第50卷第2期
2010年3月
大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology
Vol. 50, No. 2
Mar. 2010

文章编号：1000-8608(2010)02-0309-04

# 路径幂图、Flower Snark 图及多锥图独立数

徐连诚*[1,2]， 杨元生[3]， 夏尊铨[1]

（1. 大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024；
2. 山东师范大学 信息科学与工程学院，山东 济南 250014；
3. 大连理工大学 计算机科学与技术学院，辽宁 大连 116024）

**摘要**：图的独立数是图论中的重要参数，令 $G=(V(G), E(G))$ 是一个简单有限无向图. 如果 $V(G)$ 的子集 $S$ 中任意两个顶点均不相邻，则 $S$ 是图 $G$ 的一个独立集. 顶点独立集大小的最大值，称为图 $G$ 的独立数，记做 $\alpha(G)$. 研究了路径幂图、Flower Snark 及其相关图、多锥图的独立数问题，首先构造出了它们的独立集，得到其独立数的下界，然后证明了该值也是其独立数的上界，并给出了它们独立数的准确值.

**关键词**：独立集；独立数；路径幂图；Flower Snark；多锥图
**中图分类号**：O157.5　　**文献标志码**：A

## 0 引言

本文考虑的图，均指简单有限无向图，其他未加说明的术语和记号参见文献[1]. 图 $G=(V(G), E(G))$，其中 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 $G$ 的顶点集和边集. 诱导子图 $\langle G,S\rangle$ 是以 $S\subseteq V(G)$ 为顶点集和 $G$ 中端点均在 $S$ 中的所有边构成的子图. 顶点 $v\in V(G)$ 的闭邻域 $N[v]=\{u\in V(G): vu\in E(G)\}\cup\{v\}$，相应地，$S\subseteq V(G)$ 的闭邻域 $N[S]=\bigcup_{v\in S}N[v]$. 独立集 $S\subseteq V(G)$ 是由两两不相邻的顶点构成的集合，顶点独立集大小的最大值称为独立数，记做 $\alpha(G)$.

路径幂图 $P_n^k$ 是指连接路径图 $P_n$ 中所有距离不超过 $k$ 的顶点对所得到的图. 当 $n$ 为不小于5的奇数时，Flower Snark 图 $F_n=(V(F_n), E(F_n))$ 被定义为 $4n$ 个顶点的简单无向图，其中 $V(F_n)=\{u_i: 0\leqslant i\leqslant n-1\}\cup\{v_i: 0\leqslant i\leqslant n-1\}\cup\{w_i: 0\leqslant i\leqslant 2n-1\}$，且 $E(F_n)=\{u_iu_{(i+1)\bmod n}: 0\leqslant i\leqslant n-1\}\cup\{w_iw_{(i+1)\bmod 2n}: 0\leqslant i\leqslant 2n-1\}\cup\{v_iu_i, v_iw_i, v_iw_{n+i}: 0\leqslant i\leqslant n-1\}$. 当 $n=3$ 或 $n$ 为不小于4的偶数时，$F_n$ 被称为 Flower Snark 的相关图. 多锥图是由一个长度为 $m$ 的圈 $C_m$ 以及 $l$ 个孤立点组成的图，其中每个孤立点都与 $C_m$ 的所有点有边关联，记做 $W_{l,m}$.

图的独立数是图论中最重要的参数之一，因而吸引了无数的研究者. 这些研究多集中在讨论一般图的独立数的上界和/或下界上[2~11]，对于具体的某些特定的类图，比如路径幂图、Flower Snark 及其相关图、多锥图等类图的独立数问题则很少有文献直接涉及.

本文研究路径幂图、Flower Snark 图及多锥图的独立数问题，并给出其独立数的准确值.

## 1 路径幂图 $P_n^k$ 的独立数

在本章中讨论路径幂图 $P_n^k$ 的独立数.

**定理1** 路径幂图 $P_n^k$ 的独立数 $\alpha(P_n^k)=\lceil n/(k+1)\rceil$.

**证明** 首先给出路径幂图 $P_n^k$ 的一个独立集，使得 $\alpha(P_n^k)\geqslant\lceil n/(k+1)\rceil$，然后证明 $\alpha(P_n^k)\leqslant\lceil n/(k+1)\rceil$，从而得到定理的结论.

