



文章编号: 1000-8608(2010)04-0586-05

α 稳定分布噪声条件下 TVAR 模型参数估计

邱天爽*¹, 栗娜¹, 里红杰^{1,2}

(1. 大连理工大学 电子信息与电气工程学部, 辽宁 大连 116024;

2. 大连工业大学 信息科学与工程学院, 辽宁 大连 116034)

摘要: 非高斯非平稳随机信号处理是当前信号处理领域的研究热点, 具有重要的理论意义和实际价值. 采用 TVAR 模型来描述非平稳随机信号, 在 α 稳定分布噪声条件下, 传统的递推最小二乘(RLS)算法效果显著退化. 采用最小 p 范数(LPN)算法对 TVAR 模型的时变参数进行估计, 仿真实验结果表明, LPN 算法不仅适用于高斯条件而且适用于非高斯 α 稳定分布噪声条件, 且与仅适用于高斯条件下的 RLS 算法相比具有更好的韧性.

关键词: α 稳定分布; 最小 p 范数; TVAR 模型; 参数估计

中图分类号: TN911.7 **文献标志码:** A

0 引言

实际中的随机信号许多是非平稳非高斯的, 长期以来囿于理论的发展, 只好将其简化为平稳高斯随机问题, 其结果当然令人不甚满意. 许多随机信号或噪声往往具有显著的尖峰脉冲特性, 使得其统计特性显著偏离高斯分布, 其概率密度函数的衰减过程比高斯分布要慢, 从而造成了显著的拖尾. 通常用 α 稳定分布模型来描述这类具有显著尖峰脉冲状波形和较厚概率密度函数拖尾的随机信号, α 越小拖尾越厚, 脉冲性越强. 由于 α 稳定分布信号不存在有限的二阶和二阶以上矩, 在高斯条件下基于二阶矩理论的信号处理算法在 α 稳定分布条件下性能退化^[1]. 因此需要根据信号噪声的特点研究出新的信号处理方法. 例如在实际应用中, 对于信号中突发性的野值干扰, 当采用范数为 2 的最小均方误差准则时, 平方的作用放大了野值的影响, 从而使对系统的自回归(AR)估计产生严重影响. 如果选用较小的范数, 则会对较大误差有一定的抑制作用, 从而使估计结果的稳健性更好.

本文主要结合非平稳信号的 TVAR 模型描述以及 α 稳定分布条件下信号处理的最小 p 范数(LPN)方法, 给出一种估计非平稳信号 TVAR 模型时变参数的最小 p 范数方法.

1 非平稳随机信号的时变 AR 模型

时变参数模型法是近年来应用于非平稳随机信号分析与处理的一种新方法. 这种方法通常用具有时变参数的 AR 模型和自回归滑动平均(ARMA)模型来表征非平稳随机信号, 将时变参数假设为一组基时间函数的线性组合. 由于任何 MA 和 ARMA 模型都可以用无穷阶的 AR 模型来表示, 并且 AR 模型计算比较简单, 信号处理中常用 AR 模型来表征信号. 时变参数模型法的优点在于将一个线性非平稳问题转化为一个线性时不变问题, 而且与假设在一段时间间隔上信号是平稳的参数估计方法相比, 时变参数模型法可以进一步提高参数估计的精确度^[2].

设零均值、 N 阶时变参数自回归(TVAR)模型^[3,4]为

$$x_n = \sum_{i=1}^N a_i(n)x_{n-i} + e_n \quad (1)$$

式中: e_n 为平稳白噪声过程, 假设时变参数 $\{a_i(n), i = 1, \dots, N\}$ 是一组基时间函数的线性组合,

$$a_i(n) = \sum_{j=0}^m a_{ij}g_j(n) \quad (2)$$

式中 $\{g_j(n), j = 0, \dots, m\}$ 是一组基时间函数, m 称为基的程度.

由以上可以看出: N 个时变参数被一组定常参数 $\{a_{ij}\}$ 所代替, 这种方法也可以称为坐标方法. 当参数被看成是以 $\{g_j(n), j = 0, \dots, m\}$ 为基的一个时间函数时, 它是由 x_n 的轨迹坐标构成的. 这样就将一个标量过程替换成向量过程, 从而把一个线性非平稳问题转化为一个线性时不变问题.

