文章编号：1000-8608(2010)04-0475-06

线性非齐次常微分方程两端边值问题精细积分法

彭海军*，高　强

（大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室，辽宁 大连　116024）

摘要： 采用齐次方程的精细积分法与非齐次项的精细积分法联合求解线性非齐次常微分方程两端边值问题.分别使用矩阵指数方法与区段混合能方法(Riccati 方法)将两端边值问题转化为初值问题,通过精细积分递推格式求解一般的初值问题,避免对系统矩阵求逆,非齐次项的计算精度达到了齐次通解精细积分计算的精度,且计算量小.算例结果证明了此方法的有效性.

关键词： 精细积分法;两端边值问题;矩阵指数;区段混合能;Riccati 方法;非齐次方程

中图分类号： O241　　**文献标志码：** A

0　引　言

常微分方程的两端边值问题(TPBVP)是工程科学计算中经常遇到的问题.经典的求解方法包括“打靶法”、有限差分方法和有限元等传统方法[1].这些方法在计算精度与稳定性方面往往并不令人满意,尤其对刚性系统.文献[2]中提出线性定常结构的精细积分方法,以其高精度和无条件稳定等优点得到广泛应用.文献[3]进一步采用区段混合能方法将精细积分方法扩展到两端边值问题,在最优及鲁棒控制系统设计与仿真中得到了广泛应用[4].Gu 等[5]在精细积分方法的基础上,采用增维的方法将非齐次项纳入系统矩阵,一并精细积分求解.Chen 等[6]基于增维精细积分方法将线性常微分方程由初值问题扩展到了两端边值问题,具体采用矩阵指数与 Riccati 方程方法实现任意非齐次项的处理.增维精细积分方法避免了对非齐次项的数值计算,但增加了系统矩阵的维数.另一种对非齐次项处理的方法则采用差分类数值积分方法,例如梯形公式近似[7]、高斯积分[8]等.这样处理会导致非齐次项的计算精度比齐次通解要低,为了提高非齐次项的计算精度采用更高阶近似方法则又增加了计算量.文献[9、10]采用多项式、弦函数、指数函数以及它们的组合等形式近似非齐次项,推导了相应的精细积分递推格式.这种方法需要对系统/动力矩阵求逆,会增加计算量,并且若逆矩阵不存在精细积分的应用会受到限制[11].谭述君等[11]给出动力方程非齐次项的精细积分法,避免了系统/动力矩阵求逆.本文将此方法扩展到线性非齐次方程两端边值问题.

1　从初值问题到两端边值问题

首先考虑如下初值问题：

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}(t);\ \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0 \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{H}$ 是 $2n \times 2n$ 维定常系统矩阵，$\boldsymbol{r}(t)$ 是任意变化的非齐次项，$\boldsymbol{v}_0$ 为给定初始条件.

微分方程式(1)是关于 $2n$ 维状态向量 $\boldsymbol{v}$ 的一阶线性非齐次常微分方程,若非齐次项 $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{0}$ 则微分方程式(1)退化成一阶线性齐次常微分方程.线性指的是系统矩阵 $\boldsymbol{H}$ 和非齐次项 $\boldsymbol{r}(t)$ 与 $\boldsymbol{v}$ 无关,而一阶指的是微分方程只有关于 $\boldsymbol{v}$ 的一阶导数.相应的一阶线性非齐次边值问题可以描述为

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}(t);\ \boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0,\ \boldsymbol{q}(t_f) = \boldsymbol{q}_{t_f} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，$t_f$ 是求解区域长度，$\boldsymbol{q}_0$ 和 $\boldsymbol{q}_{t_f}$ 是给定的两端边界条件.

因此本文所针对的问题即是式(2)所描述的一阶线性非齐次两端边值常微分方程.而微分方程(1)的解可以表示为

$$\boldsymbol{v}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{H}t}\boldsymbol{v}_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{H}(t-\tau)}\boldsymbol{r}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

收稿日期： 2008-05-14；　**修回日期：** 2010-05-11.
基金项目： “九七三”国家重点基础研究专项经费资助项目(2005CB321704)；国家自然科学基金资助项目(重点项目 10632030).
作者简介： 彭海军*(1982-)，男，博士生，E-mail：hjpeng@mail.dlut.edu.cn.

