第50卷第3期
2010年5月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 50, No. 3
May 2010

船舶、土木工程

文章编号：1000-8608(2010)03-0368-06

基于 NURBS 边界元法的波浪荷载计算研究

钱　昆，王言英*

（大连理工大学 船舶工程学院，辽宁 大连　116024）

摘要： 应用基于 NURBS 的边界元法对船舶在波浪中的运动和荷载计算进行了研究. 基于 NURBS 边界元法原理编制了相应的边界元法计算程序. 对构建线性方程组的配点法和 Galerkin 法进行了比较，验证了两种方法的计算精度，结果表明 Galerkin 法计算结果的精度要好于配点法. 使用基于 NURBS 的边界元法和频域三维移动脉动源格林函数，对一艘集装箱船在波浪中的运动和受到的波浪弯矩进行了计算，计算结果同已有的实验结果和数值计算结果符合良好.

关键词： 耐波性；波浪荷载；NURBS；边界元法

中图分类号： U661.32　　**文献标志码：** A

0　引　言

随着计算机技术的发展和结构分析方法的进步，舱段有限元分析、整船结构三维有限元分析方法逐渐成为船型开发中常用的设计手段. 船体表面的水动压力是有限元强度计算中要考虑的最重要的外荷载. 这就对波浪荷载和运动计算预报方法提出了新的要求. 因此，对船舶和海洋结构物在波浪中运动和荷载的分析和研究，具有重要的理论意义和实用价值. 目前，三维边界元法已成为分析船舶和浮式结构物与波浪相互作用的常用工具. 很多学者应用常数元法和高阶边界元法对波浪和低速物体作用的问题进行了研究. 然而经典的高阶边界元法计算单元边界上速度势的导数并不连续，影响计算精度. 使用基于样条的边界元法能够保证速度势和速度势导数在边界上的连续性，因此近年来发展很快. NURBS（非均匀有理 B 样条）是当前 CAD 系统中的主流几何表达形式，能够精确表达二次曲面，基于 NURBS 的边界元法由于能和 CAD 方便集成，具有很大的优势. 本文用基于 NURBS 的边界元法对船舶在波浪中的运动和荷载进行分析.

1　计算原理

在势流理论下，流场中的速度势 ϕ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{1}$$

基于线性假定，流场中总的速度势 ϕ 可按下式进行分解[1]：

$$\phi = (-Ux + \varphi_s) + \phi_t \tag{2}$$

其中 U 为船舶航行速度；φ_s 为定常兴波势，在耐波性计算中可以用叠模势代替；ϕ_t 为非定常势.

对于非定常势，基于线性假定，可以把速度势中的时间项显式分离出去

$$\phi_t = \mathrm{Re}(\varphi_t e^{-i\omega t}) \tag{3}$$

其中 φ_t 为速度势中的定常部分. ϕ_t 又可分解为入射势 ϕ_i、绕射势 ϕ_d 和辐射势 ϕ_r，即

$$\phi_t = \phi_i + \phi_d + \phi_r \tag{4}$$

入射波势 ϕ_i 是已知的，对于规则入射波

$$\phi_i = \mathrm{Re}(\varphi_0 e^{-i\omega t}) \tag{5}$$

式中

$$\varphi_0 = -\frac{igA}{\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh(kd)}e^{ikx\cos\beta} \tag{6}$$

进一步假设物体的运动是小量，则辐射势可以分

收稿日期： 2009-02-13；　**修回日期：** 2010-03-15.
基金项目： “八六三”国家高技术研究发展计划资助项目(2006AA09A104).
作者简介： 钱　昆(1975-)，男，博士，讲师，E-mail：qiankun@dlut.edu.cn；王言英*(1938-)，男，教授，博士生导师，E-mail：yygwang@dlut.edu.cn.

解为对应物体 6 个运动模态的 6 个分量叠加：

$$\phi_r = \mathrm{Re}\left(-\mathrm{i}\omega\sum_{j=1}^{6}\zeta_j\varphi_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right) \tag{7}$$

式中：ζ_j 为物体运动的第 j 个分量；φ_j 为第 j 个运动模态的辐射势. 相应地，绕射势也可以表达为

$$\phi_d = \mathrm{Re}(\varphi_7\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}) \tag{8}$$

定常入射势、绕射势和辐射势 $\varphi_j(j=0,1,\cdots,7)$ 除满足拉普拉斯方程，还需满足下列边界条件：

自由表面边界条件

$$-\omega^2\varphi_j+2U\mathrm{i}\omega\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}+U^2\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2}+g\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}=0 \quad (j=0,1,\cdots,7) \tag{9}$$

物面边界条件

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}=n_j \quad (j=1,2,\cdots,6)$$
$$\frac{\partial\varphi_7}{\partial n}=-\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} \tag{10}$$

底面边界条件

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}=0 \quad (j=0,1,\cdots,7) \tag{11}$$

且需满足适当的辐射边界条件，保证远方边界上有波浪传出.