2 TVAR 模型的最小 p 范数估计

2.1 AR S α S 过程

通常认为 AR、MA、ARMA 过程的激励 e_n 是独立同分布 (i. i. d.) 的高斯过程, 这种假设在许多情况下是合理的. 但是, 在某些场合, 高斯激励的线性模型就不再适用, 比如水文数据、气象数据以及具有很大的瞬时尖峰脉冲的数据, 包括股票市场价格、电话信号和一些生物医学信号等. 这类尖峰脉冲信号的分布比高斯分布有更厚的拖尾, 而且具有无限方差. 这时, 原有的基于二阶统计量的分析方法不再适用, 需要新的不受有限方差限制的参数模型方法^[5].

最常用的具有无穷方差的线性模型是自回归 (AR) S α S 过程, 一个 AR S α S 过程 x_n 可表示为

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \dots + a_N x_{n-N} + e_n \quad (3)$$

这里 e_n 是一个特征指数为 α , 分散系数为 γ 的 i. i. d. 的 S α S 分布过程.

2.2 TVAR 模型时变参数的最小 p 范数估计方法

对于稳定过程的线性估计问题, 由于没有有限方差, 最小均方误差 (MMSE) 准则不再适用, 但是 MMSE 准则的概念可以推广到稳定分布过程. 特别地, 最小分散系数 (MD) 准则可以用于讨论稳定过程的线性理论. 在 MD 准则下, 一个 S α S 随机变量在观测线性空间的最佳估计是使估计误差的分散系数最小. 一个稳定随机变量的分散系数具有和方差同样的地位和作用. 分散系数越大, 远离中值的稳定随机变量的样本越多. 因此, 通过分散系数的最小化, 可以使估计误差的平均幅度达到最小^[6].

设一个非平稳 AR S α S 过程为

$$\chi = \begin{pmatrix} (x_1 g_0(2) \ \dots \ x_1 g_m(2)) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ (x_2 g_0(3) \ \dots \ x_2 g_m(3)) & (x_1 g_0(2) \ \dots \ x_1 g_m(2)) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_N g_0(N+1) \ \dots \ x_N g_m(N+1)) & (x_{N-1} g_0(N) \ \dots \ x_{N-1} g_m(N)) & \dots & (x_1 g_0(2) \ \dots \ x_1 g_m(2)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_L g_0(L+1) \ \dots \ x_L g_m(L+1)) & (x_{L-1} g_0(L) \ \dots \ x_{L-1} g_m(L)) & \dots & (x_{L-N+1} g_0(L-N+2) \ \dots \ x_{L-N+1} g_m(L-N+2)) \end{pmatrix}$$

$$x_n = \sum_{i=1}^N a_i(n) x_{n-i} + e_n \quad (4)$$

式中: e_n 为特征指数为 α 、分散系数为 γ 的 i. i. d. 的 S α S 分布过程. 令

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T &= (a_1(n) \ a_2(n) \ \dots \ a_N(n)) = \\ & (a_{10} \ \dots \ a_{1m} \ \dots \ a_{N0} \ \dots \ a_{Nm}) \\ \mathbf{y}_N^T(n-1) &= (x(n-1)g_0(n) \ \dots \\ & x(n-1)g_m(n) \ \dots \\ & x(n-N)g_0(n) \ \dots \\ & x(n-N)g_m(n)) \end{aligned}$$

则式(4)可以写成如下形式:

$$x_n = \mathbf{a}^T \mathbf{y}_N(n-1) + e_n \quad (5)$$

要估计 TVAR 模型的时变参数, 目标就是使式(6)最小化:

$$J = \sum_n |s(n) - \mathbf{a}^T \mathbf{y}_N(n)|^p \quad (6)$$

其中 $s(n)$ 是期望信号. 对式(6)相对于系数矢量 \mathbf{a} 的每个元素求偏导, 并令其为 0, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_i(n)} &= - \sum_n [p |s(n) - \mathbf{a}^T \mathbf{y}_N(n)|^{p-1} \times \\ & x(n-i+1) \operatorname{sgn}(s(n) - \\ & \mathbf{a}^T \mathbf{y}_N(n))] = 0; \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (7)$$

定义残留矢量为 \mathbf{r} , 其中第 n 个元素

$$r_n = s(n) - \mathbf{a}^T \mathbf{y}_N(n); \quad n = 1, \dots, N$$

这样, 式(7)可简化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_i(n)} &= - \sum_{n=1}^N p |r_n|^{p-1} x(n-i+1) \operatorname{sgn}(r_n) = 0; \\ & \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (8)$$

