



具有阶段结构和时滞的幼年染病单种群模型研究

石瑞青^{*1,2}, 陈兰荪¹

(1. 大连理工大学 数学科学学院, 辽宁 大连 116024;

2. 山西师范大学 数学与计算机科学学院, 山西 临汾 041004)

摘要: 研究了一个具有阶段结构和时滞的幼年染病单种群模型. 通过常微分方程的特征根法, 借助几何图形分析了3个平衡点的存在性, 得到了它们局部稳定的充要条件. 并且在推论中找到了参数 τ 影响平衡点稳定性的阈值, 得到了当参数 τ 在不同区间取值时对应的平衡点的稳定性, 并通过例题验证了定理的结论. 最后, 对于所得的数学结果给出了生物意义下的解释: 若时滞较大, 即种群的成熟期较长, 则种群走向绝灭; 若时滞较小, 即种群的成熟期较短, 则种群可以持续生存.

关键词: 阶段结构; 时滞; 平衡点

中图分类号: O175.1 **文献标志码:** A

0 引言

文献[1,2]研究了具有阶段结构的单种群模型, 作者假设种群从幼年到成年的平均成熟期为一个常数, 在模型中用一个时滞来表示. 文献[1]的模型为

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha x_2(t) - \gamma x_1(t) - \alpha e^{-r} x_2(t - \tau) \\ x_2'(t) = \alpha e^{-r} x_2(t - \tau) - \beta x_2^2(t) \end{cases}$$

式中: $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 分别表示幼年和成年种群的密度; $\alpha > 0$, 代表出生率; $\gamma > 0$, 是幼年的死亡率; $\beta > 0$, 代表成年种群的死亡率和密度制约; $\tau > 0$, 表示成熟期. $\alpha e^{-r} x_2(t - \tau)$ 表示在 $t - \tau$ 时刻出生的幼年(也就是 $\alpha x_2(t - \tau)$) 并且存活到时刻 t 的密度(由于幼年具有死亡率), 因此, $\alpha e^{-r} x_2(t - \tau)$ 表示从幼年到成年的转化率.

种群疾病的传播主要依赖于疾病本身的特性. 例如麻疹、腮腺炎、水痘、猩红热、白喉等疾病主要在幼年种群中传播, 而淋病、梅毒等传染病只在成年种群中传播. 文献[3,4]考虑了具有阶段结

构的单种群 SIS 流行病模型. 文献[3]考虑的模型为

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_1 x_2(t) - c_1 x_2(t - \tau) - r x_1(t) - \\ \quad a_2 x_1(t) y(t) + b_1 y(t) \\ y'(t) = a_2 x_1(t) y(t) - b_1 y(t) - (r + \alpha) y(t) \\ x_2'(t) = c_1 x_2(t - \tau) - c_2 x_2^2(t) \end{cases}$$

式中: $x_1(t)$ 、 $y(t)$ 表示易感幼年和染病幼年种群的密度; $x_2(t)$ 表示成年种群的密度, 流行病只在幼年种群中传染, 而成年种群不会染病; a_1 表示幼年的出生率; a_2 是接触率; $a_2 x_1(t) y(t)$ 表示双线性传染率; r 表示幼年的自然死亡率; α 表示因病死亡率; c_1 表示从幼年到成年的转化率; $c_2 x_2^2(t)$ 表示成年具有 Logistic 型死亡率; b_1 表示染病幼年的康复率. 其他参数的具体生物意义可以参看文献[1~4].

此外, 文献[5,6]考虑了具有阶段结构单种群的收获策略. 受文献[1,3]的启发, 本文具体研究幼年染病具有阶段结构和时滞的单种群模型.

收稿日期: 2007-12-03; 修回日期: 2010-01-07.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471117).

作者简介: 石瑞青^{*}(1979-), 男, 博士, E-mail: shrq1979@163.com; 陈兰荪(1938-), 男, 教授, 博士生导师.