应用满足自由水面边界条件、海底边界条件和无限远辐射边界条件的格林函数 G，可以只在物体表面积分，得到关于绕射势和辐射势的积分方程

$$C\varphi_j=\iint_{S_b}\left(\frac{\partial G}{\partial n}\varphi_j-G\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}\right)\mathrm{d}S-\frac{1}{g}\int_{WL}\left[2U\mathrm{i}\omega\varphi_jG-U^2\left(\varphi_j\frac{\partial G}{\partial x}-G\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\right)\right]\mathrm{d}y \tag{12}$$

式中 C 为物面的固角. 求解此积分方程，可以得到流场中的速度势.

得到流场中的速度势后，可应用伯努利公式计算流体压力，将伯努利公式中各项展开到一阶，有

$$p=-\rho gz-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\rho(U-\nabla\varphi_s)\cdot\nabla\phi \tag{13}$$

将流体动压力在平均湿表面上积分，即可得到作用在物体上的总波浪力，将得到的波浪力代入物体的运动方程，即可得到物体在波浪中的运动和荷载.

2　NURBS 边界元法数学模型

对于复杂任意物体的积分表面，总可以把它分解成多个光滑曲面的组合，每个曲面都可以应用 NURBS 曲面的形式表达. 一个 $k\times l$ 次 NURBS 曲面的有理分式定义如下[2]：

$$\boldsymbol{p}(u,v)=\frac{\boldsymbol{X}}{W}=\frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}w_{i,j}\boldsymbol{B}_{i,j}N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}w_{i,j}N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)} \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{p}(u,v)$ 为 (u,v) 参数表达下的曲面点；$\boldsymbol{B}_{i,j}$ 为控制顶点网格，$i=0,1,\cdots,m$，$j=0,1,\cdots,n$；$w_{i,j}$ 为与控制顶点 $\boldsymbol{B}_{i,j}$ 相联系的权因子；$N_{i,k}(u)$ 和 $N_{j,l}(v)$ 分别为 k 和 l 次 B 样条基函数.

NURBS 曲面的形式不仅可以表达物体的几何形状，也可以用来表达物体表面上的速度势[3]. 应用与描述物体表面相同的方法，把速度势函数表达成二维参数空间上的 NURBS 曲面形式：

$$\phi(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}w_{i,j}\phi_{i,j}N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}w_{i,j}N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)} \tag{15}$$

其中 $\phi_{i,j}$ 为速度势的控制系数，$w_{i,j}$ 为控制点的权值. 在边界元法计算中，使用 NURBS 形式对表面速度势进行离散，对表面速度势函数 ϕ 的求解就转换成了对速度势控制系数 $\phi_{i,j}$ 的求解.

典型的水动力问题边界积分方程为

$$C(p)\phi(p)=\iint_S\phi(q)\frac{\partial G(p,q)}{\partial n}\mathrm{d}S(q)-\iint_S G(p,q)\frac{\partial\phi(q)}{\partial n}\mathrm{d}S(q) \tag{16}$$

以上式为例描述基于 NURBS 边界元法的原理，将速度势函数表达式(15) 代入到积分方程(16) 中，可得

$$C(p)\frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}w_{i,j}\phi_{i,j}N_{i,k}(u_p)N_{j,l}(v_p)}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}w_{i,j}N_{i,k}(u_p)N_{j,l}(v_p)}-\iint_S\frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}w_{i,j}\phi_{i,j}N_{i,k}(u_q)N_{j,l}(v_q)}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}w_{i,j}N_{i,k}(u_q)N_{j,l}(v_q)}\frac{\partial G(p,q)}{\partial n}\mathrm{d}S(q)=-\iint_S G(p,q)\frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}w_{i,j}\phi'_{i,j}N_{i,k}(u_q)N_{j,l}(v_q)}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}w_{i,j}N_{i,k}(u_q)N_{j,l}(v_q)}\mathrm{d}S(q) \tag{17}$$

上式中积分可以用 Gauss-Legendre 法计算. 通过求解 $\phi_{i,j}$ 即可得到整个流场中的速度势.