(1) 取 $S=\{v_{(k+1)i}: 0\leqslant(k+1)i\leqslant n-1\}\subseteq V(P_n^k)$（图1示例了几个路径幂图的独立集），则 $S$ 是路径幂图 $P_n^k$ 的一个独立集并且 $|S|=\lceil n/(k+$

**收稿日期**：2008-04-12；　**修回日期**：2009-12-10.
**基金项目**：国家自然科学基金资助项目(90612003).
**作者简介**：徐连诚*(1973-)，男，博士，E-mail: lchxu@163.com；杨元生(1946-)，男，教授，博士生导师.

$1)\rceil$,于是,$\alpha(P_n^k) \geqslant \lceil n/(k+1) \rceil$.

(2) 为了以下证明的方便,记 $V'(i,l) = \{v_{i+j}: 0 \leqslant j \leqslant l-1\} \subseteq V(P_n^k)$,其中下标对 $n$ 取模.

令 $S$ 为路径幂图 $P_n^k$ 的任意一个独立集,则由 $\langle P_n^k, V'(i,l) \rangle \cong K_l, 1 \leqslant l \leqslant k+1$,可得 $|S \cap V'(i,l)| \leqslant 1$.

设 $n=(k+1)m+t$,则有 $|S| = \sum_{i=0}^{m-1} |S \cap V'((k+1)i, k+1)| + |S \cap V'((k+1)m, t)| \leqslant m \times 1 + \varepsilon = m + \varepsilon$;其中,当 $t=0$ 时,$\varepsilon = 0$,否则 $\varepsilon = 1$. 于是,$|S| \leqslant \lceil n/(k+1) \rceil$,由 $S$ 的任意性,可知 $\alpha(P_n^k) \leqslant \lceil n/(k+1) \rceil$.

综合(1)、(2),得 $\alpha(P_n^k) = \lceil n/(k+1) \rceil$. □

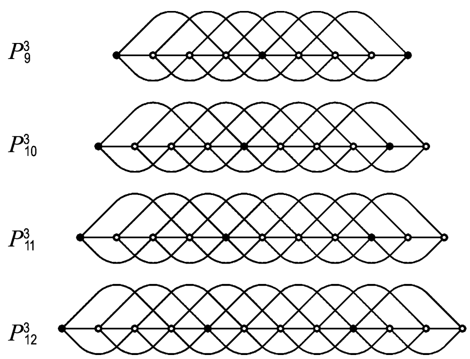


图 1 路径幂图 $P_n^k$ 的独立集

Fig. 1 Some independent sets of $P_n^k$

## 2 Flower Snark 及其相关图 $F_n$ 的独立数

对于 $n=3$ 时 Flower Snark 相关图的独立数 $\alpha(F_3)=5$ 留给读者去验证. 下面讨论 $n \geqslant 4$ 时 Flower Snark 及其相关图 $F_n$ 的独立数.

**定理 2** Flower Snark 图 $F_n$($n$ 为不小于 5 的奇数)的独立数 $\alpha(F_n) = 2n-1$.

**证明** 首先给出 Flower Snark 图 $F_n$ 的一个独立集,使得 $\alpha(F_n) \geqslant 2n-1$,然后证明 $\alpha(F_n) \leqslant 2n-1$,从而得到定理的结论,其中 $n$ 为不小于 5 的奇数.

(1) 取 $S = \{u_{2i}: 0 \leqslant i \leqslant (n-1)/2-1\} \cup \{v_{2i+1}: 0 \leqslant i \leqslant (n-1)/2-1\} \cup \{v_{n-1}\} \cup \{w_{2i}, w_{n+2i}: 0 \leqslant i \leqslant (n-1)/2-1\} \subseteq V(F_n)$(图 2 示例了 Flower Snark 图的独立集),则 $S$ 是 Flower Snark 图 $F_n$ 的一个独立集并且 $|S| = (n-1)/2 + (n-1)/2 + 1 + 2 \times [(n-1)/2] = 2n-1$,于是,$\alpha(F_n) \geqslant 2n-1$.

