第50卷第5期
2010年9月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 50, No. 5
Sept. 2010

应用数学

文章编号：1000-8608(2010)05-0827-04

随机利率下增额两全保险

王丽燕*1，郝亚丽1，张海娇2，杨德礼3

（1. 大连大学 信息工程学院，辽宁 大连 116622；
2. 中央财经大学 国际经济与贸易学院，北京 102206；
3. 大连理工大学 管理学院，辽宁 大连 116024）

摘要： 基于随机利率下的寿险问题，建立了一个生死两全保险模型，模型包括增额生存年金、增额终身寿险和还本部分. 考虑到保费的实际投资情况和突发事件对利率的影响，将随机利率采用反射 Brownian 运动和 Poisson 过程联合建模，得到了保单全部价值的计算公式，并进一步得到死亡均匀分布时的简洁计算公式. 模型所涉及的情况与实际相符，对解决保险公司合理收取保费、进行保险赔付和规避管理风险都具有理论意义和实际应用价值.

关键词： 随机利率；年金；寿险；精算现值

中图分类号： O22　　**文献标志码：** A

0 引 言

寿险中的利率随机性问题，在近年来的保险精算研究中逐步得到人们的关注. 对保险公司来说，利率随机性产生的风险是相当大的. 随着精算理论研究的深入，利率风险吸引了越来越多的学者从事利率随机性的研究.

1971 年，Polland 首次把利息力视为随机变量，对精算函数进行了研究，其后一批学者开始采用各种随机模型来模拟随机利率. 1976 年，Boyel 考虑了寿险与年金中死亡率与利率均为随机的情况，即所谓的"双随机性"；随后，Panjer 和 Bellhouse、Giaccotto、Dhaene、Hürlimann 等有过这方面的研究. 对于随机利率，他们都是以时间序列方法建模的，例如白噪声过程、AR(2) 过程和 ARIMA 过程等[1]. 20 世纪 90 年代，一批学者利用摄动方法建模，得到了具有"双随机性"的确定年金及寿险的一系列结果：Beekman 等[2,3] 分别将息力累积函数用 O-U 过程和 Wiener 过程建模，得到某些年金现值的前二阶矩；1993 年他们又得到了息力由 O-U 过程和 Wiener 过程建模的终身寿险给付现值的前二阶矩[4]. De Schepper 等[5~7] 得到了息力由 Wiener 过程建模的某些年金的矩母函数、分布函数和 Laplace 变换. 何文炯等[8] 对随机利率采用 Gauss 过程建模，得到了一类即时给付增额寿险的给付现值的各阶矩，并在死亡均匀分布假设下，得到了矩的简洁表达式. 刘凌云等[9] 则将息力采用 Gauss 过程和 Poisson 过程联合建模，也给出了一类即时给付增额寿险给付现值的各阶矩，发展了文献[8]的结果. 以上都是将利息力采用息力累积函数 $i(t)=\delta t+z(t)$ 建模，其中 δ 是与 $z(t)$ 无关的随机变量或实常数. 与此相联系的问题是 $z(t)$ 将可能变成负的. 但实际上，保费收入一般投资于基金和债券，所以 $z(t)$ 绝不可能是负的. Perry 等[10,11] 将随机利率采用反射 Brownian 运动(RBM)建模，得到确定年金的期望值公式. Zaks 也将随机利率采用反射 Brownian 运动建模，讨论了确定年金的计算问题[12]. 无论是 Wiener过程、Gauss 过程还是反射 Brownian 运动，它们都是处处连续的扩散过程，但现实的随机利率是不频繁却又在某些点离散跳跃的过程. 随机跳跃是因突发事件对利率产生了影响，因此利率的动态过程分为连续部分和跳跃部分. Ngwira 等[13] 讨论了养老金在随机环境下的泊松跳跃问题，研究结果表明平均泊松跳跃的增加减少了风险资产的分配，并增加了无风险资产的分配.

收稿日期： 2009-04-07；　**修回日期：** 2010-07-12.
基金项目： 辽宁省教育厅科研基金资助项目(20040058).
作者简介： 王丽燕*(1963-)，女，教授，大连理工大学 2004 届博士，E-mail：wly1963@163.com；杨德礼(1939-)，男，教授，博士生导师.