1 模型的建立及分析

1.1 模型建立

模型建立如下:

$$\begin{cases} x_1'(t) = rx_2(t) - d_1x_1(t) - \alpha x_1(t)I(t) - \\ \quad rx_2(t - \tau)e^{-\int_{t-\tau}^t [d_1 + aI(s)] ds} \\ x_2'(t) = rx_2(t - \tau)e^{-\int_{t-\tau}^t [d_1 + aI(s)] ds} - \\ \quad d_2x_2(t) - \beta x_2^2(t) \\ I'(t) = \alpha x_1(t)I(t) - (d_1 + \delta)I(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x_1(t)$ 、 $I(t)$ 分别表示易感幼年和染病幼年种群的密度; $x_2(t)$ 表示成年种群的密度, 流行病只在幼年种群中传染, 而成年种群不会染病; $\alpha > 0$, 是接触率; $\alpha x_1(t)I(t)$ 表示双线性传染率; $\beta > 0$, 表示成年种群的密度制约; $\delta > 0$, 表示染病幼年种群的因病死亡率. 其他参数的具体生物学意义可以参看文献[1~4]模型解释. 下面研究系统(1)平衡点的存在性及稳定性.

1.2 性质分析

通过计算, 得到系统(1)以下平衡点:

(1) 种群绝灭平衡点(平凡平衡点) $P_0(0, 0, 0)$ 总是存在的.

(2) 当 $R_1 = re^{-d_1\tau}/d_2 > 1$ 时, 存在无病平衡点(边界平衡点): $P_1(x_1^0, x_2^0, 0)$, 其中 $x_1^0 = r(1 - e^{-d_1\tau})x_2^0/d_1$, $x_2^0 = (re^{-d_1\tau} - d_2)/\beta$.

(3) 当 $R_1 = re^{-d_1\tau}/d_2 > 1$, 且 $R_2 = \frac{\alpha r(1 - e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau} - d_2)}{\beta d_1(d_1 + \delta)} > 1$, $R_3 = 2re^{-d_1\tau}/(d_2 + r) < 1$ 时, 存在唯一的地方病平衡点(正平衡点) $P_2(x_1^*, x_2^*, I^*)$, 这里 $x_1^* = (d_1 + \delta)/\alpha$, $x_2^* = (re^{-(d_1+aI^*)\tau} - d_2)/\beta$, I^* 是方程 $\frac{r}{\beta}(re^{-(d_1+aI^*)\tau} - d_2)(1 - e^{-(d_1+aI^*)\tau}) = d_1(d_1 + \delta)/\alpha + (d_1 + \delta)I$ 的唯一正根.

平衡点 P_0 和 P_1 的存在性是显然的, 下证地方病平衡点的存在性和唯一性. 正平衡点 $P_2(x_1^*, x_2^*, I^*)$ 满足代数方程组

$$\begin{cases} rx_2 - d_1x_1 - \alpha x_1 I - rx_2 e^{-(d_1+aI)\tau} = 0 \\ rx_2 e^{-(d_1+aI)\tau} - d_2x_2 - \beta x_2^2 = 0 \\ \alpha x_1 I - (d_1 + \delta)I = 0 \end{cases} \quad (2)$$

由方程组(2)的第3个方程, 易得 $x_1 = (d_1 + \delta)/\alpha$, 由第2个方程得 $x_2 = (re^{-(d_1+aI)\tau} - d_2)/\beta$, 代入第1个方程得

$$\frac{r}{\beta}(re^{-(d_1+aI)\tau} - d_2)(1 - e^{-(d_1+aI)\tau}) = d_1(d_1 + \delta)/\alpha + (d_1 + \delta)I$$

令 $f(I) = \frac{r}{\beta}(re^{-(d_1+aI)\tau} - d_2)(1 - e^{-(d_1+aI)\tau})$, $g(I) = d_1(d_1 + \delta)/\alpha + (d_1 + \delta)I$. 对函数 $f(I)$ 求导得, $f'(I) = \frac{r\alpha\tau}{\beta}e^{-(d_1+aI)\tau}[2re^{-(d_1+aI)\tau} - (d_2 + r)]$, 由于 $R_3 = 2re^{-d_1\tau}/(d_2 + r) < 1$, 在区间 $(0, +\infty)$ 上, $f'(I) < 0$, 即 $f(I)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调递减的. 当 $R_2 = [\alpha r(1 - e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau} - d_2)]/[\beta d_1(d_1 + \delta)] > 1$ 时, 有 $f(0) > g(0) > 0$, 易见 $g(I)$ 是斜率大于零的直线, 所以存在唯一正根, 记做 I^* , 对应地可以求出 $x_2^* = (re^{-(d_1+aI^*)\tau} - d_2)/\beta$. 下面讨论平衡点的稳定性, 有以下定理.