上式中右端第一项为方程(1)对应的齐次方程的通解,右端第二项为方程(1)对应非齐次方程的特解.数值计算时,将时间域离散成一系列步长为 η 的等距离间隔.那么任意时刻 $t_k = k \cdot \eta (k = 0, 1, 2, \cdots)$,通过式(3)可以得到一个时间步长内状态向量 $\boldsymbol{v}$ 的递推关系:

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_0(\eta)\boldsymbol{v}_k + \int_0^{\eta} \mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\tau}\boldsymbol{r}(t_{k+1} - \tau)\mathrm{d}\tau;\ \boldsymbol{\Phi}_0(\eta) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\eta} \tag{4}$$

对于两端边值问题直接应用式(4)会有困难,这是因为一端的状态向量中只有 n 个状态已知,而另外 n 个状态未知.若能利用两端边值问题的末端边界的另外 n 个状态获得缺少的 n 个初始状态,那么两端边值问题就转化为初值问题,从而采用递推公式(4)可得到任意离散时刻 t_k 上状态向量 $\boldsymbol{v}_k$.下面首先给出齐次项状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_0(\eta)$ 与非齐次项 $\int_0^{\eta} \mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\tau}\boldsymbol{r}(t_{k+1} - \tau)\mathrm{d}\tau$ 的精细积分计算过程.

2 齐次通解 $\boldsymbol{\Phi}_0(\eta)$ 的精细积分

齐次方程通解 $\boldsymbol{\Phi}_0(\eta)$ 的精细积分可以采用矩阵指数方法或区段混合能方法(Riccati 方法)进行计算.矩阵指数方法原理简单、易于编程实现.而区段混合能方法很适合求解现代(最优)控制理论中的各种问题[4].下面分别采用这两种方法计算齐次通解的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_0(\eta)$.

2.1 矩阵指数方法

设整个两端边值问题求解的区域为 $[x_0, x_f]$,长度为 $L = x_f - x_0$,将 L 等距离离散成一系列区段,区段长度为 η,即

$$\eta = L/2^M \tag{5}$$

其中 M 为正整数,控制离散步长大小.在基本区段 η 内采用精细积分方法,计算区段的传递矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_0(\eta)$

$$\boldsymbol{\Phi}_0(\eta) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\eta} = (\mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\eta/2^N})^{2^N} \tag{6}$$

这样就通过普通的精细积分方法得到区段长为 η 的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_0(\eta)$.再进一步执行 2^N 类算法得到整个区段的状态传递矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(L)$,即

$$\boldsymbol{\Phi}(L) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{H}L} = (\boldsymbol{\Phi}_0(\eta))^{2^M} \tag{7}$$

此时,末端状态向量可以用初始状态向量表示为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{x_f} \\ \boldsymbol{p}_{x_f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{11} & \boldsymbol{\Phi}_{12} \\ \boldsymbol{\Phi}_{21} & \boldsymbol{\Phi}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{x_0} \\ \boldsymbol{p}_{x_0} \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\Phi}(L) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{11} & \boldsymbol{\Phi}_{12} \\ \boldsymbol{\Phi}_{21} & \boldsymbol{\Phi}_{22} \end{pmatrix} \tag{8}$$

利用方程(8)将初始状态与末端状态通过整个区段的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(L)$ 联系起来.

2.2 区段混合能方法

Zhong[3] 提出用区段混合能求解非对称Riccati微分方程的方法.通过建立状态微分方程系数矩阵与混合能矩阵之间的联系,再求解混合能矩阵满足的微分方程,便得到非对称 Riccati 微分方程在各个时间点上的解.这一方法也可以用于求解状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_0(\eta)$.齐次状态微分方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix} \tag{9}$$

式中:$\boldsymbol{q}$ 为 n 维状态向量,$\boldsymbol{p}$ 为 m 维状态向量,$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为具有相应维数的系数矩阵.采用区段混合能方法描述,区段两端状态用混合能矩阵描述为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_b \\ \boldsymbol{p}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} & -\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_a \\ \boldsymbol{p}_b \end{pmatrix} \tag{10}$$

式中:$\boldsymbol{q}_a$、$\boldsymbol{p}_a$ 为区段 a 端状态向量,$\boldsymbol{q}_b$、$\boldsymbol{p}_b$ 为区段 b 端状态向量,$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{E}$ 为此区段的混合能矩阵.

