第50卷第3期
2010年5月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 50, No. 3
May 2010

文章编号：1000-8608(2010)03-0374-05

混合算法在04公桥规徐变系数曲线拟合中应用

李斐然*，潘盛山，张　哲

（大连理工大学 土木工程学院，辽宁 大连　116024）

摘要： 采用混合算法将04公桥规附录F中给出的混凝土徐变系数幂函数表达式拟合为指数函数表达式，从而得到了徐变计算的递推式.即首先用遗传模拟退火算法对徐变系数曲线进行初步拟合，估计传统非线性迭代计算中参数的初值；再通过基于Levenberg-Marquardt法和Gauss-Newton法的非线性最小二乘法对徐变系数进行精确的拟合；最后通过结果分析确定了指数函数表达式的最终形式.混合算法解决了应用单一算法在拟合徐变系数曲线上的局限性，有着良好的通用性、鲁棒性和精度，拟合结果可直接应用于采用递推法计算混凝土徐变的有限元程序中.

关键词： 徐变系数；曲线拟合；混合算法；遗传模拟退火算法；非线性最小二乘法

中图分类号： U442.51　　**文献标志码：** A

0　引　言

混凝土徐变分析的实质是求既有初内力持续作用下变形发展及内力重分布的效应，故结构的当前状态与以往的应力历史有关[1].在杆系结构有限元中通常采用拟弹性逐步增量分析法考虑徐变影响，即在每一个时间间隔，对当时已形成的结构进行一次全面的分析，求出该时间间隔内产生的全部节点的位移增量和节点力增量，上项增量与本时间间隔开始时的节点位移及节点力值相加即得到本时间间隔终了时，或下一个时间间隔开始时的节点位移及节点力状态[2].利用上述理论进行计算时，需要存储逐个时段步进分析中所有单元在各时段的状态值，在计算施工阶段较多的大型结构时会严重影响求解速度.而递推法通过指数函数表达式就能够反映应力历史对本阶段的影响，不需要记录增量历史，因此广泛应用于桥梁计算程序[2,3].

本文针对新公路桥梁规范中提出的幂函数徐变表达式，提出适合于递推法的指数函数表达式，为徐变计算的程序实现提供依据.

1　徐变系数的指数函数表达式

《公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范(JTG D62—2004)》[4]（简称04公桥规）中混凝土徐变系数的计算采用名义徐变系数 ϕ_0 和加载后徐变随时间发展的系数 $\beta_c(t-t_0)$ 的乘积来表示：

$$\phi(t,t_0)=\phi_0\beta_c(t-t_0) \tag{1}$$

$$\beta_c(t-t_0)=\left[\frac{(t-t_0)/t_1}{\beta_H+(t-t_0)/t_1}\right]^{0.3} \tag{2}$$

$$\beta_H=150\left[1+\left(1.2\frac{H_r}{H_{r0}}\right)^{18}\right]\frac{h}{h_0}+250\leqslant 1\,500 \tag{3}$$

式中：t_0 为加载时的混凝土龄期，d；t 为计算考虑时刻的混凝土龄期，d；$\phi(t,t_0)$ 为加载龄期为 t_0、计算考虑龄期为 t 时的混凝土徐变系数；ϕ_0 为名义徐变系数，可查表获得；β_c 为加载后徐变随时间的发展系数；β_H 为与环境年平均相对湿度 H_r(%)、构件理论厚度 h(mm) 相关的系数；$t_1=1$ d，$H_{r0}=100\%$，$h_0=100$ mm.

与《公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设

收稿日期： 2008-03-04；　**修回日期：** 2010-01-04.
基金项目： 交通部西部交通建设科技资助项目(200631882350).
作者简介： 李斐然*(1983-)，男，博士生，E-mail：lifeiran@sina.com；张　哲(1944-)，男，教授，博士生导师.

计规范(JTJ 023—85)》(简称 85 公桥规)中徐变的估算方法相比,04 公桥规明确给出了各个影响参数的解析表达式,不需要查图表,可方便进行计算机编程.但 04 公桥规的徐变系数是以 $t-t_0$ 为自变量的幂函数,不能直接应用于递推法的有限元徐变计算程序编制,因此同样需要对徐变系数进行指数函数表达式的拟合.