通常基于 NURBS 的边界元法中速度势使用式(15)表达,这样就需要预先设定速度势控制点的权值 $w_{i,j}$. 但实际计算中速度势的分布形式是未知的,预先设定的速度势控制点的权值并不一定合适,反而增加了计算负担. 因此在计算中可以令权值 $w_{i,j}$ 全部为1,即不使用有理形式表达速度势 ϕ. 这样式(15)就简化为

$$\phi(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\phi_{i,j}N_{i,k}(u)N_{j,l}(v) \tag{18}$$

应用速度势 ϕ 的表达式(18),积分方程(17)可以简化为

$$C(p)\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\phi_{i,j}N_{i,k}(u_p)N_{j,l}(v_p)-\iint_S\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\phi_{i,j}N_{i,k}(u_q)N_{j,l}(v_q)\frac{\partial G(p,q)}{\partial n}\mathrm{d}S(q)=-\iint_S G(p,q)\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\phi'_{i,j}N_{i,k}(u_q)N_{j,l}(v_q)\mathrm{d}S(q) \tag{19}$$

使用这种处理方法,面元上的几何形状仍然保持使用 NURBS 的表达形式,而速度势的表达基于普通的非均匀 B 样条形式. 这样可以减少计算的消耗. 更进一步,速度势表达可以在 uv 参数空间使用与几何表达不同的网格. 这样的好处是可以在保证几何模型精确性的基础上灵活改变速度势网格的密度,有助于提高计算效率,缺点是计算速度势所用到的单元上的 B 样条基函数和几何曲面上的 B 样条基函数不再是相同的,必须重新计算,增加了程序的计算量. 因此在编制程序时,可以预先计算各单元内的数值积分点的坐标和影响系数,由于边界元法中要反复计算一个单元对其他点的影响系数,这种处理方法能够提高计算速度.

用 NURBS 形式表达的每个曲面上共有 $(M_p+k-1)\times(N_p+l-1)$ 个未知量(p 为曲面编号),而只有 $M_p\times N_p$ 个网格,所以要求解方程必须增加控制点数. 一种解决方法是使用配点法,在曲面上添加 $(M_p+k-1)\times(N_p+l-1)-M_p\times N_p$ 个点作为控制点,这样就可以直接解线性方程组得到结果. 但如果控制点的位置选择不合理会影响解的精度. 通常曲面边界上流场变化幅度比较大,所以一般把增加的控制点置于曲面的边界上.

另一种解决方法是使用加权余量法,通过使积分方程的残差最小来建立方程组. 在本文中,对离散的积分方程使用 Galerkin 法,使残差直接在参数空间对应的 NURBS 样条函数上达到最小,可以得到可计算的线性方程组.

方程的残差定义为

$$r=C(p)\phi(p)-\iint_S\left(\frac{\partial G(q,p)}{\partial n}\phi(q)-G(q,p)\frac{\partial\phi(q)}{\partial n}\right)\mathrm{d}S(q) \tag{20}$$

离散化的残差可表示为

$$r(u,v)=C(p)\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\phi_{i,j}N_i(u)N_j(v)-\iint_S\left[\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\partial G(u,v)}{\partial n}\phi_{i,j}-G(u,v)\frac{\partial\phi_{i,j}}{\partial n}\right)\times N_i(u)N_j(v)\right]\mathrm{d}S \tag{21}$$

对离散的积分方程使用 Galerkin 法得

$$\sum_{p=1}^{P}\iint_{\Omega^p}r(u_0,v_0)N_i^p(u_0)N_j^p(v_0)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0 \tag{22}$$

式中:Ω^p 为第 p 个曲面片;P 为曲面总数. 对上式中的外部积分,采用高斯积分法进行数值积分得

$$\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=0}^{m_p}\sum_{j=0}^{n_p}\sum_{a=1}^{N_g}\sum_{b=1}^{N_g}\left[r(u_a,v_b)\mid\boldsymbol{J}_n\mid\times W_aW_bN_i^p(u_a)N_j^p(v_b)\right]=0 \tag{23}$$

式中:N_g 为高斯积分点个数;W_a、W_b 为高斯积分的权值. 最终可以得到一个维数为 $q\times q$ 的线性方程组

$$\boldsymbol{A}_{q\times q}\boldsymbol{\phi}_{q\times1}=\boldsymbol{B}_{q\times1} \tag{24}$$

q 为所有未知量的总数,

$$q=\sum_{p=1}^{P}\left[(M_p+k_p-1)\times(N_p+l_p-1)\right] \tag{25}$$

从而可解出方程的系数 $\phi_{i,j}$.

