

关于配点型无网格法边界条件处理技术

张宏伟*, 李美香, 李卫国

(大连理工大学 数学科学学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 由于无网格数值方法具有传统的有限差分法和有限元法不可比拟的优点, 着重介绍了配点型无网格法格式及其特点. 在总结配点型无网格法处理导数边界条件的各种技术的基础上, 提出了基于积分插值的新处理技术. 通过对基于点插值的配点型无网格法解 Helmholtz 问题的研究, 验证了该技术的优越性.

关键词: 无网格法; 配点法; Neumann 条件; 积分插值

中图分类号: TU311.4 **文献标志码:** A

0 引言

无网格方法是过去十多年兴起的数值方法, 该方法是利用一组散布在问题域及其边界上的节点表示该问题域和其边界, 通过几个互不相关节点上的值拟合出一个逼近函数, 该函数具有较好的光滑性而且导数连续, 这样不仅摆脱了网格的束缚, 避免了复杂的网格生成及重新划分工作, 而且提供了连续性好、形式灵活的形函数. 该方法在函数的逼近、边界条件的引入和能量泛函的积分等方面具有一定的灵活性, 此外, 还具有精度高、前后处理比有限元简便等特性. 因此, 无网格法可以用来处理大量的基于网格单元的计算方法难以求解的问题, 具有有限元法和有限差分法不可比拟的优点. 现有的无网格法基本上可以分为 Galerkin 型(如 EFGM^[1]、RKPM^[2]等)和配点型(如 SPH^[3]、RBF^[4]等)两大类. Galerkin 法具有良好的稳定性和精确性, 通过积分运算降低了对形函数的连续性要求, 可方便地施加导数边界条件. 但 Galerkin 法需要布置背景无网格进行数值积分, 计算量大. 另外, Galerkin 法要求形函数具有全局相容性, 处理本质边界条件困难. 配点型无网格法是真正的无网格法, 它应用于实际的关键问题是导数边界条件的存在. 边界条件对微分方

程至关重要, 但导数边界条件才是造成基于任意节点的配点型无网格方法精度偏低且稳定性差的真正原因. 本文将介绍配点型无网格法及其特点, 对配点法中几种流行的导数边界条件处理技术进行详细的探讨. 着重利用有限差分法中的积分插值法, 对一维问题的导数边界条件提出操作简单、计算精度高、不增加自由度的较理想的解决方案, 并通过具体的数值例子说明它的优越性.

1 配点格式及特点

设在问题域 Ω (其边界为 Γ) 上未知函数 $u(x)$ 满足的微分方程为

$$F(u) + b = 0; \text{ 在 } \Omega \text{ 内} \quad (1)$$

和边界条件

$$G(u) = g; \text{ 在 } \Gamma \text{ 上} \quad (2)$$

其中 F 和 G 是变量的微分算子.

配点法是使微分方程在问题域上的一组特定的点上成立. 设函数 $u(x)$ 的无网格近似函数为 $u^h(x)$ (各近似函数的构造方法可参看文献[5]), r_1 和 r_2 分别为计算微分方程和边界条件的配点个数, 且 $r = r_1 + r_2$, 则有

$$R_j = F(u^h(x_j)) + b_j = 0; j = 1, 2, \dots, r_1$$

$$\bar{R}_j = G(u^h(x_j)) + b_j = 0; j = 1, 2, \dots, r_2$$

配点法的实质是强迫残量在 r 个配点上等于零, r 大于或等于待求参量的个数. 配点型无网格法有以下特点:

(1) 离散微分方程的过程直接, 实现其离散方程的算法简洁;

(2) 是真正的无网格法, 只需要在各节点处计算形函数及其导数, 不需要进行数值积分, 易于实现, 计算效率高;

(3) 位移边界条件很容易实现, 不需要特殊处理;

(4) 需要在各节点处计算形函数的二阶导数;

(5) 系数矩阵一般是稀疏非对称的;

(6) 在某些情况下, 离散代数方程是病态的, 其解不稳定, 且精度差.