04 公桥规中名义徐变系数 ϕ_0 为相对于混凝土龄期 t 的常数,因此对徐变系数的拟合就转变为对加载后徐变随时间发展的系数 $\beta_c(t-t_0)$ 的拟合,文献[5]选择 $\beta_c(t-t_0)=\sum_{i=1}^{k}C_i e^{q_i(t-t_0)}$ ($k=3$) 的指数函数形式进行拟合,把徐变随时间发展的系数和时间的函数曲线按加载时间分成 0～60 d、60～1 100 d、1 100～1 850 d 的 3 个时间段,分别采用分段拟线性回归的方法估计待拟合参数的初值,使用基于 Gauss-Newton 法的非线性最小二乘法迭代计算得到最终的拟合结果.这种方法具有函数表达形式简单、计算过程明确、算法易于编程实现等优点.但该函数表达式存在三点不足:

(1)04 公桥规中式(2),当 $t=t_0$ 时,$\beta_c(t-t_0)=0$,而采用上述表达式会出现拟合后的函数在 $t=t_0$ 时不为零的可能;

(2) 曲线拟合时选取的时长仅为 1 850 d,在更长的时间后如 6 000 d,会出现 $\beta_c>1$ 的结果,显然这样的结果是错误的;

(3) 采用分段拟线性回归法时,有可能在某个分段出现导数小于零的情况,需要重新分段.

本文选择 $\beta_c(t-t_0)=\sum_{i=1}^{k}C_i(1-e^{q_i(t-t_0)})$(其中 C_i、q_i 为待求的实参数,且 $\sum_{i=1}^{k}C_i=1$,$q_i\leqslant 0$)的指数函数表达式进行整体拟合[6],从而避免了上述问题,确保了 $\beta_c(t-t_0)\in[0,1)$,但加入未知常数项的表达式使得拟线性回归的方法失效,因此有必要寻找一种新的方法确定各项系数.

遗传算法、模拟退火算法等现代智能算法具有强大的全局寻优能力,求解过程不依赖初值,但求解局部最优解往往需要花费过多的时间.采用非线性最小二乘法进行曲线拟合能获得局部最优解,但待估系数的初值选择不当会使得计算不能收敛,而且对初值有较为严格的要求.本文结合这些算法的优点提出了混合算法,即采用遗传模拟退火算法对曲线进行初步的拟合,获得待估系数的初值,采用基于 Levenberg-Marquardt 法和 Gauss-Newton 法的非线性最小二乘法获得最终的精确结果.

2　基于遗传模拟退火算法的曲线初步拟合

遗传算法(GA)是模拟生物界自然选择和自然遗传机制而形成的一种自适应全局优化概率搜索算法[7],其本质是一个具有定向制导的随机搜索技术.其具有不容易陷入局部最优,能以很大的概率找到全局最优解,不需要辅助信息,易于同其他优化方法结合等优点,但局部搜索能力不足,容易出现过早收敛,即它可以用极快的速度达到最优解的 90%左右,但要得到真正的最优解则要花费很长时间.

模拟退火算法(SA)源于对固体退火过程的直接简单模拟而建立起的一种通用随机搜索技术[8],适合于局部搜索算法的扩展,它不同于局部搜索之处是其以一定的概率选择邻域中费用值大的状态.从理论上讲,SA 在初始温度足够高、温度下降足够慢的条件下,能以概率 1 收敛到全局最优值.模拟退火算法在搜索过程中,能够随机接受一些劣化解,具有较强的局部搜索能力,却不能使搜索过程进入期望值的区域,且迭代速度较慢.

单纯使用 GA 拟合徐变系数曲线由于过早收敛使得拟合结果范围较大,在进行曲线的进一步拟合时可能还会造成不收敛的现象;单纯使用 SA 拟合徐变系数曲线需要的求解时间过长,效率较低.GA-SA 针对 GA 局部搜索能力方面的不足和 SA 在全局搜索能力方面的不足,将两者有机结合、优势互补,可实现机制的融合、结构的互补、操作的结合、行为的互补,削弱参数选择的苛刻性[9].MATLAB 的遗传算法工具箱使用 M 文件建立了一套实现广泛领域遗传算法的通用工具[10],本文基于此工具包加入模拟退火策略改进遗传算法形成 GA-SA,计算结果表明,使用 GA-SA 拟合徐变系数曲线得到的结果能以很高的概率接近精确拟合的结果.GA-SA 的计算步骤[11,12]如下:

