第50卷第6期
2010年11月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 50, No. 6
Nov. 2010

文章编号：1000-8608(2010)06-0854-06

轴向行进弦附带质量-弹簧振子系统特征值分析

吕乐丰*，王跃方，刘迎曦

（大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室，辽宁 大连 116024）

摘要： 陀螺系统的特征值问题是一个重要课题.通过构造 Green 函数，解决了轴向行进弦附带单质量-弹簧振子耦合系统的特征值问题.根据 Green 函数构造定理，给出了耦合模型 Green 函数的显式形式，从而得到了精确的特征方程.讨论了当振子的特征频率接近于弦线的基频时，行进弦低阶模态与振子间的耦合作用，采用特征频率的最大变化定量地表征了这种耦合强度.数值结果表明：耦合系统的特征频率随着弹簧刚度的增大而增大，随着行进速度的增大而减小.最后，给出了系统可能出现重根的条件.

关键词： 轴向行进弦；质量-弹簧振子；Green 函数；特征值；动力耦合

中图分类号： O175.9　　**文献标志码：** A

0 引　言

轴向行进材料、转子系统、流体传输的管道等都属于陀螺系统，其动力学方程中的对流加速度算子（反对称的陀螺算子）使系统产生了依赖于速度的复模态.对于离散陀螺系统，Meirovitch[1,2]把陀螺特征值问题转化为对称阵的特征值问题求解，并对线性系统进行了模态分析.Parker[3]提出了弹性基础上的轴向行进系统近似特征值的摄动分析方法.由于行进系统的模态分析本质上是辛的，在哈密顿体系下求解具有很大的理论和数值上的优点.转换为哈密顿体系后，原系统的特征解呈共轭对出现并且在 Hilbert 空间中具有完备性[4].Wang 等[5]将轴向行进弦导入哈密顿体系，分析了行进弦的辛特征值问题并给出了复特征函数的辛共轭正交性关系，得到了行进弦自由振动的精确解.

近年来，随着对车桥耦合系统、传送带、悬空索道等实际问题的深入研究，人们提出了准确的数学模型如移动力模型、移动质量模型和移动振子模型[6~11].移动力模型忽略了子系统的所有动力学影响及弹性体间的耦合作用，把子系统简化为施加于弹性体之上的外部集中力，其作用点沿着弹性体随时间变化.移动质量模型把子系统简化为直接附着在弹性体上的集中质量，但忽略子系统的弹性耦合力.与移动力模型和移动质量模型相比，移动振子模型认为振子和弹性体间以弹簧连接，因此更接近物理实际.振子和弹性体的耦合作用改变了系统的惯性等许多特征，从而使得系统的特征值依赖于振子所在的位置，这给特征值问题的求解带来了更大的困难.Stanisic 等[7]分析了梁附带移动质量的特征值问题，考虑了两者之间的耦合，推导了特征值的解析解并给出了 Stieltjes 意义下特征函数的正交性.Wickert 等[8]首先研究了轴向行进弦-集中质量耦合系统的横向振动，采用摄动方法给出了较小行进速度的轴向行进弦附带较小质量时的近似特征值.上述 3 种数学模型都涉及到点荷载的激励形式，采用 Green 函数具有明显的物理意义，对于这类问题的分析是非常有效的.Kukla 等[12,13]采用 Green 函数法分析了轴向受载梁在局部复杂约束下的特征值问题.Wickert 等[9]研究了轴向行进弦-集中质量耦合系统受任意初始条件和激励力的受迫响应，应用 Green 函数方法推导了求解耦合力的时

收稿日期： 2008-06-02；　**修回日期：** 2010-07-12.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(10472021，10721062).
作者简介： 吕乐丰*(1982-)，男，博士，E-mail：lorrykey@gmail.com；王跃方(1967-)，男，博士，教授，博士生导师；刘迎曦(1944-)，男，教授，博士生导师.