2 导数边界条件处理技术

配点法应用于实际的关键问题是导数边界条件的存在. 当边界条件均为 Dirichlet 型时, 用配点型无网格法可得到微分方程的精确结果, 但存在任意导数边界条件时, 其结果将显著恶化且不稳定. 这是由于采用无网格近似函数进行函数逼近时, 在边界处对函数的二阶导数逼近误差很大^[6]. 有许多用于在配点型无网格法中施加导数边界条件的方法, 其中常用的 5 种为

(1) 直接配点法

通过简单的配点对导数边界进行离散而得到不同于控制系统方程的一组单独方程, 即对导数边界条件不作特殊处理.

(2) 虚点法

沿导数边界在问题域的外侧增设一组虚点. 在此条件下对于每个导数边界节点可得到两个方程: 一个方程对应导数边界条件, 另一个对应微分方程.

(3) Hermite 型配点法

对导数边界节点利用附加的导数变量施加导数边界条件.

(4) 规则网格法

该方法沿问题域的导数边界内侧布置一层或数层规则分布的节点. 对这些节点采用 FDM 的标准差分方案, 即采用与标准 FDM 一样的处理方法施加导数边界条件.

(5) 加密导数边界附近的节点

本文针对求解 Helmholtz 问题的基于点插值的配点型无网格法^[6], 对具有导数边界条件的 Helmholtz 问题采用积分插值的方法处理导数边界条件. 对 3 个节点的插值法构造形函数的配点法, 采用积分插值法 1, 其过程为设 Helmholtz 问题的导数边界条件

$$u'(0) = \alpha_0 u(0) + \alpha_1 = \delta \quad (3)$$

$$u'(l) = \beta_0 u(l) + \beta_1 = \mu \quad (4)$$

取 $x_1 = 0, x_{1/2} = \frac{x_1 + x_2}{2}, h = x_2 - x_1$, 在 $[x_1, x_{1/2}]$ 上利用积分守恒式, 得

$$\int_{x_1}^{x_{1/2}} u'' dx + k \int_{x_1}^{x_{1/2}} u dx = 0$$

$$u'(x_{1/2}) - u'(x_1) + k \int_{x_1}^{x_{1/2}} u dx = 0$$

对 $u'(x_{1/2})$ 采用中心差商, $\int_{x_1}^{x_{1/2}} u dx$ 采用左矩形公式得

$$\frac{u(x_2) - u(x_1)}{h} - u'(x_1) + \frac{kh}{2} u(x_1) \approx 0$$

于是有

$$u'(x_1) \approx \left(\frac{h}{2} k - \frac{1}{h} \right) u(x_1) + \frac{1}{h} u(x_2)$$

那么对式(3) 可以用下式离散:

$$\left(\frac{h}{2} k - \frac{1}{h} \right) u_1 + \frac{1}{h} u_2 = \delta \quad (5)$$

$$\left(\frac{h}{2} k - \frac{1}{h} - \alpha_0 \right) u_1 + \frac{1}{h} u_2 = \alpha_1 \quad (6)$$

其中 u_1, u_2 分别为 $u(x_1), u(x_2)$ 的近似值.

对边界条件(4) 在区间 $[x_{N-1/2}, x_N]$ 上构造积分守恒式, 采用同样的方法处理.