区段混合能矩阵也有区段合并公式.设有区段 1:$[x_a, x_b]$ 与区段 2:$[x_b, x_c]$,如图 1 所示.区段混合能矩阵分别为 $\boldsymbol{Q}_1$、$\boldsymbol{G}_1$、$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{E}_1$ 与 $\boldsymbol{Q}_2$、$\boldsymbol{G}_2$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{E}_2$,将两个区段合成一个整体区段 3:$[x_a, x_c]$,对应的区段混合能矩阵 $\boldsymbol{Q}_c$、$\boldsymbol{G}_c$、$\boldsymbol{F}_c$、$\boldsymbol{E}_c$ 如下式所示,具体推导过程略去,详细过程见文献[3].

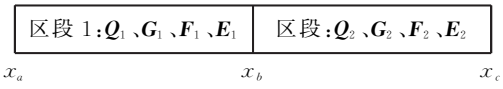


图 1 区段混合能合并示意图

Fig. 1 Interval mixed energy combination schematic diagram

区段 1 与 2 合并为整个区段 3 的区段混合能合并公式:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_c &= \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{G}_1)^{-1}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{G}_c &= \boldsymbol{G}_2 + \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-1}\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{E}_2 \\ \boldsymbol{F}_c &= \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}_2)^{-1}\boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{E}_c &= \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{G}_1)^{-1}\boldsymbol{E}_2 \end{aligned} \tag{11}$$

在长为 η 的区段内使用 2^N 类算法,将长度为 η 的区段等分成长度为 $\tau = \eta/2^N$ 的更小区段.在这个非常小的区段 τ 内将区段混合矩阵级数展开,根据区段混合能矩阵所满足的方程建立区段混合能矩阵与齐次状态微分方程式(9)的系数矩阵之间的联系[3],得到区段混合能矩阵在非常小的区段 τ 内的解析表达.通过区段合并公式得到区段长度为 η 的混合能矩阵 $\boldsymbol{Q}(\eta)$、$\boldsymbol{G}(\eta)$、$\boldsymbol{F}(\eta)$、$\boldsymbol{E}(\eta)$.再执行整个区段 L 的混合能合并公式

(11)，得到整个区段的混合能矩阵 $\boldsymbol{Q}(L)$、$\boldsymbol{G}(L)$、$\boldsymbol{F}(L)$、$\boldsymbol{E}(L)$，由此将两端状态联系起来如式(10)所示. 表达成式(8) 传递矩阵的形式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_{11} &= \boldsymbol{F}(L)+\boldsymbol{G}(L)\boldsymbol{E}^{-1}(L)\boldsymbol{Q}(L)\\ \boldsymbol{\Phi}_{12} &= -\boldsymbol{G}(L)\boldsymbol{E}^{-1}(L)\\ \boldsymbol{\Phi}_{21} &= -\boldsymbol{E}^{-1}(L)\boldsymbol{Q}(L)\\ \boldsymbol{\Phi}_{22} &= \boldsymbol{E}^{-1}(L)\end{aligned} \tag{12}$$

式(12) 即是区段 L 内状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(L)$ 与区段混合能矩阵 $\boldsymbol{Q}(L)$、$\boldsymbol{G}(L)$、$\boldsymbol{F}(L)$、$\boldsymbol{E}(L)$ 的对应关系.

3　非齐次项的精细积分

文献[11]用多项式、弦函数、指数函数以及它们的组合近似表达非齐次项，得出非齐次初值问题的递推格式精细积分法. 另外，以上几种形式或它们之间的组合也有区段合并公式. 这里针对两端边值问题处理非齐次项，采用 2^N 类算法在非常小的区段 τ 内将非齐次项近似级数展开，再用区段合并的方法得到基本区段 η 内的非齐次项表达式. 下面就非齐次项为多项式、三角函数、指数函数形式给出具体推导.