滞 Volterra 积分型方程，构造了质量较小时的近似解. Zhu 等[10]给出了轴向行进弦附带线性阻尼振子在任意激励和边界条件下的自由和受迫响应解析解. 然而，在陀螺系统的理论研究中，人们普遍关注的附带振子的轴向行进系统的特征值问题却一直没有得到解决.

本文通过构造 Green 函数，求解轴向行进弦附带单质量-弹簧振子耦合系统的特征值问题. 借由 Green 函数构造定理，给出耦合模型的特征值方程的显式形式. 结合数值算例，以特征值的最大变化为性能指标度量振子同行进弦低阶模态的耦合强度，并且讨论轴向行进速度和弹簧刚度对特征值的影响.

1　特征值问题的数学模型

考虑如图 1 所示的通过两个相距为 L 的水平固定支承的轴向行进弦. 它以速度 c 自左向右匀速运动，弦上作用着单质量 - 弹簧振子，记行进弦的横向位移为 $w(x,t)$. 设振子的初始位置为左端支承处，当前位置为 x_0，各参数为质量 m，弹簧刚度 k，绝对位移 $y(t)$，振子所在处弦线的横向位移 $z(t)$. 在小变形假设下，忽略弦的弯曲、剪切、扭转刚度，得到轴向行进弦横向振动的动力学方程为[9]

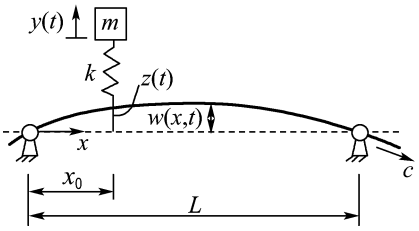

图 1　附带质量-弹簧系统的轴向行进弦

Fig. 1　Axially moving string with an attached mass-spring oscillator

$$\rho A(\ddot{w}(x,t)+2c\dot{w}'(x,t)+c^2w''(x,t))-T_0w''(x,t)=k(y(t)-z(t))\delta(x-x_0)-\rho Ag+f_1(t) \tag{1}$$

以及附带的质量需满足如下控制方程：

$$m\ddot{y}(t)+k(y(t)-z(t))=-mg+f_2(t) \tag{2}$$

其中 ρ、A、T_0 分别为弦线的密度、横断面积和初始张力，$\delta(\cdot)$ 是 Dirac Delta 函数，$f_1(t)$、$f_2(t)$ 分别是作用在行进弦和质量上的与状态变量无关的外力.

引入下述量纲一量：

$$w\leftrightarrow\frac{w}{L},y\leftrightarrow\frac{y}{L},x\leftrightarrow\frac{x}{L},r\leftrightarrow\frac{r}{L},z\leftrightarrow\frac{z}{L},$$

$$t\leftrightarrow\omega t,c\leftrightarrow\frac{c}{L\omega},\omega^2=\frac{T_0}{\rho AL^2},k\leftrightarrow\frac{kL}{T_0},$$

$$m\leftrightarrow\frac{m}{\rho AL},f_1\leftrightarrow\frac{f_1L}{T_0},f_2\leftrightarrow\frac{f_2L}{T_0},\bar{q}=\frac{\rho AgL}{T_0}$$

导出耦合系统量纲一形式的动力学方程为

$$\ddot{w}(x,t)+2c\dot{w}'(x,t)+(c^2-1)w''(x,t)=k[y(t)-w(x_0,t)]\delta(x-x_0)-\bar{q}+f_1(t) \tag{3}$$

$$\ddot{y}(t)+\frac{k}{m}[y(t)-w(x_0,t)]=-\bar{q}+f_2(t) \tag{4}$$

方程(3) 量纲一的边界条件为

$$w(0,t)=w(1,t)=0 \tag{5}$$

为了推导系统的特征值方程，令

$$w(x,t)=\mathrm{Re}(\phi(x)\mathrm{e}^{\lambda t}),\ y(t)=Y\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{6}$$

其中 $\lambda\in\mathbf{C}^1$ 为系统的复特征值.