本文在上述研究工作的基础上,建立一个具有储蓄功能的生死两全保险模型,模型中引入增额生存年金、增额终身寿险以及储蓄还本部分.考虑到保费的实际投资情况和突发事件对利率的影响,用反射 Brownian 运动来描述随机利率的连续变化部分,而用 Poisson 跳跃过程来描述不可预测的随机事件对利率连续性的破坏.将随机利率采用反射 Brownian 运动和 Poisson 过程联合建模.给出保单全部价值的计算公式,并进一步得到死亡均匀分布时的简洁计算公式.

1 准备知识

以 X 记被保险人在死亡时的年龄,则 X 是一个随机变量,以 $F(x)$ 记 X 的分布函数,则

$$F(x)=P(X\leqslant x);x\geqslant 0$$

$s(x)=1-F(x)$,称为生存函数.用(x)表示年龄为 x 岁的人,也称 x 岁生命,X 为(x)的寿命,用 $T(x)$ 表示其剩余寿命,$T(x)=X-x$,则 $T(x)$ 的密度函数为

$$f_T(t)={}_tp_x\cdot\mu_{x+t} \tag{1}$$

其中${}_tp_x$ 表示(x)至少活到 $x+t$ 岁的概率;某生命在瞬间的死亡概率 $\mu_{x+t}=-\dfrac{\mathrm{d}_tp_x}{\mathrm{d}t}\Big/{}_tp_x$,表示$(x)$在年龄 $x+t$ 处的死亡力.

2 模型的建立

设被保险人现龄 x 岁,身体健康,每年交保费 m 次,每次 R 元(期初交付),交款至 n 岁($x<n$).本文在不考虑税收情况下讨论生死两全保险.

2.1 保险责任

(1) 增额寿险部分:无论(x)何时死亡,都在死亡时即刻赔付保险金 $A(1+\alpha[T])$ 元,其中 $A>0$ 为确定的常数,$\alpha>0$ 为增长系数,$[T]$ 为被保险人整值剩余寿命.

(2) 增额年金部分:如果被保险人生存至 $h(h\geqslant n)$ 岁,则 h 岁以后每年可一次性领取生存保险金 $B[1+(k-h)l]$ 元,直至死亡,其中 $B>0$ 为确定的常数,$l>0$ 为增长系数,$k=h,h+1,\cdots,[T]$.

(3) 储蓄还本部分:当被保险人去世时,退还至死所交保费的 C 倍($C>0$ 为确定的常数).

2.2 保费的计算

首先计算出保险公司收入和支出的各项有关现值的数学期望,即精算现值,列出平衡方程,即可求出均衡年保费 R 的值.息力累积函数采用反射 Brownian 运动和 Poisson 过程联合建模,即

$$y(t)=\delta t+\beta|B_t|+\gamma Z_t$$

其中 $|B_t|$ 是反射Brownian 运动,Z_t 是Poisson 过程,B_t 与 Z_t 相互独立且均与 $T(x)$ 独立,δ、β、γ 是与 t 无关的随机变量或实常数且均与 B_t、Z_t 独立.

设投保人每次交保费 R 元,一年交 m 次,连续交保费 $n-x$ 年.若每次交付 1 个单位的保额,则其现值为 $\mathrm{e}^{-y(k)}$,$k=0,1,\cdots,n-x-1$.以$\ddot{a}_{n-x}$ 表示其精算现值,则共缴纯保费 $mR\,\ddot{a}_{n-x}$,其中

$$\ddot{a}_{n-x}=E_BE_ZE_TE(\mathrm{e}^{-y(T)}\mid[T(x)]=k)=\sum_{k=0}^{n-x-1}\int_0^k\mathrm{e}^{-\delta t}E_B(\mathrm{e}^{-\beta|B_t|})E_Z(\mathrm{e}^{-\gamma Z_t})f_T(t)\mathrm{d}t$$

因 Z_t 是参数为 λ 的 Poisson 过程,所以

$$E_Z(\mathrm{e}^{-\gamma Z_t})=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\gamma k}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}=\mathrm{e}^{\lambda t(\mathrm{e}^{-\gamma}-1)} \tag{2}$$

由反射 Brownian 运动的定义,有

$$E_B(\mathrm{e}^{-\beta|B_t|})=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta w}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{w^2}{2t\sigma^2}}\mathrm{d}w=2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t\sigma^2\beta^2}(1-\Phi(\sqrt{t}\beta\sigma)) \tag{3}$$

其中 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$.