若非齐次项为多项式形式，例如如下线性非齐次项

$$\boldsymbol{r}(x)=\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{r}_1\cdot(x-x_k);\ \boldsymbol{r}_1=(\boldsymbol{r}_{k+1}-\boldsymbol{r}_k)/\eta$$

则式(4) 中对应的非齐次项特解为

$$\boldsymbol{F}(\eta)=\boldsymbol{\Phi}_1(\eta)\boldsymbol{r}_{k+1}-\boldsymbol{\Phi}_2(\eta)(\boldsymbol{r}_{k+1}-\boldsymbol{r}_k)/\eta$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}_1(\eta)=\int_0^\eta \mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\tau}\mathrm{d}\tau;\ \boldsymbol{\Phi}_2(\eta)=\int_0^\eta \mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\tau}\tau\mathrm{d}\tau$$

由文献[11] 的方法可以用精细积分计算. 并且经过分部积分运算，$\boldsymbol{\Phi}_1(\eta)$、$\boldsymbol{\Phi}_2(\eta)$ 本身又有区段合并公式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_1(2\eta) &= \boldsymbol{\Phi}_1(\eta)+\boldsymbol{\Phi}_0(\eta)\boldsymbol{\Phi}_1(\eta);\\ \boldsymbol{\Phi}_2(2\eta) &= \boldsymbol{\Phi}_2(\eta)+\boldsymbol{\Phi}_0(\eta)(\eta\boldsymbol{\Phi}_1(\eta)+\boldsymbol{\Phi}_2(\eta))\end{aligned} \tag{13}$$

基于区段合并公式(13)，通过执行 2^N 类算法得到整个区段 L 的区段矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_1(L)$、$\boldsymbol{\Phi}_2(L)$，此过程用程序语言表示为

```
for (i = 0; i < M; i++)
{
Φ1 = Φ1 + Φ0Φ1;
Φ2 = Φ2 + Φ0(ηΦ1 + Φ2);
η = η + η;
}
```

得到 $\boldsymbol{\Phi}_1(L)$、$\boldsymbol{\Phi}_2(L)$ 后，整个区段 L 的非齐次项可表达为

$$\boldsymbol{F}(L)=\boldsymbol{\Phi}_1(L)\boldsymbol{r}_{x_\mathrm{f}}-\boldsymbol{\Phi}_2(L)(\boldsymbol{r}_{x_\mathrm{f}}-\boldsymbol{r}_{x_0})/L$$

若非齐次项为正 / 余弦函数时，即

$$\boldsymbol{r}(x)=\boldsymbol{r}_1\sin(\gamma x)+\boldsymbol{r}_2\cos(\gamma x)$$

则非齐次项对应的特解为

$$\boldsymbol{F}(\eta)=\boldsymbol{E}_\mathrm{c}(\eta)\boldsymbol{a}_{k+1}+\boldsymbol{E}_\mathrm{s}(\eta)\boldsymbol{b}_{k+1}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_\mathrm{c}(\eta) &= \int_0^\eta \cos(\gamma\tau)\mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\tau}\mathrm{d}\tau\\ \boldsymbol{E}_\mathrm{s}(\eta) &= \int_0^\eta \sin(\gamma\tau)\mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\tau}\mathrm{d}\tau\\ \boldsymbol{a}_{k+1} &= \boldsymbol{r}_1\sin(\gamma x_{k+1})+\boldsymbol{r}_2\cos(\gamma x_{k+1})\\ \boldsymbol{b}_{k+1} &= -\boldsymbol{r}_1\cos(\gamma x_{k+1})+\boldsymbol{r}_2\sin(\gamma x_{k+1})\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{E}_\mathrm{c}(\eta)$、$\boldsymbol{E}_\mathrm{s}(\eta)$ 同样可以用精细积分计算，类似地通过分部积分运算有如下区段合并公式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_\mathrm{s}(2\eta) &= \boldsymbol{E}_\mathrm{s}(\eta)+\boldsymbol{\Phi}_0(\eta)(\cos(\gamma\eta)\boldsymbol{E}_\mathrm{s}(\eta)+\\ &\quad \sin(\gamma\eta)\boldsymbol{E}_\mathrm{c}(\eta))\\ \boldsymbol{E}_\mathrm{c}(2\eta) &= \boldsymbol{E}_\mathrm{c}(\eta)+\boldsymbol{\Phi}_0(\eta)(\cos(\gamma\eta)\boldsymbol{E}_\mathrm{c}(\eta)-\\ &\quad \sin(\gamma\eta)\boldsymbol{E}_\mathrm{s}(\eta))\end{aligned} \tag{14}$$