将上式代入到方程(3) 和(4) 的齐次方程中，对应的特征值问题为

$$\lambda^2\phi(x)+2c\lambda\phi'(x)+(c^2-1)\phi''(x)=-\varepsilon\phi(x_0)\delta(x-x_0) \tag{7}$$

$$Y=k\phi(x_0)/(m\lambda^2+k) \tag{8}$$

其中 $\varepsilon=mk\lambda^2/(m\lambda^2+k)$.

当 $\lambda=0$ 时，可由方程(7) 得到行进弦的临界速度($c=1$) 和对应于临界速度的特征函数. 下文如不作特别说明，则认为 $c\neq1$.

设 $G(x,x_0)$ 为方程(7) 的 Green 函数，则

$$\phi(x)=-\int_0^1\varepsilon\phi(x_0)\delta(x-x_0)G(x,x_0)\mathrm{d}x_0=-\varepsilon\phi(x_0)G(x,x_0) \tag{9}$$

将 $x=x_0$ 代入上式，系统有非零解的必要条件为

$$1+\varepsilon G(x_0,x_0)=0 \tag{10}$$

这就是系统的特征方程. 当 $k\to\infty$ 时，$\varepsilon\to m\lambda^2$，方程(10) 退化为移动质量模型的特征方程

$$1+m\lambda^2G(x_0,x_0)=0 \tag{11}$$

2　Green 函数法特征值分析

按照 Green 函数的定义，$G(x,x_0)$ 应满足如下方程：

$$\lambda^2G(x,x_0)+2c\lambda G'(x,x_0)+(c^2-1)G''(x,x_0)=\delta(x-x_0) \tag{12}$$

及边界条件

$$G(0,x_0)=G(1,x_0)=0 \tag{13}$$

求解 Green 函数的方法有点源法、镜像法等. 对于二阶常微分方程,若能够得到对应于其齐次方程的两个独立解,则可以通过 Green 函数构造定理得到系统的 Green 函数的显式表达式.

Green 函数构造定理[14] 对于微分算子 $L=P(x)\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+Q(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+R(x)$,如果 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 满足

$$\begin{aligned}&Lu_1=0,au_1(\xi_0)+a'u_1'(\xi_0)=0\\&Lu_2=0,bu_2(\xi_1)+b'u_2'(\xi_1)=0\end{aligned} \tag{14}$$

并且 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 的 Wronskian 行列式非零,即

$$W(u_1,u_2)\equiv\begin{vmatrix}u_1(x) & u_2(x)\\ u_1'(x) & u_2'(x)\end{vmatrix}\neq 0 \tag{15}$$

那么算子 L 的 Green 函数为

$$G(x,\xi)=\frac{1}{P(\xi)W(u_1,u_2)\mid_{x=\xi}}\begin{cases}u_1(x)u_2(\xi);\ x<\xi\\ u_1(\xi)u_2(x);\ \xi<x\end{cases} \tag{16}$$

上述定理可以通过 Green 函数的基本性质进行验证,即由式(16)定义的 Green 函数 $G(x,\xi)$ 在 $x=\xi$ 处是连续的,即

$$G(x,\xi^-)=G(x,\xi^+) \tag{17}$$

以及 Green 函数的微分 $\mathrm{d}G/\mathrm{d}x$ 在 $x=\xi$ 处满足跳跃性条件

$$\left.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\xi^+}-\left.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\xi^-}=\frac{1}{P(x)} \tag{18}$$

方程(12)的二阶微分算子 L 的各系数表达式为

$$P(x)=c^2-1,Q(x)=2c\lambda,R(x)=\lambda^2$$

满足式(13)中的边界条件,齐次方程(12)的两个特解为

$$\begin{aligned}&\phi_1(x)=\exp\left(-\frac{\lambda x}{c-1}\right)-\exp\left(-\frac{\lambda x}{c+1}\right);\\&\qquad 0\leqslant x<x_0\\&\phi_2(x)=\exp\left(-\frac{\lambda(x-1)}{c-1}\right)-\exp\left(-\frac{\lambda(x-1)}{c+1}\right);\\&\qquad x_0<x\leqslant 1\end{aligned} \tag{19}$$