步骤 1　初始化群体,设定种群规模

$POP(k)$，群体规模 $MAXPOP$，退火初始温度 t_0，交叉率 P_c，变异率 P_m 等参数；

步骤 2 对群体 $POP(k)$ 中每一个染色体的邻域进行随机选择，按模拟退火中的接受概率接受或者拒绝，从而得到新的群体 $NEWPOP1(k+1)$；

步骤 3 计算 $NEWPOP1(k+1)$ 每一个体的适应度 f_k，由适应度决定的概率分布从 $NEWPOP1(k+1)$ 中随机选 $MAXPOP$ 个染色体形成种群 $NEWPOP2(k+1)$；

步骤 4 按照遗传算法进行交叉、变异；

步骤 5 判断是否满足收敛准则，是则停止计算，输出计算结果，否则按照步长降低温度，重复步骤 2～5.

以 $40\% \leqslant H_r < 70\%$，$h=100$ mm 时对应的曲线为例，令 $y=\beta_c(t-t_0)$，$x=(t-t_0)/t_1$，得到 $y=[x/(400.0847+x)]^{0.3}$，为了确定指数表达式 $\sum_{i=1}^{k} C_i(1-e^{q_i(t-t_0)})$（其中 $\sum_{i=1}^{k} C_i=1, q_i \leqslant 0$）中 k 取何值能达到较优的拟合效果，分别取 $k=2$，3，4 进行对比. 遗传模拟退火算法的相关参数设置：迭代次数为 1 000；种群规模为 100；交叉率 $P_c=0.8$；变异率 $P_m=0.04$；退火初始温度为 1 000，结束温度为 0.001，步长为 0.01. 计算结果如表 1 所示.

表 1 遗传模拟退火算法的曲线初步拟合结果

Tab. 1 Initial results of curve fitting by the genetic simulated annealing algorithm

k	C_1	q_1	C_2	$q_2/10^{-2}$	C_3	$q_3/10^{-3}$	C_4	$q_4/10^{-4}$
2	0.755 7	−0.019 6	0.244 3	−0.072 6	—	—	—	—
3	0.795 5	−0.011 3	8.813 4	−0.101 4	−8.608 9	−1.025 0	—	—
4	0.357 1	−0.159 4	0.246 0	−1.952 0	0.318 5	−10.802 9	0.078 4	−2.496 7

3 基于非线性最小二乘法的曲线精确拟合

遗传模拟退火算法能渐进地收敛于最优解，更进一步的优化则需要采用非线性最小二乘法进行. 求解非线性最小二乘问题的基本思想是将非线性问题转化为求解一系列线性最小二乘问题. 设 $x^{(k)}$ 是解的第 k 次近似，在 $x^{(k)}$ 处将 $f(x)$ 线性化，运用线性最小二乘的求解方法得到新的极值点 $x^{(k+1)}$，重复上述过程直到满足收敛条件[13,14]. $x^{(k+1)}$ 的迭代求解常用的有 Gauss-Newton(G-N) 法和 Levenberg-Marquardt(L-M) 法. G-N 迭代法是将 $f(x)$ 在点 $x^{(k)}$ 处展开成一阶 Taylor 多项式：

$$f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(k)})^{\mathrm{T}}$$

令 $\boldsymbol{A}_k=\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})$，按照线性最小二乘法的公式进行转换得到 G-N 法的迭代式：

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - (\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k)^{-1}\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}^{(k)}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k$ 有时候会出现奇异或接近奇异的情况，这时求 $(\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k)^{-1}$ 就会遇到很大的困难，因此人们对最小二乘法进行修正，其基本技巧就是把一个正定对角矩阵加入到 $\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k$ 中，改变原矩阵的特征值结构，使其变成条件数较好的对称正定矩阵，从而形成了 L-M 法迭代式：

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - (\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k + \alpha_k\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}^{(k)}$$

式中：$\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵；α_k 为一个正实数，当 α_k 为零时即为 G-N 法.

利用 MATLAB 提供的曲线拟合工具包，使用遗传模拟退火算法的计算结果作为非线性最小二乘法的参数迭代计算的初值，先使用 L-M 法进行迭代，收敛后利用收敛的结果作为 G-N 法迭代计算的初值，得到 $40\% \leqslant H_r < 70\%$，$h=100$ mm 时最终的拟合结果，如表 2 所示.