从而

$$\ddot{a}_{n-x}=2\sum_{k=0}^{n-x-1}\int_0^k[\mathrm{e}^{-\delta t+\frac{1}{2}t\sigma^2\beta^2+\lambda t(\mathrm{e}^{-\gamma}-1)}\times(1-\Phi(\sqrt{t}\beta\sigma))f_T(t)]\mathrm{d}t \tag{4}$$

2.3 保单价值的计算

2.3.1 增额寿险部分 如果(x)在 $x+t$ 岁时死亡,得到的赔付额为 $1+\alpha[T]$,则其现值为$(1+\alpha[T])\mathrm{e}^{-y(T)}$,若用 A_x 表示其精算现值,则

$$A_x=E_BE_ZE_TE((1+\alpha[T])\mathrm{e}^{-y(T)}\mid T(x)=t)=2\int_0^{+\infty}[(1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\delta t+\frac{1}{2}t\sigma^2\beta^2+\lambda t(\mathrm{e}^{-\gamma}-1)}\times(1-\Phi(\sqrt{t}\beta\sigma))f_T(t)]\mathrm{d}t \tag{5}$$

从而增额寿险的精算现值为 AA_x 元.显然,当 $\alpha=0$ 时,增额寿险变成了等额寿险.

2.3.2 增额年金部分 若被保险人(x)生存至 h 岁以后,第 k 年可获得保险公司支付的 $1+(k-h)l$ 个单位的年金,则其现值为$[1+(k-h)l]\mathrm{e}^{-y(k)}$,以$(I\ddot{S})_h$ 表示其精算现值,则

$$(I\ddot{S})_h=E_BE_ZE_TE\{[1+(T(x)-h)l]\mathrm{e}^{-y(T)}\mid[T(x)]=k\}=2\sum_{k=h}^{+\infty}[1+(k-h)l]_kp_x\cdot q_{x+k}\times\int_0^k\mathrm{e}^{-\delta t+\frac{1}{2}t\beta^2\sigma^2+\lambda t(\mathrm{e}^{-\gamma}-1)}(1-\Phi(\sqrt{t}\beta\sigma))\mathrm{d}t \tag{6}$$

式中:q_{x+k} 表示$(x+k)$在 1 a 内死亡的概率.

终身年金给付额的精算现值为 $B(I\ddot{S})_h$. 同样地，当 $l=0$ 时，为等额给付年金的情形.

2.3.3　储蓄还本部分　设被保险人死亡时所得到的返回部分是 1 个单位，则其现值为随机变量 $e^{-y(t)}$，记其精算现值为 $E(Y)$，则

$$E(Y)=E_BE_ZE_TE\{e^{-y(T)}\mid[T(x)]=k\}=2\int_0^{+\infty}[e^{-\delta t+\frac{1}{2}t\sigma^2\beta^2+\lambda t(e^{-\gamma}-1)}\times(1-\Phi(\sqrt{t}\beta\sigma))f_T(t)]dt \tag{7}$$

所以还本部分的给付额为 $CmR\,\ddot{a}_{n-x}E(Y)$.

根据平衡原则，得到平衡方程

$$mR\,\ddot{a}_{n-x}=AA_x+B(I\ddot{S})_h+CmR\,\ddot{a}_{n-x}E(Y)$$

由平衡方程可以计算出每次所交保费

$$R=(AA_x+B(I\ddot{S})_h)/(m\,\ddot{a}_{n-x}-Cm\,\ddot{a}_{n-x}E(Y)) \tag{8}$$

如果在每一保单年度内死亡是均匀发生的，将保险期$[0,n)$分成 n 等份，$[0,n)=\bigcup_{k=0}^{n-1}[k,k+1)$，则在每一$[k,k+1)$上，$T$ 服从均匀分布，在这种情况下，对任意的 $t\in[k,k+1)$，$f_T(t)={}_tp_x\cdot q_{x+k}$，于是式(1) 变成

$$f_T(t)={}_tp_x\cdot\mu_{x+t}=\sum_{k=0}^{n-1}{}_kp_x\cdot q_{x+k}\cdot I_{[k,k+1)}(t) \tag{9}$$

其中 $I_{[k,k+1)}(t)$ 是示性函数. 对由 l_0 个新生生命组成的群体，在第 x 年还生存的人数为 l_x，则在第 x 年死亡的人数为 $d_x=l_x-l_{x+1}$，于是

$${}_kp_x=\frac{l_{x+k}}{l_x},\ q_{x+k}=\frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} \tag{10}$$

