 M 集，则相应的 Julia 集即为连通的. 这说明四元数映射 $f: z \leftarrow z^2+c$ 的 M 集由所有临界点决定的四元数 M 集的并集组成. 可以看出，多临界点的四元数 M 集结构特点较临界点为 0 的 M 集有较大变化，其他映射下的四元数 M 集亦很有可能存在多临界点问题，下一步工作可再作深入研究.

参考文献：

[1] MANDELBROT B B. **The Fractal Geometry of Nature** [M]. San Francisco:Freeman W H, 1982

[2] PEITGEN H O, SAUPE D. **The Science of Fractal Images** [M]. Berlin:Springer-Verlag, 1988

[3] 王兴元. 复杂非线性系统中的混沌 [M]. 北京:电子工业出版社, 2003

[4] NORTON A. Generation and display of geometric fractals in 3-D [J]. **Computers and Graphics**, 1982, **16**(3):61-67

[5] GOMATAM J, DOYLE J, STEVES B, *et al*. Generalization of the Mandelbrot set:quaternionic quadratic maps [J]. **Chaos, Solitons and Fractals**, 1995, **5**(6):971-986

[6] BUCHANAN W, GOMATAM J, BONNIE S. Generalized Mandelbrot sets for meromorphic complex and quaternionic maps [J]. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, 2002, **12**(8):1755-1777

[7] SHIZUO N. Dynamics of a family of quadratic maps in the quaternion space [J]. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, 2005, **15**(8):2535-2543

[8] MITJA L, MARJETA S, PETER P. Symbolic dynamics in investigation of quaternionic Julia sets [J]. **Chaos, Solitons and Fractals**, 2005, **24** (5):1189-1201

[9] 程 锦,谭建荣. 基于三元数的三维广义M集表示及其绘制算法[J]. 计算机学报, 2004, **27**(6):729-735

[10] 关 柯,孔凡让,冯志华,等. 四元数分形的生成与研究[J]. 工程图学学报, 2005, **26**(3):133-136

[11] 于 海,徐 喆,朱伟勇. 单纯形空间中的四元数分形集的构造与分析[J]. 东北大学学报, 2005, **26**(1):243-246

[12] WANG Xing-yuan, SUN Yuan-yuan. The general quaternionic M-J Sets on the mapping $z \leftarrow z^{\alpha}+c(\alpha \in \mathbf{N})$ [J]. **Computers and Mathematics with Applications**, 2007, **53**(11):1718-1732

[13] DOUADY A, HUBBARD J H. On the dynamics of polynomial-like mappings [J]. **Annales Scientifique de l'École Normale Superieur**, 1985, **18**(4):287-343

[14] HART J C, KAUFFMAN L H, SANDIN D J. Interactive visualization of quaternion Julia sets [C]// **Proceedings of the 1st IEEE Conference on Visualization'90**. San Francisco:IEEE Computer Society Press, 1990

Quaternion Mandelbrot sets on mapping $z \leftarrow z^2+c$ with multiple critical points

SUN Yuan-yuan*, WANG Xing-yuan

(School of Information and Communication Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The quaternion Mandelbrot sets (abbreviated as M sets) on the mapping $z \leftarrow z^2+c$ with multiple critical points are constructed. The topological invariance and the fission evolutions of M sets are investigated, the stability region boundary is calculated, and the topology rules of the cycle orbits are discussed. The quaternion Julia sets are constructed with the parameter c selected from the M sets and the relationship between the quaternion M sets and the Julia sets are analyzed. It can be concluded that the critical points of quaternion M sets are not unique, which lead the M sets to different fractal structures.

Key words: Mandelbrot sets; Julia sets; multiple critical points; quaternion; fractal