定理 1 (1) 当 $R_1 = re^{-d_1\tau}/d_2 < 1$ 时, 平衡点 P_0 是局部渐近稳定的; 当 $R_1 = re^{-d_1\tau}/d_2 > 1$ 时, 平衡点 P_0 是不稳定的.

(2) 当 $R_1 = re^{-d_1\tau}/d_2 > 1$, 且 $R_2 = \frac{\alpha r(1 - e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau} - d_2)}{\beta d_1(d_1 + \delta)} < 1$ 时, 平衡点 P_1 是局部渐近稳定的; 当 $R_1 = re^{-d_1\tau}/d_2 > 1$, 且 $R_2 = \frac{\alpha r(1 - e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau} - d_2)}{\beta d_1(d_1 + \delta)} > 1$ 时, 平衡点 P_1 是不稳定的.

(3) 当 $R_1 = re^{-d_1\tau}/d_2 > 1$, 且 $R_2 = \frac{\alpha r(1 - e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau} - d_2)}{\beta d_1(d_1 + \delta)} > 1$, $R_3 = 2re^{-d_1\tau}/(d_2 + r) < 1$ 时, 平衡点 P_2 存在、唯一并且是局部渐近稳定的.

证明 (1) 在 P_0 处, 特征方程为

$$(\lambda + d_1)(\lambda + d_1 + \delta)(\lambda - re^{-(\lambda+d_1)\tau} + d_2) = 0$$

此特征方程的其中两个根为 $\lambda_1 = -d_1 < 0$, $\lambda_2 = -(d_1 + \delta) < 0$; 特征根 λ_3 由等式 $\lambda = re^{-(\lambda+d_1)\tau} - d_2$ 决定. 为了判断 λ_3 的符号, 令 $f_2(\lambda) = \lambda$, $g_2(\lambda) = re^{-(\lambda+d_1)\tau} - d_2$, 容易看出, $f_2(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g_2(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

(A1) 当 $R_1 = re^{-d_1\tau}/d_2 < 1$ 时, $f_2(0) = 0$, $g_2(0) = re^{-d_1\tau} - d_2 < 0$, 所以, λ_3 为负数(见图 1), 对应地得出此时平衡点 P_0 是局部渐近稳定的.

(A2) 当 $R_1 = re^{-d_1\tau}/d_2 > 1$ 时, $f_2(0) = 0$, $g_2(0) = re^{-d_1\tau} - d_2 > 0$, 所以, λ_3 为正数(类似于图 2), 平衡点 P_0 是不稳定的.

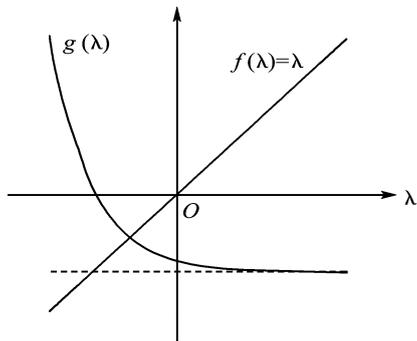


图 1 交点为负的两条曲线

Fig. 1 The two curves with negative crossing-point

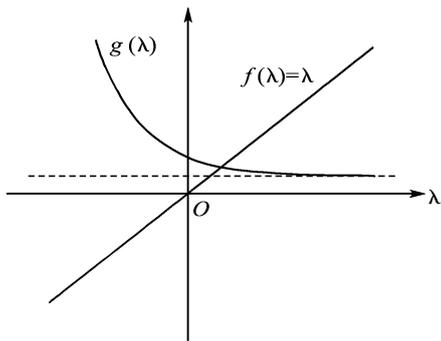


图 2 交点为正的曲线

Fig. 2 The two curves with positive crossing-point

(2) 在 P_1 处, 特征方程为

$$(\lambda + d_1)(\lambda - \alpha x_1^0 + d_1 + \delta)(\lambda - re^{-(\lambda+d_1)\tau} + d_2 + 2\beta x_2^0) = 0$$

此特征方程的一个根为 $\lambda_1 = -d_1 < 0$, 特征根 λ_2 由等式 $\lambda = re^{-(\lambda+d_1)\tau} - d_2 - 2\beta x_2^0$ 决定, 第 3 个特征根 $\lambda_3 = \alpha x_1^0 - (d_1 + \delta)$. 为了判断 λ_2 的符号, 令 $f_3(\lambda) = \lambda, g_3(\lambda) = re^{-(\lambda+d_1)\tau} - d_2 - 2\beta x_2^0$, 则 $f_3(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g_3(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $f_3(0) = 0, g_3(0) = re^{-d_1\tau} - d_2 - 2\beta x_2^0 = -\beta x_2^0 < 0$, 所以, 特征根 λ_2 的符号为负(类似于图 1).