3 算例分析

以上介绍了基于 NURBS 的边界元法的计算原理. 作为算例,对无限流场中匀速运动的圆球体绕流问题进行了研究. 圆球的半径为 1 m. 运动速度为 1 m/s,沿 x 方向. 使用二次 NURBS 样条建立的圆球模型和计算坐标的选取如图 1 所示.

用 NURBS 方法计算了球体表面上各点的速度,并把它和理论解进行比较. 根据对称性,计算中在 1/4 球面上布置 2×4 的网格. 图 2 给出了 x 从 0 到 1 的区域内的流体速度. 从图中可以看出,用基于 NURBS 的边界元法计算的结果很精确. 而 Galerkin 法计算结果的精度要好于配点法.

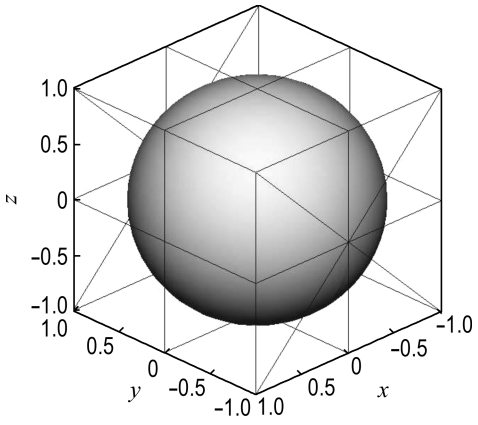


图 1　计算圆球和 NURBS 网格

Fig. 1　Computed sphere and NURBS grids

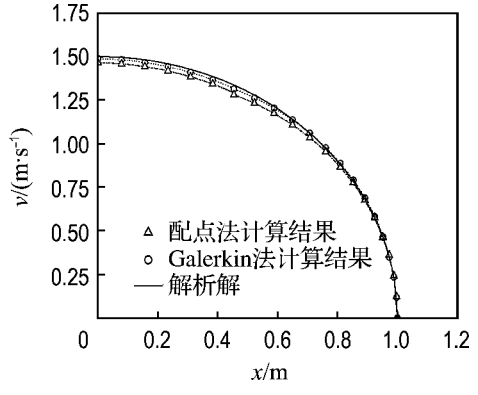


图 2　圆球绕流表面速度分布

Fig. 2　Flow velocity distribution on a sphere surface

对于船舶在波浪中的运动和荷载计算情况，应用基于 NURBS 的边界元法和频域三维移动脉动源的格林函数计算了集装箱船 S-175 在波浪中的运动和荷载. 频域三维移动脉动源的格林函数采用分区积分和自适应步长辛普森积分方法计算[4]. S-175 船型是 ITTC 建议进行耐波性计算验证的标准船型[5]，其主尺度和计算参数见表 1.

表 1　船体主尺度和计算参数

Tab. 1　Main principals and computation parameters

尺度与系数	数值
垂线间长/m	175.0
型宽/m	25.4
型深/m	16.4
吃水/m	9.5
排水量/t	24 742
方形系数 C_b	0.572
重心高度(距水面)/m	−0.02
重心位置(距船中)/m	2.48
横向惯性半径/m	8.33
纵向惯性半径/m	42

计算中的几何模型网格如图 3 所示. 整个船体用 NURBS 曲面表达，几何模型的总网格数为 294(21×14). 平均湿表面上的计算网格数为 210(21×10). 计算采用两种不同密度的速度势控制网格，控制网格 1 使用控制点数为 312(24×13)，控制网格 2 使用控制点数为 198(18×11).

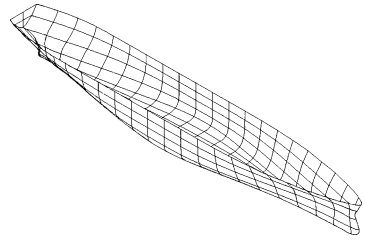


图 3　S-175 计算网格

Fig. 3　Computation grid of ship S-175

对船舶在迎浪状态下的运动进行了计算，船舶在各不同波浪频率下的升沉和纵摇运动响应计算结果及其与实验结果和 SWAN2 线性算法[6]的计算结果比较见图 4 和 5. 计算中取 $Fr=0.275$. 从计算结果可以看出，两种网格的计算结果符合很好，说明计算收敛很快. 本文计算结果和已有的实验结果和数值计算结果大致上符合良好，尤其在高频段的计算和实验结果很接近；在低频部分，本文结果和 SWAN2 的计算结果都和实验值有比较大的差距. 由于本文计算结果只是线性势流理论结果，而船舶的耐波性问题是一个受多种因素影响的复杂问题，计算和实验结果出现偏差是难免的，本文计算结果的精度能够满足实际工程应用要求.