易知 $W(\phi_1,\phi_2)\neq 0$. 按照 Green 函数构造定理,可得

$$G(x,x_0)=\frac{1}{(c^2-1)W(\phi_1,\phi_2)\mid_{x=x_0}}\times\begin{cases}\phi_1(x)\phi_2(x_0);\ 0\leqslant x<x_0\\ \phi_1(x_0)\phi_2(x);\ x_0<x\leqslant 1\end{cases} \tag{20}$$

将式(19)、(20)代入到方程(10)和(11)中,可以得到移动振子模型的特征值方程

$$\begin{aligned}&2(m\lambda^2+k)[\exp(\lambda A_1)-\exp(\lambda A_3)]+\\&km\lambda[\exp(\lambda A_2)+\exp(\lambda A_4)-\\&\exp(\lambda A_1)-\exp(\lambda A_3)]=0\end{aligned} \tag{21}$$

移动质量模型的特征方程

$$\begin{aligned}&2[\exp(\lambda A_1)-\exp(\lambda A_3)]+m\lambda[\exp(\lambda A_2)+\\&\exp(\lambda A_4)-\exp(\lambda A_1)-\exp(\lambda A_3)]=0\end{aligned} \tag{22}$$

其中

$$A_1=\frac{1-x_0}{c-1}-\frac{x_0}{c+1},A_2=\frac{1-2x_0}{c+1},$$

$$A_3=\frac{1-x_0}{c+1}-\frac{x_0}{c-1},A_4=\frac{1-2x_0}{c-1}$$

特征值方程(21)、(22)属于指数型的复超越方程,方程的根依赖于振子所在的位置,一般无法精确求解. 但在 $c<1$ 时,系统(3)属于正定的陀螺系统,其特征值为纯虚数[15]. 把 $\lambda=\mathrm{i}\omega$ 代入特征值方程,分离实部和虚部,以振子所在位置 x_0 为延拓参数,利用数值延拓(或路径跟踪)[16]可得系统的特征值. 各阶特征值的初始值可由下述推导确定.

当 $x_0=0,1$ 时,方程(21)可以简化为

$$(m\lambda^2+k)\left[\exp\left(\frac{\lambda}{c-1}\right)-\exp\left(\frac{\lambda}{c+1}\right)\right]=0;\quad x_0=0 \tag{23a}$$

$$(m\lambda^2+k)\left[\exp\left(-\frac{\lambda}{c+1}\right)-\exp\left(-\frac{\lambda}{c-1}\right)\right]=0;\quad x_0=1 \tag{23b}$$

由于式(21)、(22)关于弦中点对称,系统的特征值关于弦中点对称分布. 式(23b)两边同乘以 $\exp\left(\dfrac{2c\lambda}{c^2-1}\right)$ 就变成了式(23a). 方程(23a)的解为

$$\lambda=\pm\mathrm{i}\sqrt{k/m}\triangleq\pm\mathrm{i}\Omega_0$$

或

$$\lambda=\pm\mathrm{i}n\pi(1-c^2)\triangleq\pm\mathrm{i}\Omega_n;\ n=1,2,3,\cdots$$

也就是说,当 $x=0,1$ 时,系统的特征值就是子系统无耦合时各自特征值的并集. 由上式各值延拓可得系统各特征频率,记为

$$\{\bar{\omega}_n(x_0)\} = \{\omega_0(x_0), \omega_1(x_0), \cdots, \omega_n(x_0)\}$$

并分别称 $\omega_0(x_0)$ 和 $\omega_1(x_0), \omega_2(x_0), \cdots, \omega_n(x_0)$ 为在 $x = x_0$ 处振子和行进弦的特征频率. 同样地，把 $x_0 = 0, 1$ 代入到方程(22)中，得到移动质量模型的特征值的初始值为

$$\lambda = \pm \mathrm{i} n\pi(1 - c^2);\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