由于 $\operatorname{sgn}(r_n) = r_n / |r_n|$, 式(8)等价于

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_i(n)} &= - \sum_{n=1}^N p r_n |r_n|^{p-2} x(n-i+1) = 0; \\ & \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)等号两边同除以 p , 可以消去 p . 同时定义一个加权对角阵

$$\mathbf{W} = \operatorname{diag}\{|r|^{p-2}\}$$

用矩阵形式来表达式(9), 有

$$\nabla_a J = \chi^T \mathbf{W} (\chi \mathbf{a} - \mathbf{s}) = \mathbf{0} \quad (10)$$

这里

求解式(10)得

$$a = (\chi^T W \chi)^{-1} \chi^T W s \quad (11)$$

该式是加权最小二乘问题. 然而, 这里 a 是 W 的函数, 而 W 又是 a 的残留函数. 因此, 这个公式没有解析解, 其迭代解法如下:

- ① $a^{(0)} = (\chi^T \chi)^{-1} \chi^T s$;
- ② $r_n^{(k)} = (s - \chi a^{(k)})_n$;
- ③ $W_m^{(k)} = p |r_n^{(k)}|^{p-2}$;
- ④ $a^{(k+1)} = (\chi^T W^{(k)} \chi)^{-1} \chi^T W^{(k)} s$;
- ⑤ 如果 $|\|r^{(k+1)}\|_{(p)} - \|r^{(k)}\|_{(p)}| / \|r^{(k)}\|_{(p)} < \epsilon$, 则停止; 否则, 回到第 ② 步.

这里, $a^{(k)}$ 是 TVAR 模型第 k 步迭代的参数矢量, $\|\cdot\|_{(p)}$ 表示 l_p 范数.

3 仿真实验

为了研究上述算法的性能, 对一 TVAR(2) 模型的时变参数进行了估计, 并对用本文中最小 p 范数 (LPN) 方法得到的估计结果与用传统递推最小二乘^[7] (RLS) 法得到的估计结果进行了比较.

常用的基时间函数有很多种, 本文采用傅里叶基时间函数, 形式如下:

$$g_j(k) = \cos \omega k j \quad (j \text{ 为偶数});$$

$$g_j(k) = \sin \omega k j \quad (j \text{ 为奇数})$$

其中 $j = 0, 1, \dots, m$, m 越大, 模型描述非平稳信号特性越准确, 但运算量也随之显著增加, 综合考虑这两点因素, 本实验中基的程度取 $m = 2$.

实验中要讨论的二阶时变 AR 过程如图 1 所示, 可以用式(12)表示:

$$x_n = a_1(n)x_{n-1} + a_2(n)x_{n-2} + e_n \quad (12)$$

其中 $a_1(n) = 0.1 + 0.5 \sin \omega k + 0.7 \cos 2\omega k$, $a_2(n) = -0.3 - 0.7 \sin \omega k - 0.2 \cos 2\omega k$, 当 e_n 是 i. i. d. 高斯时间序列时信号 x_n 如图 1 所示, 当 e_n 是 i. i. d. SaS 时间序列时 x_n 如图 2 所示.

从图中可以看出, 图 2 所示的 SaS 过程不同于图 1 所示的高斯随机过程, 信号中存在较大的尖峰脉冲. 对图 2 所示信号的 α 参数进行估计, 得到 $\alpha = 1.03$.

分别用最小 p 范数 (LPN) 方法与递推最小二乘 (RLS) 法对图 1 和 2 所示信号进行 TVAR 模型参数估计, 在高斯条件下即对图 1 所示信号估计得到的结果如图 3 和 4 所示, 在 α 稳定分布