表 2 非线性最小二乘法的曲线拟合结果

Tab. 2 Results of curve fitting by the nonlinear least square method

k	C_1	q_1	C_2	$q_2/10^{-2}$	C_3	$q_3/10^{-3}$	C_4	$q_4/10^{-4}$
2	0.754 9	−0.019 8	0.245 1	−0.072 9	—	—	—	—
3	0.467 2	−0.095 6	0.410 5	−0.407 3	0.122 3	−0.372 0	—	—
4	0.309 7	−0.361 0	0.330 9	−1.417 0	0.274 3	−2.222 0	0.085 1	−2.688 0

4　徐变系数的拟合结果分析

按照 04 公桥规，当 $40\% \leqslant H_r < 70\%$，$h=100$ mm 时，加载后徐变随时间发展的系数解析表达式为 $\beta_c(t-t_0)=[(t-t_0)/(400.084\ 7+(t-t_0))]^{0.3}$. 由于徐变在 0～60 d 变换比较剧烈，拟合时最为困难，取此段时间作为横坐标，将原始函数曲线、本文的曲线拟合结果和文献[5]的结果进行对比如图 1 所示.

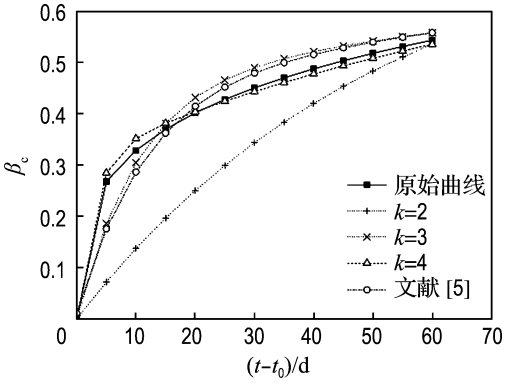

图 1　各指数函数拟合结果对比

Fig. 1　Contrast of each exponential function curve fitting results

图 1 表明，混合算法求出的解析表达式与规范曲线吻合良好，随着 k 的增大，曲线的拟合精度显著提高，但同时增加了待求参数的数目，使得计算时长增加. 当 $k=3$ 时，本文的计算结果保持了与文献[5]的拟合结果基本相同的精度，同时避免了文献[5]的表达式在原点处不为零，在无穷大处计算结果失真的问题；当 $k=4$ 时，相关系数的平方为 0.999 3，有着良好的精度，能满足工程上对徐变计算的要求，因此本文后续计算中均采用 $k=4$ 进行求解.

使用混合算法将 04 公桥规的徐变系数拟合成指数函数表达式：$\phi(t,t_0)=\phi_0\sum_{i=1}^{4}C_i(1-e^{q_i(t-t_0)})$（其中 $\sum_{i=1}^{4}C_i=1, q_i\leqslant 0$）. 各系数的拟合结果如表 3 所示. 表中年平均相对湿度 $40\% \leqslant H_r < 70\%$ 时，取 $H_r=55\%$；当 $70\% \leqslant H_r < 99\%$ 时，取 $H_r=80\%$. 构件的实际理论厚度为表列中间值时，各系数按照直线内插法求得.

表 3　曲线拟合系数取值

Tab. 3　Values of curve fitting coefficients

H_r	h/mm	C_1	q_1	C_2	$q_2/10^{-2}$	C_3	$q_3/10^{-3}$	C_4	$q_4/10^{-4}$	R^2
55%	100	0.309 7	−0.361 0	0.330 9	−1.417 0	0.274 3	−2.222 0	0.085 1	−2.688 0	0.999 3
	200	0.290 8	−0.325 0	0.311 5	−1.258 0	0.292 8	−1.970 0	0.104 9	−2.481 0	0.999 5
	300	0.276 7	−0.301 8	0.296 3	−1.159 0	0.304 8	−1.801 0	0.122 2	−2.329 0	0.999 5
	600	0.247 7	−0.266 6	0.263 9	−1.011 0	0.322 2	−1.518 0	0.166 2	−2.038 0	0.999 7
	≥833[1)]	0.232 6	−0.252 3	0.246 9	−0.953 7	0.326 1	−1.396 0	0.194 4	−1.893 0	0.999 7
80%	100	0.300 0	−0.341 2	0.321 2	−1.328 0	0.284 1	−2.083 0	0.094 7	−2.576 0	0.999 4
	200	0.277 3	−0.302 7	0.296 9	−1.163 0	0.304 4	−1.807 0	0.121 4	−2.334 0	0.999 5
	300	0.261 0	−0.280 7	0.278 7	−1.071 0	0.315 6	−1.639 0	0.144 7	−2.169 0	0.999 6
	≥564[1)]	0.232 8	−0.251 4	0.246 6	−0.953 9	0.326 1	−1.398 0	0.194 5	−1.895 0	0.999 7
	600[1)]	0.232 8	−0.251 4	0.246 6	−0.953 9	0.326 1	−1.398 0	0.194 5	−1.895 0	0.999 7