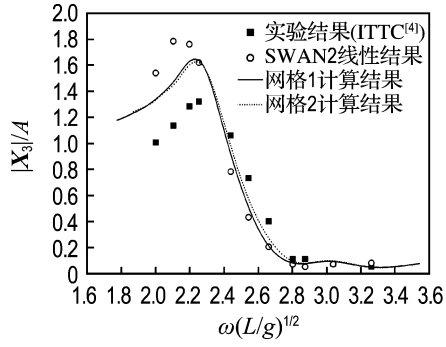


图 4　S-175 迎浪升沉运动响应函数计算结果

Fig. 4　RAO of heave motion for ship S-175 in head wave

图 6 和 7 给出了船舶迎浪运动时的波浪弯矩

和剪力响应函数计算结果，并与实验值和 STF 法计算结果[7]进行了比较. 可见本文的计算结果与实验结果大致上符合，可以满足工程应用的要求.

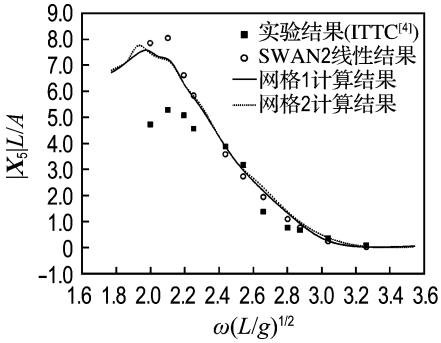


图 5 S-175 迎浪纵摇运动响应函数计算结果

Fig. 5 RAO of pitch motion for ship S-175 in head wave

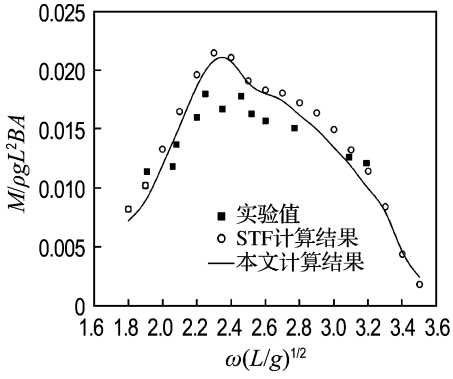


图 6 S-175 迎浪中剖面垂向波浪弯矩响应函数

Fig. 6 RAO of vertical bending moment on the midship profile for ship S-175 in head wave

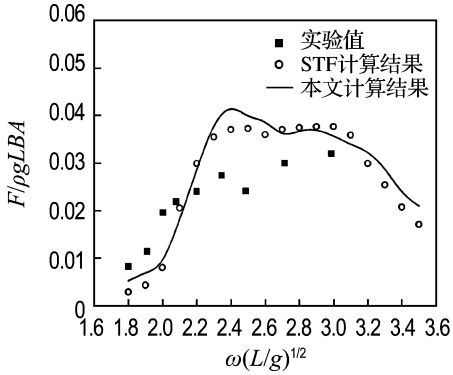
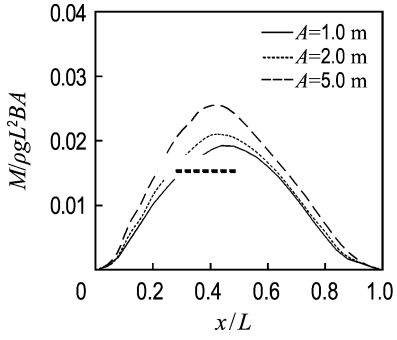


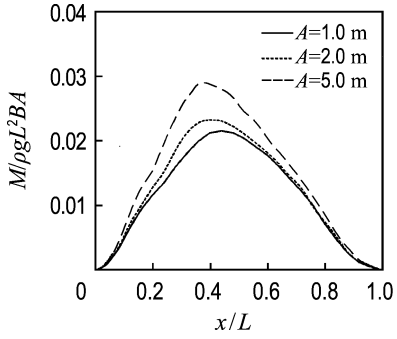
图 7 S-175 迎浪中剖面垂向波浪剪力响应函数

Fig. 7 RAO of vertical shear force on the midship profile for ship S-175 in head wave