并注意到

$$\int_k^{k+1}e^{-\delta t+\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2t+\lambda t(e^{-\gamma}-1)}(1-\Phi(\sqrt{t}\beta\sigma))dt=\frac{2\beta\sigma}{[\sigma^2\beta^2-2\delta+2\lambda(e^{-\gamma}-1)]\sqrt{2[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]}}\times(\Phi(\sqrt{2(k+1)[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]})-\Phi(\sqrt{2k[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]}))+\frac{2e^{(k+1)\left[\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2-\delta+\lambda(e^{-\gamma}-1)\right]}}{\sigma^2\beta^2-2\delta+2\lambda(e^{-\gamma}-1)}(1-\Phi(\sqrt{k+1}\beta\sigma))-\frac{2e^{k\left[\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2-\delta+\lambda(e^{-\gamma}-1)\right]}}{\sigma^2\beta^2-2\delta+2\lambda(e^{-\gamma}-1)}(1-\Phi(\sqrt{k}\beta\sigma)) \tag{11}$$

则在死亡均匀分布条件下，将式(9) ～ (11) 代入到式(4) ～ (7) 中，有

$$\ddot{a}_{n-x}=\frac{4}{l_x[\sigma^2\beta^2-2\delta+2\lambda(e^{-\gamma}-1)]}\times\sum_{k=0}^{n-x-1}\Bigg[\frac{\beta\sigma d_{x+k}}{\sqrt{2[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]}}\times(\Phi(\sqrt{2(k+1)[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]})-\Phi(\sqrt{2k[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]}))+e^{(k+1)\left[\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2-\delta+\lambda(e^{-\gamma}-1)\right]}(1-\Phi(\sqrt{k+1}\beta\sigma))-e^{k\left[\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2-\delta+\lambda(e^{-\gamma}-1)\right]}(1-\Phi(\sqrt{k}\beta\sigma))\Bigg] \tag{12}$$

$$A_x=\frac{4}{l_x[\sigma^2\beta^2-2\delta+2\lambda(e^{-\gamma}-1)]}\times\sum_{k=0}^{+\infty}\Bigg[\frac{\beta\sigma d_{x+k}}{\sqrt{2[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]}}\times(\Phi(\sqrt{2(k+1)[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]})-\Phi(\sqrt{2k[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]}))+e^{(k+1)\left[\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2-\delta+\lambda(e^{-\gamma}-1)\right]}(1-\Phi(\sqrt{k+1}\beta\sigma))-e^{k\left[\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2-\delta+\lambda(e^{-\gamma}-1)\right]}(1-\Phi(\sqrt{k}\beta\sigma))\Bigg] \tag{13}$$

$$(I\ddot{S})_h=\frac{4}{l_x[\sigma^2\beta^2-2\delta+2\lambda(e^{-\gamma}-1)]}\times\sum_{k=h}^{+\infty}[1+(k-h)l]\times\Bigg\{d_{x+h}\times\Bigg[\frac{\sigma\beta\left[\Phi(\sqrt{2h[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]})-\frac{1}{2}\right]}{\sqrt{2[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]}}+e^{h\left[\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2-\delta+\lambda(e^{-\gamma}-1)\right]}(1-\Phi(\sqrt{h}\beta\sigma))-\frac{1}{2}\Bigg]+\sum_{s=h}^{k}d_{x+s}\Bigg[\frac{\sigma\beta}{\sqrt{2[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]}}\times(\Phi(\sqrt{2(s+1)[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]})-\Phi(\sqrt{2s[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]}))+e^{(s+1)\left[\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2-\delta+\lambda(e^{-\gamma}-1)\right]}(1-\Phi(\sqrt{s+1}\beta\sigma))-e^{s\left[\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2-\delta+\lambda(e^{-\gamma}-1)\right]}(1-\Phi(\sqrt{s}\beta\sigma))\Bigg]\Bigg\} \tag{14}$$

$$E(Y)=2\sum_{k=0}^{+\infty}{}_kp_x\cdot q_{x+k}\int_k^{k+1}[e^{-\delta t+\frac{1}{2}t\sigma^2\beta^2+\lambda t(e^{-\gamma}-1)}\times(1-\Phi(\sqrt{t}\beta\sigma))]dt=\frac{4}{l_x[\sigma^2\beta^2-2\delta+2\lambda(e^{-\gamma}-1)]}\times\sum_{k=0}^{n-x-1}\Bigg[\frac{\beta\sigma d_{x+k}}{\sqrt{2[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]}}\times(\Phi(\sqrt{2(k+1)[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]})-\Phi(\sqrt{2k[\delta-\lambda(e^{-\gamma}-1)]}))+e^{(k+1)\left[\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2-\delta+\lambda(e^{-\gamma}-1)\right]}(1-\Phi(\sqrt{k+1}\beta\sigma))-e^{k\left[\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2-\delta+\lambda(e^{-\gamma}-1)\right]}(1-\Phi(\sqrt{k}\beta\sigma))\Bigg] \tag{15}$$

这样用生命表就可以简单地进行保费的计算了.