3　结果及讨论

取 $c = 0.25, m = 0.375, k = 3.4$，则 $\{\bar{\omega}_n(0)\} = \{3.011\ 1, 2.945\ 2, 5.890\ 4, 8.835\ 6, \cdots\}$，可见振子刚进入行进弦时，其特征频率接近于行进弦的一阶频率. 系统前五阶特征频率(即 $\{\bar{\omega}_4(x_0)\}$) 和四阶 Galerkin 展开的近似解如表 1 所示. Galerkin 方法采用的试函数是驻弦的特征函数，即 $\sin(n\pi x), n = 1, 2, 3, 4$. 由于特征值关于弦中点对称，表 1 中只列出了 $x \leqslant 0.5$ 的结果. 振子和行进弦之间的耦合作用可以通过系统特征值的最大变化率来表征，由表 1 知，行进弦的前四阶特征频率相对于边界(两子系统无耦合时)的最大变化率分别为 34.76%、10.02%、4.32%、2.27%. 这表明，当振子的特征频率接近行进弦的第一阶特征频率时，振子主要通过行进弦的前两阶模态发生相互作用，对行进弦的高阶模态影响相对较小. 另一方面，表 1 也表明 Galerkin 方法可以准确地确定较低阶的特征频率，但对于高阶特征频率误差较大，需要更高的展开阶数.

表 1　系统的前五阶特征频率 Green 函数法(GF)和四阶 Galerkin 近似方法(G4)的结果比较

Tab. 1　Comparison of the first five eigenfrequencies of the system between Green's function method (GF) and fourth order Galerkin expansion method (G4)

x_0	GF					G4				
	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
0	3.011 1	2.945 2	5.890 5	8.835 7	11.781 0	3.011 1	2.946 2	5.902 4	8.986 5	13.148 6
0.05	3.071 6	2.676 2	5.947 5	8.907 5	11.868 4	3.134 9	2.750 0	5.964 9	9.089 3	13.236 5
0.10	3.190 0	2.453 2	6.074 8	9.055 2	12.016 1	3.243 3	2.511 7	6.101 1	9.294 0	13.393 9
0.15	3.318 7	2.292 7	6.230 2	9.187 6	12.048 3	3.357 1	2.327 2	6.257 2	9.431 4	13.419 2
0.20	3.457 7	2.174 9	6.380 1	9.203 4	11.888 7	3.498 3	2.205 1	6.420 4	9.403 2	13.284 8
0.25	3.606 2	2.087 5	6.480 5	9.053 2	11.781 0	3.661 6	2.121 1	6.554 7	9.209 9	13.196 0
0.30	3.762 4	2.023 1	6.474 4	8.876 4	11.874 1	3.826 6	2.054 4	6.567 9	9.020 6	13.283 6
0.35	3.921 0	1.976 7	6.339 1	8.845 5	12.027 8	3.984 5	2.001 5	6.415 7	9.008 0	13.424 1
0.40	4.069 5	1.945 4	6.135 2	8.967 3	12.038 8	4.142 7	1.967 0	6.187 0	9.135 4	13.433 6
0.45	4.183 6	1.927 3	5.959 7	9.136 5	11.880 9	4.288 0	1.950 9	5.986 5	9.286 4	13.303 7
0.50	4.228 3	1.921 4	5.890 5	9.217 5	11.781 0	4.354 0	1.946 9	5.902 7	9.354 6	13.218 5
最大变化率	40.42%	34.76%	10.02%	4.32%	2.27%	44.60%	33.92%	11.28%	4.95%	2.17%

弹簧的刚度系数 k 对行进弦第一阶特征频率的影响如图 2 所示. 如果固定振子的位置，ω_1 随着 k 的增加而增加，并且当 $k \to \infty$ 时趋近于移动质量模型中的 ω_1^{∞}. 表 2 列出了 $c = 0.25, m = 0.375$ 时，移动质量模型系统的前三阶特征频率. 各最大变化率分别为 25.00%、22.28%、19.66%，也就是说，振子对行进弦各阶频率都有较大的影响.