(B1) 当 $R_1 = re^{-d_1\tau}/d_2 > 1$, 且 $R_2 = \frac{ar(1 - e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau} - d_2)}{\beta d_1(d_1 + \delta)} < 1$ 时, $\lambda_3 = \alpha x_1^0 - (d_1 + \delta) < 0$, 对应地得到此时平衡点 P_1 是局部渐近稳定的.

(B2) 当 $R_1 = re^{-d_1\tau}/d_2 > 1$, 且 $R_2 = \frac{ar(1 - e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau} - d_2)}{\beta d_1(d_1 + \delta)} > 1$ 时, $\lambda_3 = \alpha x_1^0 - (d_1 + \delta) > 0$, 对应地得到此时平衡点 P_1 是不稳定的.

(3) 在 P_2 处, 特征方程为

$$(\lambda - re^{-(\lambda+al^*+d_1)\tau} + d_2 + 2\beta x_2^*)[\lambda^2 + (d_1 + al^*)\lambda + \alpha^2 x_1^* I^*] = 0$$

容易看出特征根 λ_2, λ_3 满足 $\lambda_2 + \lambda_3 = -(d_1 + \alpha I^*) < 0, \lambda_2 \lambda_3 = \alpha x_1^* I^* > 0$, 所以特征根 λ_2 和 λ_3 都具有负的实部. 特征根 λ_1 由等式 $\lambda = re^{-(\lambda+al^*+d_1)\tau} - d_2 - 2\beta x_2^*$ 决定. 为判断 λ_1 的符号, 令 $f_4(\lambda) = \lambda, g_4(\lambda) = re^{-(\lambda+al^*+d_1)\tau} - d_2 - 2\beta x_2^*$. 容易看出 $f_4(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g_4(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 并且 $f_4(0) = 0, g_4(0) = re^{-(d_1+al^*)\tau} - d_2 - 2\beta x_2^* = -\beta x_2^* < 0$. 所以, 特征根 λ_1 的符号为负(类似于图 1). 因此, 平衡点 P_2 存在、唯一并且是局部渐近稳定的. □

1.3 模型平衡点的稳定性结论

关于 3 个平衡点的存在性和稳定性的结论总结见表 1.

表 1 平衡点的存在性和稳定性条件

Tab. 1 The existence and stability conditions for the equilibriums

条件	平衡点		
	P_0	P_1	P_2
$R_1 < 1$	存在, 局部渐近稳定	不存在	不存在
$R_1 > 1$ $R_2 < 1$	存在, 不稳定	存在, 局部渐近稳定	不存在
$R_1 > 1$ $R_2 > 1$	存在, 不稳定	存在, 不稳定	存在, 局部渐近稳定
$R_3 < 1$			

推论 1 (1) 令 $\tau_0 = -\ln(d_2/r)/d_1$, 则当 $\tau > \tau_0$ 时, P_0 局部渐近稳定; 当 $\tau < \tau_0$ 时, P_0 不稳定.

(2) 令 $\Delta = (r - d_2)^2 - \frac{4}{\alpha}\beta d_1(d_1 + \delta)$, 则有

(2.1) 当 $\tau < \tau_0$, 且 $\Delta < 0$ 时, P_1 局部渐近稳定.

(2.2) 当 $\tau < \tau_0$, 且 $\Delta > 0$ 时, 令 $\tau_1 = -\ln y_1^*/d_1$, $\tau_2 = -\ln y_2^*/d_1$, $\tau_3 = -\ln\left(\frac{r+d_2}{2r}\right)/d_1$, 其中 $y_1^* = \frac{r+d_2-\sqrt{\Delta}}{2r}$, $y_2^* = \frac{r+d_2+\sqrt{\Delta}}{2r}$ 是方程 $ry^2 - (r+d_2)y + d_2 + \frac{\beta d_1(d_1+\delta)}{ar} = 0$ 的两个正根. 若 $\tau \in (0, \tau_2) \cup (\tau_1, \tau_0)$, 则 P_1 局部渐近稳定; 若 $\tau \in (\tau_2, \tau_1)$, 则 P_1 不稳定.