图 8 是用基于 NURBS 的边界元法计算的 S-175在迎浪状态产生最大弯矩时的弯矩图(Fr=0.200 和 Fr=0.275). 考虑到大幅波浪的非线性影响，在计算弯矩时，可以将计算得到的平均湿表面上的波浪力扩展到实际的湿表面上积分，这样可以考虑外飘等非线性因素的影响. 根据线性计算结果可以得到船体的位置和沿水线处自由表面的高度. 船舶受到的 Frude-Krylov 力可以在瞬时湿表面上计算，而绕射力和辐射力可以使用简化的线性插值方法转换到瞬时湿表面上[8]. 计算中插值在船体不同横剖面上进行，当瞬时波面高于静水吃水线时，将平均湿表面的波浪力线性地插值到瞬时波面高度，当瞬时波面低于静水吃水线时，将瞬时波面上的波浪力设为零. 根据沿船长方向质量分布的情况，对船体应用达朗伯原理，即可积分得到船体上的剪力和弯矩. 计算结果表明船体受到的波浪弯矩随航速的提高而增加. 当波幅较大时，船体受到的弯矩受到非线性因素的影响，增加速度要比线性状态的更大.



(a) Fr=0.200, T=11.5 s



(b) Fr=0.275, T=11.5 s

图 8 迎浪状态 S-175 的最大弯矩图

Fig. 8 Distribution of maximum vertical bending moment along ship S-175 in head wave

4 结 论

本文研究了基于 NURBS 的边界元法在船舶

耐波性方面的应用，编制了基于 NURBS 的边界元法计算程序. 对建立线性方程组的配点法和 Galerkin 法的计算结果进行了比较. 结果表明 Galerkin 法计算结果的精度要好于配点法，且两种方法计算的结果都很精确. 说明基于 NURBS 的边界元法是一个高效准确的数值计算方法，是高效准确计算波浪中浮体受力和运动的基础. 对船舶运动和波浪荷载的计算结果比较可以看出，使用基于 NURBS 的边界元法程序对集装箱船 S-175的运动和荷载计算是准确的. 计算得到的运动和波浪荷载响应同实验值和其他计算结果符合较好. 这说明本文的方法是一种实用的计算三维物体在波浪中运动和荷载的方法.

参考文献：

[1] 刘应中，缪国平. 船舶在波浪上的运动理论[M]. 上海：上海交通大学出版社，1987

[2] 孙家广，杨长贵. 计算机图形学[M]. 3 版. 北京：清华大学出版社，1999

[3] TENG Bin, BAI Wei. A B-spline based BEM and its application in predicting wave force on 3D bodies [J]. **China Ocean Engineering**, 1999, **13**(3):257-264

[4] QIAN Kun, WANG Yan-ying. Analysis of wave load on a semi-submersible platform [J]. **China Ocean Engineering**, 2002, **16**(3):395-406

[5] ITTC. Report of the seakeeping committee [R]. Goteborg:ITTC, 1984:458-534

[6] KRING D, HUANG Y F, SCLAVOUNOS P, *et al*. Nonlinear ship motions and wave-induced loads by a Rankine method [C] // **Proceedings of 21st Symposium on Naval Hydrodynamics**. Trondheim:The National Academic Press, 1996: 16-32

[7] 徐能兹，沈进威，陈瑞章，等. S-175 集装箱船舶波浪载荷的船模试验与线性切片理论计算的比较[J]. 中国造船，1984(2)：67-78

[8] DUAN W, DAI Y. Hydrodynamic analysis of non-wallsided floating body by time-domain method [C] // **Proceedings of the 16th OMAE**. Yokohama: [s n], 1997

Study of calculation of wave loads using NURBS-based BEM

QIAN Kun, WANG Yan-ying*

(Department of Naval Architecture, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Using the NURBS-based boundary element method, motions and wave loads of ship on waves are calculated. An efficient NURBS approach based on boundary element program is developed firstly and the accuracy of the collocation point method and the Galerkin method are compared. The results show that the Galerkin method is more accurate than the collocation point method. The NURBS-based boundary element method and the Green-function of three-dimensional translating and pulsing source are used in the calculation of motions and wave-induced bending moments on a container ship with forward speed. The calculation results agree well with the experimental results and other numerical results.

Key words: seakeeping; wave load; NURBS; boundary element method (BEM)