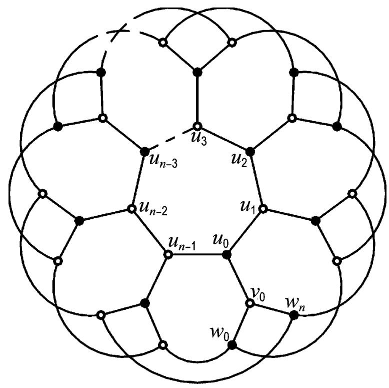


图 2 Flower Snark 图 $F_n$ 的独立集

Fig. 2 Independent set of Flower Snark graph $F_n$

(2)令 $S$ 为 Flower Snark 图 $F_n$ 的任意一个独立集,取 $x = |S \cap \{u_i: 0 \leqslant i \leqslant n-1\}|$,$y = |S \cap \{v_i: 0 \leqslant i \leqslant n-1\}|$,$z = |S \cap \{w_i: 0 \leqslant i \leqslant 2n-1\}|$. 则 $|S| = x+y+z$ 且得到如下整数规划:

$$\begin{aligned} &\max \quad x+y+z \\ &\text{s.t.} \quad x \leqslant (n-1)/2 \\ &\qquad\ \ z \leqslant n \\ &\qquad\ \ x+y \leqslant n \\ &\qquad\ \ z \leqslant 2n-2y \\ &\qquad\ \ y \leqslant n \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $x, y, z \in \mathbf{N}$($\mathbf{N}$ 为自然数集).

由 $\langle F_n, \{u_i: 0 \leqslant i \leqslant n-1\} \rangle \cong C_n$ 得 $x \leqslant (n-1)/2$;

由 $\langle F_n, \{w_i: 0 \leqslant i \leqslant 2n-1\} \rangle \cong C_{2n}$ 得 $z \leqslant n$;

由 $x+y = |S \cap \{u_i: 0 \leqslant i \leqslant n-1\}| + |S \cap \{v_i: 0 \leqslant i \leqslant n-1\}| = |S \cap \{u_i, v_i: 0 \leqslant i \leqslant n-1\}|$ 及 $u_i v_i \in E(F_n)$ 得 $x+y \leqslant n$;

由 $z = |S \cap \{w_i: 0 \leqslant i \leqslant 2n-1\}| \leqslant |\{w_i: 0 \leqslant i \leqslant 2n-1\} - N[S \cap \{v_i: 0 \leqslant i \leqslant n-1\}]| = 2n-2y$ 得 $z \leqslant 2n-2y$;

由 $|\{v_i: 0 \leqslant i \leqslant n-1\}| = n$ 得 $y \leqslant n$.

该整数规划的最优值为 $2n-1$,于是 $|S| \leqslant 2n-1$. 又由 $S$ 任意性,可知 $\alpha(F_n) \leqslant 2n-1$.

综合(1)、(2),得 Flower Snark 图 $F_n$($n$ 为不小于 5 的奇数)的独立数 $\alpha(F_n) = 2n-1$. □

**定理 3**　Flower Snark 相关图 $F_n$($n$ 为不小于 4 的偶数) 的独立数 $\alpha(F_n) = 2n$.

**证明**　首先给出 Flower Snark 相关图 $F_n$ 的一个独立集,使得 $\alpha(F_n) \geqslant 2n$,然后证明 $\alpha(F_n) \leqslant 2n$,从而得到定理的结论,其中 $n$ 为不小于 4 的偶数.

(1) 取 $S = \{u_{2i}:0 \leqslant i \leqslant n/2-1\} \cup \{v_{2i+1}:0 \leqslant i \leqslant n/2-1\} \cup \{w_{2i}, w_{n+2i}:0 \leqslant i \leqslant n/2-1\} \subseteq V(F_n)$(图 3 示例了 Flower Snark 相关图的独立集),则 $S$ 是 Flower Snark 相关图 $F_n$ 的一个独立集并且 $|S| = n/2 + n/2 + 2 \times (n/2) = 2n$,于是,$\alpha(F_n) \geqslant 2n$.