当 $k = 3.4, m = 0.375, x_0 = 0.5$ 时，行进速度 c 对系统前四阶特征频率的影响如图 3 所示. 系统的特征频率随着行进速度的增加而减小，当行进速度达到临界速度时，所有的特征值退化为 0，系统平衡位置发散失稳. 图 4 为 $c = 0.25, m = 0.375, x_0 = 0.5$ 时，弹簧刚度 k 对系统前四阶特征频率的影响. 可以看出，系统的第一、二、四阶频率随着 k 的增加而增加，但第三阶频率保持不变，说明系统在当前位置有不变的特征频率. 与非附带子系统的轴向行进弦不同的是，随着行进速度、弹簧刚度的增加，振子在移动过程中系统的特征值可能出现重根，如图 3 中 A 点($c = 0.721\ 6$)和图 4 中 B 点($k = 13.012\ 0$). 这是因为，在系统特

征值参数空间中，振子特征值附近的曲线段同特征值判定线的关系从相割变为相切，两个特征值退化为一个. 把参数 $x_0=0.5$ 代入式(21)，得到系统产生重根的条件为

$$\sqrt{k/m}=2n\pi(1-c^2);\ n=1,2,\cdots \quad (24)$$

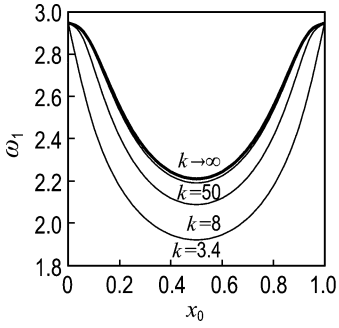

图 2 弹簧刚度系数 k 对行进弦第一阶特征频率的影响

Fig. 2 Effects of spring stiffness k on the first eigenfrequency of the moving string

表 2 附带质量模型的前三阶特征频率

Tab. 2 The first three eigenfrequencies of attached mass model

x_0	ω_1	ω_2	ω_3
0	2.945 2	5.890 5	8.835 7
0.10	2.821 5	4.847 2	7.121 7
0.20	2.552 1	4.578 2	7.742 0
0.30	2.351 0	4.880 1	8.644 4
0.40	2.242 7	5.419 7	8.022 9
0.50	2.209 0	5.890 5	7.098 6
最大变化率	25.00%	22.28%	19.66%

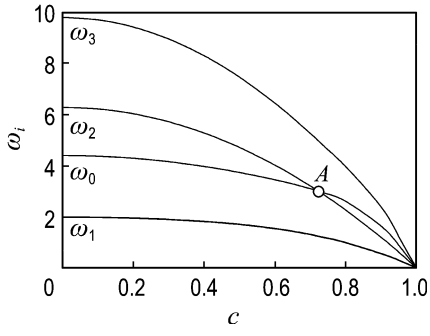

图 3 行进速度 c 对系统前四阶特征频率的影响

Fig. 3 Effects of moving speed c on the first four eigenfrequencies of the system

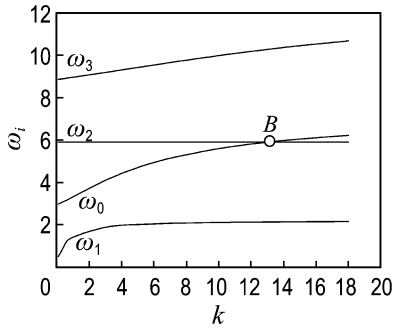

图 4 弹簧刚度 k 对系统前四阶特征频率的影响

Fig. 4 Effects of spring stiffness k on the first four eigenfrequencies of the system

4 结 论

(1)行进弦移动振子模型的特征值依赖于振子所在的位置，每阶特征值都关于弦线中点呈对称分布.

(2)移动质量模型的特征值问题是移动振子模型特征值问题弹簧刚度趋于无穷大的极限形式.

(3)当振子的特征频率接近行进弦的第一阶特征频率时，振子主要通过行进弦的前两阶模态发生相互作用，对行进弦的高阶模态影响较小；而移动质量模型中质量对行进弦低阶特征值的影响都较大.