(3) 当 $\tau \in (\tau_3, \tau_1)$ 时, P_2 是局部渐近稳定的.

证明 首先指出, τ_0 和 τ_3 总是存在的(在生物意义下, 总是假设 $r > \max\{d_1, d_2\}$); τ_1 和 τ_2 存在的条件是 $\Delta > 0$. 当 $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ 都存在时, 满足 $\tau_0 > \tau_1 > \tau_3 > \tau_2 > 0$.

(1) $R_1 < 1$ 和 $\tau > \tau_0$ 是等价的; 而且 $R_1 > 1$ 和 $\tau < \tau_0$ 是等价的.

(2) 当 $\Delta < 0$ 时, 方程 $ry^2 - (r+d_2)y + d_2 + \frac{\beta d_1(d_1+\delta)}{ar} = 0$ 没有根, 所以, 对任意的 $\tau \in (0, +\infty)$, 都有 $R_2 = \frac{ar(1 - e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau} - d_2)}{\beta d_1(d_1 + \delta)} < 1$ 成立. 考虑到 P_1 存在的条件是 $\tau < \tau_0$ (即 $R_1 > 1$), 因此(2.1) 成立.

当 $\Delta > 0$ 时, 方程 $ry^2 - (r+d_2)y + d_2 + \frac{\beta d_1(d_1+\delta)}{ar} = 0$ 有两个正根 $y_1^* = \frac{r+d_2-\sqrt{\Delta}}{2r}$, $y_2^* = \frac{r+d_2+\sqrt{\Delta}}{2r}$. 若 $\tau \in (0, \tau_2) \cup (\tau_1, \tau_0)$, 对应的有 $R_2 = \frac{ar(1 - e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau} - d_2)}{\beta d_1(d_1 + \delta)} < 1$, 从而 P_1 局部渐近稳定. 若 $\tau \in (\tau_2, \tau_1)$, 对应的有 $R_2 = \frac{ar(1 - e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau} - d_2)}{\beta d_1(d_1 + \delta)} > 1$, 从而 P_1 不稳定. 因此(2.2) 成立.

(3) 当 $\tau < \tau_0, \Delta > 0$, 且 $\tau \in (\tau_2, \tau_1)$ 时, $R_2 = \frac{ar(1 - e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau} - d_2)}{\beta d_1(d_1 + \delta)} > 1$; 另外, $\tau > \tau_3$ 等价于 $R_3 = 2re^{-d_1\tau}/(d_2 + r) < 1$, 而且 $\tau_3 \in (\tau_2, \tau_1)$,

所以, 当 $\tau \in (\tau_3, \tau_1)$ 时, 定理1的条件(3) 满足, 故 P_2 是局部渐近稳定的.

推论 2 由定理1 和推论1, 得到

(1) 当 $\Delta < 0$ 时, τ_0 是一个阈值. 若 $\tau > \tau_0$, 则 P_1 不存在, P_0 局部渐近稳定; 若 $\tau < \tau_0$, P_0 不稳定, P_1 存在而且局部渐近稳定.

(2) 当 $\Delta > 0$ 时, 平衡点的稳定性由 τ 的不同取值区间决定. 若 $\tau \in (0, \tau_2) \cup (\tau_1, \tau_0)$, P_1 是局部渐近稳定的; 若 $\tau \in (\tau_2, \tau_1)$, 则 P_1 不稳定; 若 $\tau \in (\tau_3, \tau_1)$, P_2 存在且是局部渐近稳定的.

1.4 例题

例 1 取 $\alpha = \beta = r = 1, d_1 = 0.3, d_2 = 0.2, \tau = 2$, 若取 $\delta = 0.2$, 则有 $R_1 = 2.744 > 1, R_2 = 1.350 > 1, R_3 = 0.9147 < 1$, 根据定理1, 地方病平衡点 $P_2(x_1^*, x_2^*, I^*)$ 存在且是局部渐近稳定的; 若取 $\delta = 0.4$, 则有 $R_1 = 2.744 > 1, R_2 = 0.9643 < 1$, 根据定理1, 地方病平衡点 $P_2(x_1^*, x_2^*, I^*)$ 是不存在的. 这说明如果因病死亡率 δ 取值不是太大时 ($\delta = 0.2$), 可以形成地方病. 但是, 如果因病死亡率 δ 取值太大时 ($\delta = 0.4$), 则不容易形成地方病, 这是由于单位染病者在死亡之前所感染的新得病者不足一个, 从而该传染病绝灭.