对于用 5 个节点插值构造形函数的配点法, 采用的积分插值法 2, 其过程如下: 在 $[x_{N-4}, x_N]$ 上 Helmholtz 方程满足积分方程

$$\int_{x_{N-4}}^{x_N} u'' dx + \lambda \int_{x_{N-4}}^{x_N} u dx = 0$$

从而有

$$u'(x_N) - u'(x_{N-4}) + \lambda \int_{x_{N-4}}^{x_N} u dx = 0$$

即得

$$u'(x_N) = u'(x_{N-4}) - \lambda \int_{x_{N-4}}^{x_N} u dx$$

对其用 Newton-Cotes 公式近似, 即

$$\int_{x_{N-4}}^{x_N} u dx \approx \frac{x_N - x_{N-4}}{90} (7u_{N-4} + 32u_{N-3} + 12u_{N-2} + 32u_{N-1} + 7u_N)$$

因此,导数边界条件(4) 可以近似表示为

$$(u^h)'(x_{N-4}) - \lambda \frac{2d_c}{45} (7u_{N-4} + 32u_{N-3} + 12u_{N-2} + 32u_{N-1} + 7u_N) = \eta$$

其中 d_c 为节点间距,对 $u'(x_{N-4})$ 用已求得的包含节点 x_{N-4} 的函数近似式 $u^h(x)$ 的导数近似. 对边界条件(3),在区间 $[x_1, x_3]$ 上构造积分方程,采用同样的方法处理(但对散乱节点的情形,导数边界节点要进行规则化处理).

规则节点法是在导数边界处安排 3 个规则分布的节点 x_{N-2}, x_{N-1}, x_N . 使用如下有限差分算法计算导数边界节点的一阶导数

$$\frac{\partial u(x_N)}{\partial n} = \frac{3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}}{x_N - x_{N-2}} \tag{7}$$

利用上式代替导数边界条件得到离散代数方程组.

在 Hermite 型近似中,将增设导数变量作为附加的自由度,对于内部节点,如果其局部支持域中不含导数边界节点,则采用传统的无网格形函数,形成配点方程. 如果其局部支持域中包含导数边界节点,则采用如下的 Hermite 型近似式

$$u^h(x_i) = \mathbf{N}^T \mathbf{U}_s;$$

$$\mathbf{N}^T = (N_1(x) \quad N_2(x) \quad \cdots \quad N_n(x) \quad N^H(x)),$$

$$\mathbf{U}_s = (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n \quad u'_N)^T$$

式中: $\mathbf{N}$ 为由 Hermite 型近似得到的形函数向量, $N^H(x)$ 为与导数自由度 u'_N 有关的形函数. 对采用基于三角函数点插值的配点型无网格法, Hermite 型近似式的形成过程如下:

对局部支持域中含有导数边界节点的计算点 x 处的函数近似为

$$u^h(x) = a_1 + a_2 \sin x + a_3 \cos x + a_4 \sin 2x$$

如采用 5 个节点插值构造形函数,则为

$$u^h(x) = a_1 + a_2 \sin x + a_3 \cos x + a_4 \sin 2x + a_5 \cos 2x + a_6 \sin 3x$$

为确定式中的系数 a_1, a_2, a_3, a_4 , 可用通过支持域中的 3 个节点的函数值的插值以及等于导数边界节点的导数值而确定. 即对局部支持域中的 3 个节点(包括导数边界节点) 可得到

$$u_i = u^h(x_i) = a_1 + a_2 \sin x_i + a_3 \cos x_i + a_4 \sin 2x_i \tag{8}$$

对式(8) 求导后可得到边界方程

$$u'_N = \frac{du^h(x_N)}{dx} = 0 + a_2 \cos x_N - a_3 \sin x_N + 2a_4 \cos 2x_N \tag{9}$$

联立式(8)、(9) 求出系数 a_1, a_2, a_3, a_4 就可以得到式(7) 的形式.