基于区段合并公式(14)，再利用 2^N 类算法得到整个区段 L 的 $\boldsymbol{E}_\mathrm{c}(L)$、$\boldsymbol{E}_\mathrm{s}(L)$，用程序语言表示为

```
for (i = 0; i < M; i++)
{
Es = Es + Φ0(cos(γη)Es + sin(γη)Ec);
Ec = Ec + Φ0(cos(γη)Ec - sin(γη)Es);
Φ0 = Φ0 · Φ0;
η = η + η;
}
```

得到矩阵 $\boldsymbol{E}_\mathrm{c}(L)$、$\boldsymbol{E}_\mathrm{s}(L)$ 后，整个区段 L 的非齐次项可表达为

$$\boldsymbol{F}(L)=\boldsymbol{E}_\mathrm{c}(L)\boldsymbol{a}_{x_\mathrm{f}}+\boldsymbol{E}_\mathrm{s}(L)\boldsymbol{b}_{x_\mathrm{f}}$$

若非齐次项为指数函数时，即

$$\boldsymbol{r}(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\cdot\boldsymbol{f}$$

则非齐次项对应的特解为

$$\boldsymbol{F}(\eta)=\mathrm{e}^{\alpha x_{k+1}}\cdot\boldsymbol{E}_\mathrm{e}(\eta)\cdot\boldsymbol{f}$$

其中

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{e}(\eta)=\int_0^\eta \mathrm{e}^{\boldsymbol{H}\tau}\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mathrm{d}\tau$$

经过分部积分运算有如下区段合并公式：

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{e}(2\eta)=\boldsymbol{E}_\mathrm{e}(\eta)+\mathrm{e}^{-\alpha\eta}\boldsymbol{\Phi}_0(\eta)\boldsymbol{E}_\mathrm{e}(\eta)$$

通过执行 2^N 类算法得到整个区段 L 的 $\boldsymbol{E}_\mathrm{e}(L)$，用程序语言表示为

```
for (i = 0; i < M; i++)
{
Ee = Ee + e^{-αη}Φ0Ee;
Φ0 = Φ0 · Φ0;
η = η + η;
}
```

执行完以上程序语句得到整个区段 L 的非齐次项表达

$$\boldsymbol{F}(L) = \mathrm{e}^{\alpha x_{\mathrm{f}}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}(L) \cdot \boldsymbol{f}$$

对多项式、正/余弦函数、指数函数之间的组合可以推导出类似区段合并表达,这里略去. 当非齐次项就是以上函数本身或它们之间的组合时,通过精细积分计算所得数值结果几乎就是计算机上的精确解. 当非齐次项为其他函数时可以在区段 η 内通过拟合多项式、Fourier 级数展开等方法表达成以上函数形式,这时非齐次项的计算精度主要取决于这种近似的精度.

4 线性非齐次方程两端边值问题精细积分求解

有了以上齐次项状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(L)$ 与非齐次项 $\boldsymbol{F}(L)$ 的精细积分过程,即可考虑线性非齐次方程两端边值问题的精细积分法. 对于两端边值问题,两端状态向量可以通过如下方程联系在一起

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{x_{\mathrm{f}}} \\ \boldsymbol{p}_{x_{\mathrm{f}}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(L) \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{x_0} \\ \boldsymbol{p}_{x_0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{F}(L) \tag{15}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}(L) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{11} & \boldsymbol{\Phi}_{12} \\ \boldsymbol{\Phi}_{21} & \boldsymbol{\Phi}_{22} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{F}(L) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_{\mathrm{q}} \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{p}} \end{pmatrix}$$