2 结果与讨论

在定理1 的第一种情况下, 可以证明平衡点 P_0 是全局渐近稳定的; 在第二种情况下, 可以证明平衡点 P_1 是全局渐近稳定的; 但是对于正平衡点 P_2 的全局稳定性没有证明, 这主要是由于时滞的存在, 很难找到相应的 Lyapunov 函数. 对于二维系统, 可以用 Dulac 函数判断系统无环, 再利用系统的有界性和正平衡点的局部稳定性就可以证明系统正平衡点的全局稳定性. 而对于三维系统, 目前没有更好的办法来证明正平衡点的全局稳定性.

推论2 可以给出生物意义下的解释. 若时滞较大 ($\tau > \tau_0$), 即如果种群的成熟期较长, 种群走向绝灭(平衡点 P_0 是全局稳定的). 若时滞较小 ($\tau < \tau_0$), 成年种群的密度制约系数很大 (β 充分

大),或者成年种群的出生率和死亡率相差不多 ($|r - d_2| \ll 1$), 则种群持续生存, 疾病消除(平衡点 P_1 是全局稳定的), 因为此时 $\Delta < 0$. 只有当时滞取特定值 ($\tau \in (\tau_3, \tau_1)$) 时, 可以形成地方病.

注意到在推论 2 的(2)中, 还有一种情况没有讨论, 即 $\tau \in (\tau_2, \tau_3)$. 由定理 1 和推论 1 可知, 当 $\tau \in (\tau_2, \tau_3)$ 时, P_0 和 P_1 是不稳定的, 此时 P_2 是否存在, 以及 P_2 的稳定性如何, 对于这些问题的研究留作以后研究.

3 结 语

本文得出了幼年染病具有阶段结构和时滞的单种群模型中 3 个平衡点的性质, 以及生物意义下的解释, 对进一步研究平衡点的稳定性具有一定参考价值.

参考文献:

[1] AIELLO W G, FREEDMAN H I. A time delay model of single-species growth with stage structure

[J]. *Mathematics Bioscience*, 1990, **101**(1):139-153

[2] AIELLO W G, FREEDMAN H I, WU J. Analysis of a model representing stage structured populations growth with state-dependent time delay [J]. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 1992, **52**(3): 855-869

[3] XIAO Y N, CHEN L S. On an SIS epidemic model with stage structure [J]. *Journal of Systems and Science Complexity*, 2003, **16**(2):275-288

[4] XIAO Y N, CHEN L S. An SIS epidemic model with stage structure and a delay [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica(English Series)*, 2002, **18**(1): 607-618

[5] SONG X Y, CHEN L S. Modeling and analysis of a single-species system with stage structure and harvesting [J]. *Mathematics and Computer Modeling*, 2002, **36**(1):67-82

[6] SONG X Y, CHEN L S. Optimal harvesting policy and stability for single-species growth model with stage structure [J]. *Journal of Systems and Science Complexity*, 2002, **15**(2):194-201

Delayed stage-structured single-species model with disease in infant

SHI Rui-qing^{*1,2}, CHEN Lan-sun¹

(1. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. School of Mathematics and Computer Science, Shanxi Normal University, Linfen 041004, China)

Abstract: A delayed stage-structured single-species model with disease in the infant is studied. By the method of eigenvalue for ordinary differential equation, and by the geometric figures, the sufficient and necessary conditions for the existence and stability of the three equilibrium points are got. In the inference, some thresholds for the parameter τ are found, which control the stability of the equilibrium points. When the parameter τ has different values, the corresponding stability property of the equilibrium points is obtained, and theoretical result is verified by a simple example. At last, the results from the viewpoint of biology are explained. If the delay is large enough and the maturation period is long enough, then the population will die out. If the delay is small and the maturation period is short, then the population may persist.

Key words: stage-structured; delay; equilibrium point