3 数值算例

下面通过数值算例揭示各种不同导数边界条件处理技术对计算精度的影响. 设带有 Neumann 条件的一维 Helmholtz 问题为

$$\begin{cases} u'' - 4u = 0; 0 < x < 1 \\ u(0) = 1 \\ u'(1) = 2e^2 \end{cases}$$

为揭示导数边界条件对计算精度的影响,平均相对误差 e 定义如下:

$$e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|u_i - u_i^h|}{|u_i|}$$

其中 N 为节点数; u_i 为理论解; u_i^h 为数值解. 相对数值误差范数的 h 收敛率 $R(e)$ 定义为

$$R(e) = \lg \left(\frac{e_{i+1}}{e_i} \right) / \lg \left(\frac{d_c^{i+1}}{d_c^i} \right)$$

其中 d_c^i 为平均节点间距.

表 1、2 列出了不同的插值方案和几种不同的处理导数边界条件的方法求解 Helmholtz 问题所得到的误差结果. 各种不同方法的 h 收敛率情况如表 3 所示.

由表 1、2、3 可得到如下结论:

(1)如果 Helmholtz 问题仅有 Dirichlet 边界条件,用点插值配点法可得到非常理想的结果,其误差很小. 用 11 个规则节点离散问题域,对三节点插值的模型 $e \approx 0.080\ 600\%$,对五节点插值的模型 $e \approx 0.000\ 027\%$.

(2)Neumann 条件的存在将导致较大的计算误差. 如果不对 Neumann 条件采用特殊的处理方法(直接配点法),对三节点插值的模型 $e \approx 1.580\ 000\%$,对五节点插值的模型 $e \approx 0.000\ 833\%$,即误差分别放大约 20 和 31 倍. 因此,直接配点法虽然既简单又直接,但是它仅对

Dirichlet 边界条件的问题有效,对存在 Neumann 条件的问题通常不稳定或不精确.

(3)对 Neumann 条件进行特殊处理有助于改善解的精度.

(4)Hermite 型配点法和积分插值法对两种模型均可得到精确而稳定的解. 对三节点插值的模型两种方法误差放大约为 4 倍. 对五节点插值的模型两种方法的数值误差几乎与仅有 Dirichlet 条件产生的误差相等. 但 Hermite 法增加了自由度从而增加了计算成本.

(5)虚点法对两种模型的处理也能得到较好

的结果. 然而它使得方程数增加并需要额外的网格划分.

(6)规则网格法对五节点插值模型的效果比直接配点法差. 这是因为式(8)采用接近导数边界的 3 个节点处理其导数边界,而其误差大体上由边界条件所引起的较大误差所决定,尽管增加了内节点的插值阶数,但是其精度将不会改善.

(7)虽然各种方法的精度各不相同,但它们的收敛率几乎相等. 三节点插值方案的收敛率约为 2,五节点为 4~5.

表 1 三节点插值不同方法所得到的误差结果

Tab. 1 The result errors of different methods with 3 point interpolation

处理方法	节点数			
	11	21	41	81
无导数边界条件	$8.063\ 3\times10^{-4}$	$2.124\ 2\times10^{-4}$	$5.450\ 5\times10^{-5}$	$1.380\ 4\times10^{-5}$
直接配点法	0.015 8	0.004 2	0.001 1	$2.725\ 3\times10^{-4}$
虚点法	0.005 4	0.001 3	$3.284\ 8\times10^{-4}$	$8.175\ 7\times10^{-5}$
规则网格法	0.013 1	0.003 5	$8.890\ 8\times10^{-4}$	$2.256\ 8\times10^{-4}$
Hermite 型配点法	0.003 1	$6.771\ 8\times10^{-4}$	$1.620\ 1\times10^{-4}$	$3.985\ 4\times10^{-5}$
积分插值法 1	0.003 9	$9.542\ 9\times10^{-4}$	$2.349\ 3\times10^{-4}$	$5.824\ 3\times10^{-5}$