注：1)其中当 $\beta_H>1\ 500$ 时，取 $\beta_H=1\ 500$

5　结　论

(1)本文提出的指数函数形式解析表达式具有良好的特性，在端点处不会出现奇异，使用混合算法求解时取 $k=4$ 能保证相关系数的平方不低于 0.999 0，与 04 公桥规中的徐变函数曲线吻合良好.

(2)遗传模拟退火算法与非线性最小二乘法结合形成的混合算法不需要对待估区间进行分段处理，解决了非线性迭代初值的选择问题，具有很高的通用性、鲁棒性和精确度，同时可应用于其他相关规范中徐变曲线的指数函数表达式拟合.

(3)本文的研究成果可直接应用于 04 公桥规徐变计算的程序实现.

参考文献：

[1] 段明德.《公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范》徐变系数的计算和应用[J]. 中国公路学报，1998，**11**(4)：70-76

[2] 肖汝诚. 桥梁结构分析及程序系统[M]. 北京：人民交通出版社，2002

[3] 陈德伟，郑信光，项海帆. 混凝土斜拉桥的施工控制[J]. 土木工程学报，1993，**26**(1)：1-11

[4] 中华人民共和国交通部. JTG D62—2004 公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范[S]. 北京：人民交通出版社，2004

[5] 李学文，姚康宁，颜东煌. 利用最小二乘法实现 2004 规范徐变系数的指数函数拟合[J]. 长沙交通学院学报，2006，**22**(3)：20-24

[6] 宁平华，鲍卫刚. 公路桥涵设计规范徐变系数的解析[J]. 公路，1990(3)：6-8

[7] GOLDBERG D E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning** [M]. MA: Addison-Wesley, 1989

[8] VAN LAARHOVEN P J M, AARTS E H L. **Simulated Annealing: Theory and Applications** [M]. Dordrecht: D. Reidal Publishing Company, 1987

[9] 王 凌，郑大钟. 一种 GASA 混合优化策略[J]. 控制理论与应用，2001，**18**(4)：552-554

[10] 雷英杰，张善文，李续武，等. MATLAB 遗传算法工具箱及应用[M]. 西安：西安电子科技大学出版社，2005

[11] 邢文训. 现代优化计算方法[M]. 北京：清华大学出版社，1999

[12] 王雪梅，王义和. 模拟退火算法与遗传算法的结合[J]. 计算机学报，1997，**20**(4)：381-384

[13] 陈宝林. 最优化理论与算法[M]. 2 版. 北京：清华大学出版社，2005

[14] 谭冬莲，肖汝诚. 基于 Levenberg-Marquardt 算法的桥梁结构静力参数识别[J]. 交通运输工程学报，2005，**5**(3)：56-59

Application of hybrid algorithm to fitting of creep coefficient curve introduced in China Standard of 2004 Highway PC Bridge

LI Fei-ran*, PAN Sheng-shan, ZHANG Zhe

(School of Civil Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A hybrid algorithm is adopted to fit the creep coefficient power function introduced in China Standard of 2004 Highway PC Bridge appendix F into exponential function, from which the successive expression of the creep can be obtained. The curve of creep coefficient is firstly fitted by the genetic simulated annealing algorithm to estimate the initial data. And then, based on the Levenberg-Marquardt method and Gauss-Newton method, the curve is exactly fitted by the nonlinear least square method. Finally, the exponential function is determined by the result analysis. The hybrid algorithm avoids the limit of a single algorithm in the curve fitting of creep coefficient, which takes good characters of universality, robustness and precision. The curve fitting results can be directly applied to the concrete creep program of FEM by recursive method.

Key words: creep coefficient; curve fitting; hybrid algorithm; genetic simulated annealing algorithm; nonlinear least square method