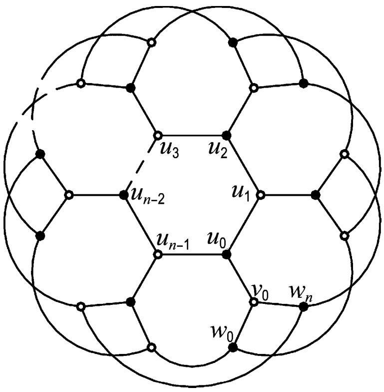


图 3　Flower Snark 相关图 $F_n$ 的独立集

Fig. 3　Independent set of Flower Snark related graph $F_n$

(2) 令 $S$ 为 Flower Snark 相关图 $F_n$ 的任意一个独立集,取 $x = |S \cap \{u_i, v_i:0 \leqslant i \leqslant n-1\}|$,$y = |S \cap \{w_i:0 \leqslant i \leqslant 2n-1\}|$,则 $|S| = x + y$.

由 $u_iv_i \in E(F_n)$ 得 $x = |S \cap \{u_i, v_i:0 \leqslant i \leqslant n-1\}| \leqslant n$,由 $\langle F_n, \{w_i:0 \leqslant i \leqslant 2n-1\}\rangle \cong C_{2n}$ 得 $y \leqslant n$,于是 $|S| = x + y \leqslant n + n = 2n$. 又由 $S$ 任意性,可知 $\alpha(F_n) \leqslant 2n$.

综合(1)、(2),得 Flower Snark 相关图 $F_n$($n$ 为不小于 4 的偶数) 的独立数 $\alpha(F_n) = 2n$.　□

## 3　多锥图 $W_{l,m}$ 的独立数

多锥图是由一个长度为 $m$ 的圈 $C_m$ 以及 $l$ 个孤立点组成的图,其中每个孤立点都与 $C_m$ 的所有点有边关联,记做 $W_{l,m}$,即 $V(W_{l,m}) = \{u_i:0 \leqslant i \leqslant l-1\} \cup \{v_i:0 \leqslant i \leqslant m-1\}$ 且 $E(W_{l,m}) = \{u_iv_j:0 \leqslant i \leqslant l-1, 0 \leqslant j \leqslant m-1\} \cup \{v_iv_{(i+1) \bmod m}:0 \leqslant i \leqslant m-1\}$. 下面讨论多锥图 $W_{l,m}$ 的独立数.

**定理 4**　多锥图 $W_{l,m}$ 的独立数 $\alpha(W_{l,m}) = \max\{l, \lfloor m/2 \rfloor\}$.

**证明**　首先给出多锥图 $W_{l,m}$ 的独立集,使得 $\alpha(W_{l,m}) \geqslant \max\{l, \lfloor m/2 \rfloor\}$,然后证明 $\alpha(W_{l,m}) \leqslant \max\{l, \lfloor m/2 \rfloor\}$,从而得到定理的结论.

(1) 当 $l \geqslant \lfloor m/2 \rfloor$时,取 $S = \{u_i:0 \leqslant i \leqslant l-1\} \subseteq V(W_{l,m})$,则 $S$ 是 $W_{l,m}$ 的一个独立集且 $|S| = l \geqslant \lfloor m/2 \rfloor$.

当 $l < \lfloor m/2 \rfloor$时,取 $S = \{v_{2i}:0 \leqslant i \leqslant (m-1)/2-1\} \subseteq V(W_{l,m})$,则 $S$ 是 $W_{l,m}$ 的一个独立集且 $|S| = \lfloor m/2 \rfloor > l$.

于是,有 $\alpha(W_{l,m}) \geqslant \max\{l, \lfloor m/2 \rfloor\}$.

(2) 令 $S$ 为多锥图 $W_{l,m}$ 的任意一个独立集,取 $x = |S \cap \{u_i:0 \leqslant i \leqslant l-1\}|$,$y = |S \cap \{v_i:0 \leqslant i \leqslant m-1\}|$,则 $|S| = x + y$ 且 $x \leqslant l$.

由 $\langle W_{l,m}, \{v_i:0 \leqslant i \leqslant m-1\}\rangle \cong C_m$ 可知 $y \leqslant \lfloor m/2 \rfloor$. 同时,由 $\{u_iv_j:0 \leqslant i \leqslant l-1, 0 \leqslant j \leqslant m-1\} \subseteq E(W_{l,m})$ 可知 $xy = 0$. 于是有如下整数规划:

$$\begin{aligned} &\max \quad x + y \\ &\text{s. t.} \quad x \leqslant l \\ &\qquad\quad y \leqslant \lfloor m/2 \rfloor \\ &\qquad\quad xy = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $x, y \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ 为自然数集).