3 结 论

本文建立了一个新的寿险精算模型,模型中含有终身寿险、年金和还本部分,对于投保人来说,这种保险具有保险和储蓄的双重功能,增加了保险的吸引力. 而且保险公司可以根据不同的情况调整参数得到不同的保险产品. 本文还同时考虑了利率的随机性,在随机利率中引进 Poisson 过程,可以避免或减小突发事件所形成的利率风险对保险公司的影响;而引进反射 Brownian 运动,则避免了采用较高的固定利率计算保费给投保人造成的经济负担. 模型充分考虑了投保人和保险公司的综合利益,最终使投保人和承保人都有所收获,可以确保保险经营的正常进行.

参考文献:

[1] 伍超标. 博士后研究工作报告《概率统计的若干应用问题》之 4.4 [R]. 上海:华东师范大学, 1995:84-92

[2] BEEKMAN J A, FUELLING C P. Interest and mortality randomness in some annuities [J]. **Insurance:Mathematics and Economics**, 1990, **9**(2-3):185-196

[3] BEEKMAN J A, FUELLING C P. Extra randomness in certain annuity models [J]. **Insurance:Mathematics and Economics**, 1991, **10**(4):275-287

[4] BEEKMAN J A, FUELLING C P. One approach to dual randomness in life insurance [J]. **Scandinavian Actuarial Journal**, 1993, **76**(2):173-182

[5] DE SCHEPPER A, DE VYLDER F, GOOVAERTS M, *et al*. Interest randomness in annuities certain [J]. **Insurance:Mathematics and Economics**, 1992, **11**(4):271-282

[6] DE SCHEPPER A, GOOVAERTS M. Some further results on annuities certain with random interest [J]. **Insurance:Mathematics and Economics**, 1992, **11**(4):283-290

[7] DE SCHEPPER A, GOOVAERTS M, DELBAEN F. The Laplace transform of annuities certain with exponential time distribution [J]. **Insurance:Mathematics and Economics**, 1992, **11**(4):291-294

[8] 何文炯,蒋庆荣. 随机利率下的增额寿险 [J]. 高校应用数学学报 A 辑(中文版), 1998, **13**(2):145-152

[9] 刘凌云,汪荣明. 一类随机利率下的增额寿险 [J]. 应用概率统计, 2001, **17**(3):283-290

[10] PERRY D, STADJE W. Function space integration for annuities [J]. **Insurance:Mathematics and Economics**, 2001, **29**(1):73-82

[11] PERRY D, STADJE W, YOSEF R. Annuities with controlled random interest rates [J]. **Insurance:Mathematics and Economics**, 2003, **32**(2):245-253

[12] ZAKS A. Annuities under random rates of interest [J]. **Insurance:Mathematics and Economics**, 2001, **28**(1):1-11

[13] NGWIRA B, GERRARD R. Stochastic pension fund control in the presence of Poisson Jumps [J]. **Insurance:Mathematics and Economics**, 2007, **40**(2):283-292

Increasing endowment assurance policy under stochastic rates of interest

WANG Li-yan*[1], HAO Ya-li[1], ZHANG Hai-jiao[2], YANG De-li[3]

(1. College of Information Engineering, Dalian University, Dalian 116622, China;
2. College of International Trade and Economy, Central University of Finance and Economy, Beijing 102206, China;
3. School of Management, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Based on assurance issue under stochastic interest rate, the endowment assurance policy model which has deposit function is established. The survival annuity, increasing life insurance and repaid principal are introduced. Considering the influence of the actual investment of premiums and the outburst cases on interest rate, the random interest rate is decided by both reflected Brownian motion and Poisson process, and then, a whole value formula of the insurance policy is obtained. Finally, the concise expressions of formula are given in the case that death happens uniformly in every policy year. The cases mentioned in the model correspond with the reality, and this model has theoretical and practical value in solving the problem of insurance company reasonably claiming premiums, insurance payment and crisis management.

Key words: stochastic rates of interest; annuity; life insurance; actuarial present value