表 2 五节点插值不同方法所得到的误差结果

Tab. 2 The result errors of different methods with 5 point interpolation

处理方法	节点数			
	11	21	41	81
无导数边界条件	$2.684\ 5\times10^{-6}$	$5.394\ 9\times10^{-8}$	$9.070\ 8\times10^{-10}$	$2.072\ 2\times10^{-11}$
直接配点法	$8.328\ 3\times10^{-5}$	$3.248\ 1\times10^{-6}$	$1.132\ 6\times10^{-7}$	$3.740\ 8\times10^{-9}$
虚点法	$8.005\ 0\times10^{-6}$	$2.623\ 7\times10^{-7}$	$8.475\ 8\times10^{-9}$	$2.957\ 0\times10^{-10}$
规则网格法	$9.273\ 1\times10^{-4}$	$1.266\ 5\times10^{-4}$	$1.667\ 9\times10^{-5}$	$2.145\ 2\times10^{-6}$
Hermite 型配点法	$2.865\ 5\times10^{-6}$	$9.213\ 5\times10^{-8}$	$2.968\ 8\times10^{-9}$	$3.039\ 2\times10^{-9}$
积分插值法 1	$4.578\ 4\times10^{-4}$	$6.375\ 7\times10^{-5}$	$8.403\ 6\times10^{-6}$	$1.078\ 0\times10^{-6}$
积分插值法 2	$2.718\ 9\times10^{-6}$	$1.600\ 0\times10^{-7}$	$6.551\ 2\times10^{-9}$	$2.074\ 1\times10^{-10}$

表 3 不同方法所得的 h 收敛率

Tab. 3 The h rate of convergence of different methods

模型	节点数	方法					
		Dirichlet 模型	直接配点法	虚点法	规则网格法	Hermite 型配点法	积分插值法
三节点方案	11	—	—	—	—	—	—
	21	1.924 9	1.911 8	2.054 9	1.904 2	2.195 2	2.031 1
	41	1.962 6	1.933 1	1.984 7	1.977 3	2.063 9	2.022 3
	81	1.981 3	2.013 0	2.006 6	1.978 4	2.023 5	2.012 4
五节点方案	11	—	—	—	—	—	—
	21	5.637 2	4.680 8	4.930 7	2.872 3	4.957 3	4.088 4
	41	5.896 0	4.841 1	4.952 8	2.925 0	4.957 3	4.612 2
	81	5.455 4	4.921 9	4.841 1	2.959 3	0.033 9	4.979 9

4 结 语

本文在对基于三角函数点插值的配点型无网格法解 Helmholtz 问题研究的基础上,分析了导数边界条件是影响配点型无网格方法求解精度的真正元凶,对几种流行的导数边界条件处理技术进行了详细的探讨. 对一维问题的导数边界条件提出了操作简单、计算精度高,不增加自由度的较理想的解决方案——积分插值法. 并通过具体的数值例子说明了它的优越性.

参考文献:

[1] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element free Galerkin methods [J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1994, **37**(2): 229-256

[2] LIU W K, JUN S, ZHANG Y F. Reproducing kernel particle methods [J]. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 1995, **20**(8-9): 1081-1106

[3] LUCY L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis [J]. **The Astronomical Journal**, 1977, **8**(12):1013-1024

[4] CHEN W. Symmetric boundary knot method [J]. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2002, **26**(6):333-343

[5] 张 雄,刘 岩. 无网格法[M]. 北京:清华大学出版社, 2004

[6] LIU G R, GU Y T. 无网格法理论及程序设计[M]. 3 版. 王建明,周学军,译. 济南:山东大学出版社, 2007

Techniques for boundary conditions
in point allocation meshless methods

ZHANG Hong-wei*, LI Mei-xiang, LI Wei-guo

(School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Because of amazing advantages of meshless numerical methods over classical finite difference methods and finite element methods, the point allocation method and its characteristics are introduced. Several techniques for derivative boundary conditions by meshless allocation method are summarized and a new technique based on integral interpolation is proposed. Using meshless allocation method based on point interpolation to solve Helmholtz problem, the superiority of the proposed technique is verified.

Key words: meshless method; allocation method; Neumann conditions; integral interpolation