该整数规划的最优值为 $\max\{l, \lfloor m/2 \rfloor\}$,从而 $|S| \leqslant \max\{l, \lfloor m/2 \rfloor\}$. 又由 $S$ 任意性,可知 $\alpha(W_{l,m}) \leqslant \max\{l, \lfloor m/2 \rfloor\}$.

综合(1)、(2),得 $\alpha(W_{l,m}) = \max\{l, \lfloor m/2 \rfloor\}$.

□

## 4　结　论

(1) 路径幂图 $P_n^k$ 的独立数 $\alpha(P_n^k) = \lceil n/(k+1) \rceil$;

(2) Flower Snark 图 $F_n$ 的独立数 $\alpha(F_n) = 2n-1$,$n$ 为不小于 5 的奇数;

(3) Flower Snark 相关图 $F_n$ 的独立数 $\alpha(F_n) = 2n$,$n$ 为不小于 4 的偶数;

(4) 多锥图 $W_{l,m}$ 的独立数 $\alpha(W_{l,m}) = \max\{l, \lfloor m/2 \rfloor\}$.

## 参考文献：


[1] WEST D B. **Introduction to Graph Theory**[M]. 2nd ed. Englewood Cliffs：Prentice Hall，2001

[2] GUO S G. On the spectral radius of unicyclic graphs with $n$ vertices and edge independence number $q$ [J]. **Ars Combinatoria**，2007，**83**：279-287

[3] KLAVZAR S. Some new bounds and exact results on the independence number of Cartesian product graphs [J]. **Ars Combinatoria**，2005，**74**：173-186

[4] MARTIN S P，POWELL J S，RALL D F. On the independence number of the Cartesian product of caterpillars [J]. **Ars Combinatoria**，2001，**60**：73-84

[5] PEPPER R. An upper bound on the independence number of benzenoid systems [J]. **Discrete Applied Mathematics**，2008，**156**(3)：607-619

[6] 李雨生，ROUSSEAU C C，臧文安. 独立数的一个下界[J]. 中国科学(A辑)，2001，**31**(10)：865-870

[7] LU M，LIU H Q，TIAN F. Laplacian spectral bounds for clique and independence numbers of graphs [J]. **Journal of Combinatorial Theory Series B**，2007，**97**(5)：726-732

[8] BERGER E，ZIV R. A note on the edge cover number and independence number in hypergraphs [J]. **Discrete Mathematics**，2008，**308**(12)：2649-2654

[9] EGAWA Y，ENOMOTO H，JENDROL D. Independence number and vertex-disjoint cycles [J]. **Discrete Mathematics**，2007，**307**(11-12)：1493-1498

[10] AMIN A T，HAKIMI S L. Upper bounds on the order of a clique of a graph [J]. **SIAM Journal of Applied Mathematics**，1972，**22**(4)：569-573

[11] 徐保根. 关于正则图的独立数的一点注记[J]. 华东交通大学学报，1994，**11**(4)：61-64


# Independence number of path power, Flower Snark and multi-cone graphs


XU Lian-cheng[*1,2]， YANG Yuan-sheng[3]， XIA Zun-quan[1]

( 1. School of Mathematical Sciences，Dalian University of Technology，Dalian 116024，China；
2. School of Information Science and Engineering，Shandong Normal University，Jinan 250014，China；
3. School of Computer Science and Technology，Dalian University of Technology，Dalian 116024，China )



**Abstract**：Independence number of the graph is an important parameter in graph theory. Let $G=(V(G), E(G))$ be a simple finite undirected graph. A sub-set $S$ of $V(G)$ is an independent set and any two vertices of $S$ aren't adjacent. So the independence number $\alpha(G)$ is the maximum cardinality of an independent set in $G$. The independence number of path power graph，Flower Shark and its related graph，multi-cone graph is studied. Firstly，the independent sets of them are constructed，so their lower bounds of the independence number are obtained. Secondly，it is proved that these bounds are also the upper bounds of those three graphs. Then，their exact values of the independence number are given.



**Key words**：independent set；independence number；path power graph；Flower Snark；multi-cone graph