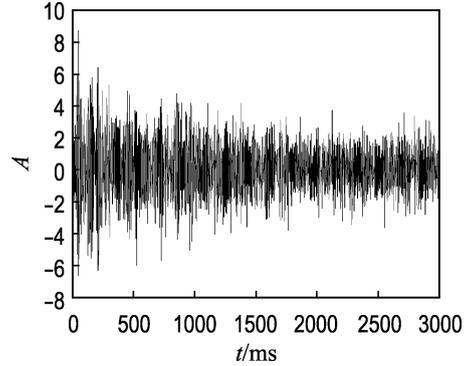


图 1 二阶 TVAR 高斯过程

Fig. 1 Second-order Gaussian process with TVAR model

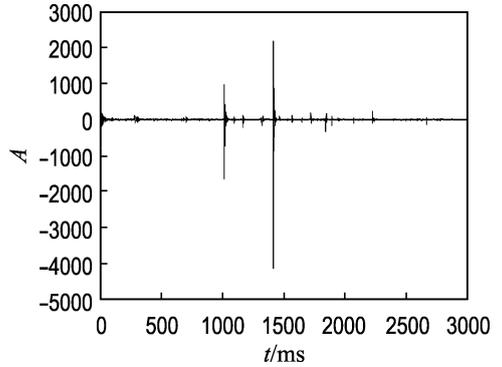


图 2 二阶 TVAR SaS 过程

Fig. 2 Second-order SaS process with TVAR model

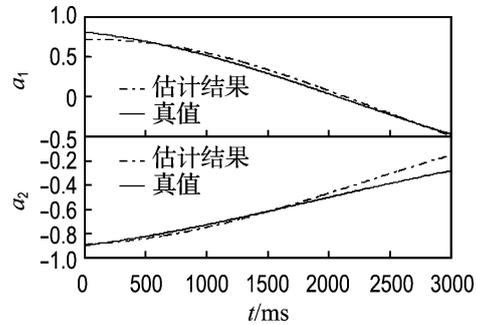


图 3 高斯噪声条件下 LPN 估计结果

Fig. 3 Estimation using LPN algorithm under Gaussian noise conditions

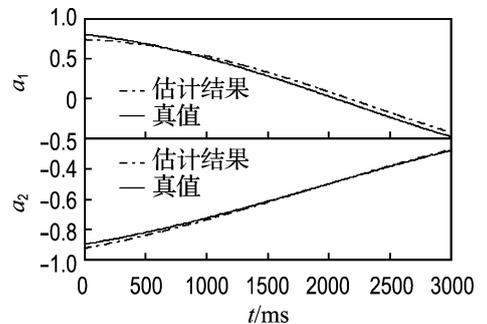


图 4 高斯噪声条件下 RLS 估计结果

Fig. 4 Estimation using RLS algorithm under Gaussian noise conditions

条件下即对图 2 所示信号估计得到的结果如图 5 和 6 所示. 从图中可以看出, 在高斯条件下, 两种方法都可以得到比较准确的估计结果. 在 α 稳定分布情况下, 本文的 LPN 方法可以得到比较准确的 TVAR 模型的时变参数; 而 RLS 方法得到的估计结果存在较大误差, 基本不能给出模型参数随时间的变化情况. 两种方法在两种条件下的误差情况如表 1 和 2 所示, 其中误差均值和误差功率计算公式如式 (13)、(14). 实验结果说明, 在高斯条件下适用的 RLS 算法在 α 稳定分布条件下性能退化; 而 LPN 算法既适用于高斯条件又适用于 α 稳定分布条件, 比 RLS 算法具有更广泛的适用性.

$$M_\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_i \quad (13)$$

$$P_\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 \quad (14)$$

其中 $\epsilon_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 为各时刻的估计误差.

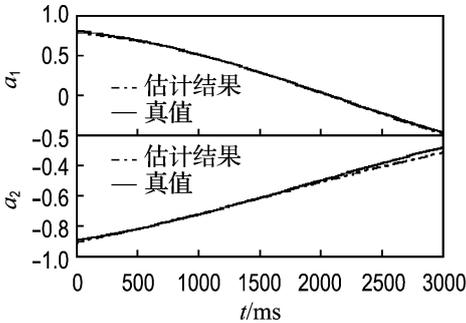


图 5 α 稳定分布噪声条件下 LPN 估计结果
Fig. 5 Estimation using LPN algorithm under α -stable distribution noise conditions

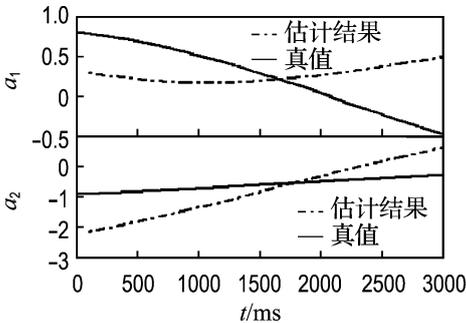


图 6 α 稳定分布噪声条件下 RLS 估计结果
Fig. 6 Estimation using RLS algorithm under α -stable distribution noise conditions