利用方程式(15),若已知两端边界条件,例如 $\boldsymbol{q}_{x_0}$ 和 $\boldsymbol{q}_{x_{\mathrm{f}}}$ 就可以求出初始端未知的状态向量 $\boldsymbol{p}_{x_0}$,即

$$\boldsymbol{p}_{x_0} = \boldsymbol{\Phi}_{12}^{-1}(\boldsymbol{q}_{x_{\mathrm{f}}} - \boldsymbol{\Phi}_{11}\boldsymbol{q}_{x_0} - \boldsymbol{F}_{\mathrm{q}})$$

这样就得到了齐全的初始条件 $\boldsymbol{q}_{x_0}$ 和 $\boldsymbol{p}_{x_0}$,此时可以完全按照初值问题求解. 在区段合并的时候可以将区段 η 的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_0(\eta)$ 与非齐次项 $\boldsymbol{F}(\eta)$ 存储起来,这样可按照初值问题的精细积分递推格式求解每个区段端点 k 上的状态向量值 $\boldsymbol{v}_k$.

5 数值算例

算例 1 考虑一个二阶常微分方程两端边值问题,微分方程为 $y''(x) + \frac{1}{4}y(x) = 8$,两端边界条件为 $y(0) = 0, y(10) = 0$,此算例比较简单,其解析解为

$$y(x) = 32\left(\frac{\cos 5 - 1}{\sin 5}\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} + 1\right)$$

若采用其他方法,如"打靶法"或有限差分法等方法也可以求解,这里主要为了考察本文方法对两端边值问题的计算精度. 步长参数选取 $M = 5$,采用本文方法计算的绝对误差精度 e 如图 2 所示. 从图 2 中可以看出,无论是采用矩阵指数方法(ExpMat)还是 Riccati 方法计算结果的绝对误差精度都在 $10^{-13} \sim 10^{-16}$,都具有相当高的计算精度,几乎达到计算机上的精确解.

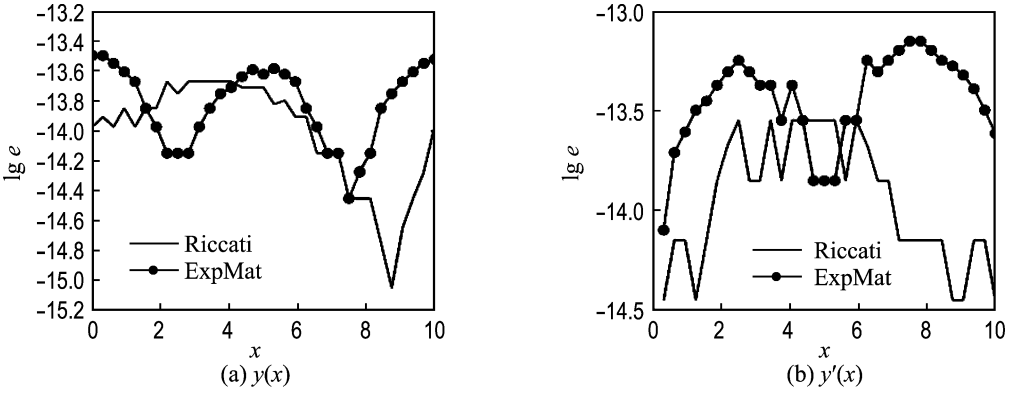


图 2 算例 1 矩阵指数方法与 Riccati 方法计算函数值与其一阶导数的绝对误差

Fig. 2 Absolute errors of function value and its first-order derivative value computed by matrix exponent and Riccati method for Example 1

算例 2 考虑一个刚性常微分方程两端边值问题[6],其微分方程为

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}u/\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v/\mathrm{d}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 998 & 1\,998 \\ -999 & -1\,999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1+x)\mathrm{e}^{-x}$$

其系统矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的特征值分别为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1\,000$ 并且相差比较大,具有明显的刚性特征. 给定边界条件为

$$u(0) = 1, \ v(1) = \frac{331\,669}{332\,667}\mathrm{e}^{-1\,000} - \frac{1\,328\,671}{332\,667}\mathrm{e}^{-1}$$