(4)系统特征频率随着弹簧刚度的增大而增大，随着行进速度的增大而减小，并且可能出现重根.

参考文献：

[1] MEIROVITCH L. A new method of solution of the eigenvalue problem for gyroscopic systems [J]. **AIAA Journal**, 1974, **12**(10):1337-1342

[2] MEIROVITCH L. A modal analysis for the response of linear gyroscopic systems [J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1975, **42**(2):446-450

[3] PARKER R G. On the eigenvalues and critical speed stability of gyroscopic continua [J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1998, **65**(1):134-140

[4] 钟万勰. 发展型哈密顿核积分方程[J]. 大连理工大学学报, 2003, **43**(1):1-11
(ZHONG Wan-xie. The integral equation with Hamilton kernel [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2003, **43**(1):1-11)

[5] WANG Y F, HUANG L H, LIU X T. Eigenvalue and stability analysis for transverse vibrations of axially moving strings based on Hamiltonian dynamics [J]. **Acta Mechanica Sinica**, 2005, **21**(5):485-494

[6] WICKERT J A, MOTE C D JR. Classical vibration analysis of axially moving continua [J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1990, **57**(3):738-744

[7] STANISIC M M. On a new theory of the dynamic behavior of the structures carrying moving masses [J]. **Archive of Applied Mechanics**, 1985, **55**(3): 176-185

[8] WICKERT J A, MOTE C D JR. Linear transverse vibration of an axially moving string-particle system [J]. **Journal of the Acoustical Society of America**, 1988, **84**(3):963-969

[9] WICKERT J A, MOTE C D JR. Travelling load response of an axially moving string [J]. **Journal of Sound and Vibration**, 1991, **149**(2):267-284

[10] ZHU W D, MOTE C D JR. Free and forced response of an axially moving string transporting a damped linear oscillator [J]. **Journal of Sound and Vibration**, 1994, **177**(5):591-610

[11] PESTEREV A V, BERGMAN L A. Response of an elastic continuum carrying moving linear oscillator [J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1997, **123**(8):878-884

[12] KUKLA S. The Green function method in frequency analysis of a beam with intermediate elastic supports [J]. **Journal of Sound and Vibration**, 1991, **149**(1): 154-159

[13] KUKLA S, ZAMOJSKA I. Frequency analysis of axially loaded stepped beams by Green's function method [J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2007, **300**(3-5):1034-1041

[14] GERLACH U H. Linear mathematics in infinite dimensions: signals, boundary value problems, and special functions [EB/OL]. (2008-10-12). http://www.math.ohio-state.edu/ ~ gerlach/math/BVtypset/

[15] LEE K Y, RENSHAW A A. Solution of the moving mass problem using complex eigenfunction expansions [J]. **Journal of Applied Mechanics**, 2000, **67**(4):823-827

[16] ALLGOWER E L, SIAM K G. **Introduction to Numerical Continuation Methods** [M]. 2nd ed. New York: Wiley & Sons, 2003

Eigenvalue analysis of axially moving string with an attached mass-spring oscillator

LÜ Le-feng*, WANG Yue-fang, LIU Ying-xi

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: There have been considerable efforts to analyze the eigenvalue problem for gyroscopic systems in practice. The eigenvalue problem of an axially moving string with an attached mass-spring oscillator is solved by means of Green's function method. The explicit Green's function is obtained by the Construction Theorem of Green's Function and thus the closed form transcendental equations of the natural frequencies are presented. The maximum variance rate is adopted to express the dynamical interaction between the subsystems. It is found out that the dynamical interaction between subsystems mainly acts on the first two modes of the moving string when the eigenfrequency of the oscillator is close to the first eigenfrequency of the moving string. Numerical results demonstrate that the eigenfrequencies of the coupled system increase with the spring stiffness and decrease with the transport speed. The possible existence condition for the duplicate eigenvalues is also proposed.

Key words: axially moving string; mass-spring oscillator; Green's function; eigenvalue; dynamical interaction