表 1 高斯噪声条件下 LPN 方法与 RLS 方法结果误差比较

Tab. 1 Error comparison of LPN algorithm and RLS algorithm under Gaussian noise conditions

估计方法	a_1		a_2	
	误差均值	误差功率	误差均值	误差功率
LPN	0.076 0	0.006 0	0.044 9	$6.155 8 \times 10^{-4}$
RLS	0.041 7	$3.258 6 \times 10^{-4}$	0.009 5	$5.893 0 \times 10^{-5}$

表 2 α 稳定分布噪声条件下 LPN 方法与 RLS 方法结果误差比较

Tab. 2 Error comparison of LPN algorithm and RLS algorithm under α -stable distribution noise conditions

估计方法	a_1		a_2	
	误差均值	误差功率	误差均值	误差功率
LPN	0.007 1	$8.439 0 \times 10^{-5}$	0.009 8	$2.022 5 \times 10^{-4}$
RLS	0.403 2	0.214 1	0.600 4	0.491 8

4 结 语

非高斯与非平稳信号处理是当前信号处理的研究热点, 实际中很多信号都具有非高斯和非平稳特性, 所以将这两个问题结合起来研究具有重要的理论意义和实际价值. 本文给出了一种用最小 p 范数法对非平稳信号 TVAR 模型时变参数进行估计的方法, 这种方法既适用于高斯条件下非平稳信号 TVAR 模型的参数估计, 又适用于非高斯 α 稳定分布条件下非平稳信号的参数估计, 改善了传统的 RLS 方法仅适用于高斯条件的情况, 较 RLS 方法具有更好的韧性.

参 考 文 献:

[1] 邱天爽, 张旭秀, 李小兵, 等. 统计信号处理——非高斯信号处理及其应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004

[2] 王宏禹. 非平稳随机信号分析与处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999

[3] ZHU Yong-liang, PAGILLA P R. Adaptive

- estimation of time-varying parameters in linear systems [C] // **Proceeding of the American Control Conference**. Piscataway:IEEE, 2003:4167-4172
- [4] SHEN Min-fen, SONG Rong, TING K H, *et al.* A method for identifying non-Gaussian parametric model with time-varying coefficients [C] // **ICASSP 2003 Acoustics, Speech, and Signal Processing**. Piscataway: IEEE, 2003:629-632
- [5] 王文华,王宏禹. 一种非平稳随机信号模型的时变参数估计算法性能研究[J]. 大连理工大学学报, 1997, **37**(1):97-102
- (WANG Wen-hua, WANG Hong-yu. An algorithm property analysis for time-varying parameters estimation of nonstationary random signals model [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 1997, **37**(1):97-102)
- [6] SODSRI C. Time-varying autoregressive modeling for nonstationary acoustic signal and its frequency analysis [D]. Pennsylvania:The Pennsylvania State University, 2003
- [7] 冯大政,常冬霞,袁 莉. 一种自适应全局最小 p 范数算法[J]. 电子学报, 2001, **29**(12A):1848-1851

Parameter estimation of time-varying autoregressive model under α -stable distributed noise conditions

QIU Tian-shuang^{*1}, LI Na¹, LI Hong-jie^{1,2}

- (1. Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. School of Information Science and Engineering, Dalian Polytechnic University, Dalian 116034, China)

Abstract: Non-Gaussian and non-stationary random signal processing is an interesting and important topic in the field of signal processing, and it has important academic significance and practical value. Since the conventional algorithms based on the recursive least square (RLS) algorithm degenerate severely under the α -stable distribution noise conditions, an autoregressive (AR) model with time-varying coefficients is used to track the non-stationary characteristics of the signal, and its coefficients are estimated with the least p -norm algorithm (LPN). The experimental results show that the LPN algorithm is applicable not only under Gauss noise but also under the conditions of α -stable distribution noise. Furthermore, the LPN algorithm has better flexibility compared with RLS algorithm which is applicable only under Gauss noise.

Key words: α -stable distribution; least p -norm; TVAR model; parameter estimation