此时解析解为

$$u^*(x) = -\frac{331\ 669}{332\ 667}e^{-1\ 000x} + \frac{664\ 336}{332\ 667}e^{-x} + \frac{1\ 331}{333}e^{-x}x + 2e^{-x}x^2$$

$$v^*(x) = \frac{331\ 669}{332\ 667}e^{-1\ 000x} - \frac{331\ 669}{332\ 667}e^{-x} - \frac{665}{333}e^{-x}x - e^{-x}x^2$$

针对这种刚性问题采用本文方法计算，步长参数选取 $M=5$，计算绝对误差如图 3 所示. 从图中可以看出，针对刚性问题，两种方法的计算精度也都在 $10^{-10}\sim10^{-16}$ 量级，Riccati 方法比矩阵指数方法计算精度略低. 这是由于先计算区段混合能矩阵再转化为状态转移矩阵的过程中需要对部分矩阵求逆，而对于刚性问题在此求逆过程中会产生数值误差.

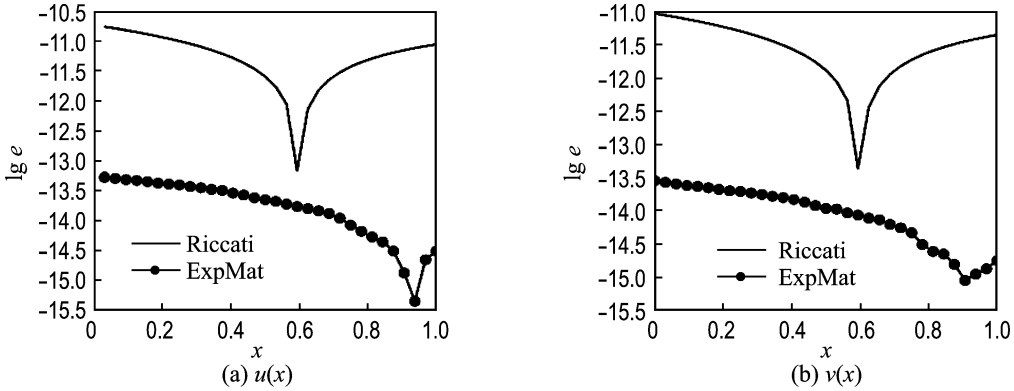


图 3　算例 2 矩阵指数方法与 Riccati 方法计算函数值的绝对误差

Fig. 3　Absolute errors of function value computed by matrix exponent and Riccati method for Example 2

算例 3　考虑半无穷长区域区段两端边值问题[6,12]，其常微分方程和两端边界条件为

$$-y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^{-2x};$$

$$y(0) = 1.0,\ y(\infty) = 0$$

此方程解析解为

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-(1+\sqrt{3})x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$$

对于半无穷长区域两端边值问题，只要将整个求解区域取足够大，或者采用迭代的方法计算得到的两次初值接近给定的控制误差，此时的区段长度可作为整个求解无穷区段问题的等效近似区段长度. 这样半无穷区段问题仍可按照本文方法求解. 选取步长参数 $M=5$，计算结果的绝对误差如图 4 所示，可以看出两种方法计算的精度不相上下，绝对误差的精度都在 $10^{-13}\sim10^{-16}$ 量级.

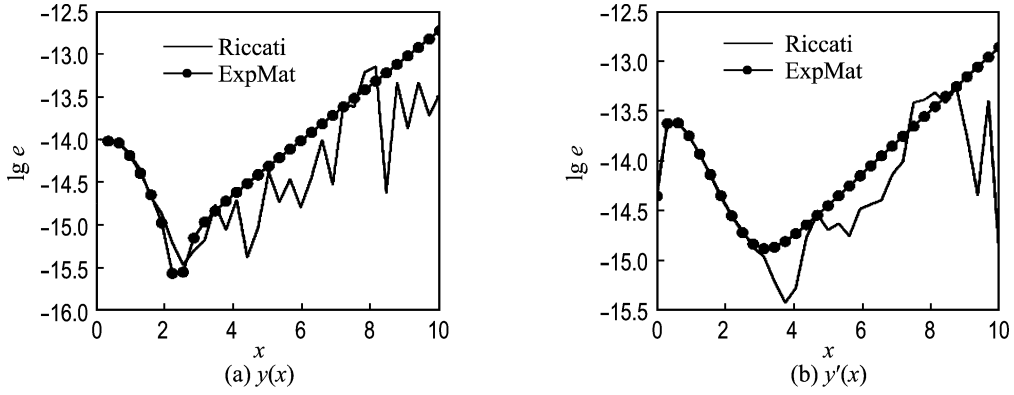


图 4　算例 3 矩阵指数方法与 Riccati 方法计算函数值与其一阶导数的绝对误差

Fig. 4　Absolute errors of function value and its first-order derivative value computed by matrix exponent and Riccati method for Example 3

6 结 语

本文采用计算齐次通解的状态转移矩阵与非齐次项的精细积分方法,将线性非齐次常微分方程两端边值问题转化为初值问题求解,给出了递推格式的精细积分求解过程.本文方法只需要对系统矩阵进行一次精细积分运算,而不必对系统矩阵求逆,并且由于没有对非齐次项作差分类算法的近似处理,具有很高的计算精度.数值算例表明该算法具有很高的可靠性与精度.

参考文献:

[1] WILLIAM H, PRESS S A, TCUKOSKY W . C++数值算法[M]. 2 版. 胡健伟,赵志勇,薛运华,等译. 北京:电子工业出版社, 2005

[2] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, **34**(2):131-136
(ZHONG Wan-xie. On precise time-integration method for structural dynamics[J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 1994, **34**(2):131-136)

[3] ZHONG Wan-xie. Combined method for the solution of asymmetric Riccati differential equations [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2001, **191**(1-2):93-102

[4] 钟万勰,吴志刚,谭述君. 状态空间控制理论与计算[M]. 北京:科学出版社, 2007

[5] GU Y X, CHEN B S, ZHANG H W, *et al*. Precise time-integration method with dimensional expanding for structural dynamic equations [J]. **AIAA Journal**, 2001, **39**(12):2394-2399

[6] CHEN B S, TONG L Y, GU Y X. Precise time integration for linear two-point boundary value problems [J]. **Applied Mathematics and Computation**, 2006, **175**(1):182-211

[7] 张森文,曹开彬. 计算结构动力响应的状态方程直接积分法[J]. 计算力学学报, 2000, **17**(1):94-97

[8] 汪梦甫,周锡元. 结构动力方程的更新精细积分法[J]. 力学学报, 2004, **36**(2):191-195

[9] 钟万勰. 暂态历程的精细积分[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, **12**(1):1-6

[10] LIN J H, SHEN W P, WILLIAMS F W. Accurate high-speed computation of nonstationary random seismic response [J]. **Engineering Structures**, 1997, **19**(7):586-593

[11] 谭述君, 钟万勰. 非齐次动力方程 Duhamel 项的精细积分[J]. 力学学报, 2007, **39**(3):374-381

[12] RAVI KANTH A S V, REDDY Y N. A numerical method for solving two-point boundary value problems over infinite intervals [J]. **Applied Mathematics and Computations**, 2003, **144**(2-3):483-494

Precise integration method for two-point boundary value problems of linear nonhomogeneous ordinary differential equations

PENG Hai-jun*, GAO Qiang

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The linear nonhomogeneous ordinary differential equations with two-point boundary value problems (TPBVP) are solved by using homogeneous equations precise integration method and nonhomogeneous term precise integration method. The matrix exponent method and interval mixed energy method (Riccati method) are used to transform the two-point boundary value problems into initial value problems, and then the general initial value problems can be solved by using precise integration method of recursive schemes. The method presented can avoid solving inversion of system matrix, and with small computational cost the numerical computation precision of nonhomogeneous term can attain to the numerical computation precision of homogeneous general solution by using precise integration method. The validity of the method presented is proved by numerical examples.

Key words: precise integration method; two-point boundary value problems (TPBVP); matrix exponent; interval mixed energy; Riccati method; nonhomogeneous equations