第50卷第6期
2010年11月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 50, No. 6
Nov. 2010

文章编号：1000-8608(2010)06-1051-04

局部环上典型群BN-对构造

秦玉芳*[1,2]， 南基洙[1]

（1.大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024；
2.上海海洋大学 信息学院，上海 201306）

摘要：构造群的 BN-对是 Building 理论中的一个重要课题.由于每个 BN-对都对应一个 Weyl 群，通过研究 Weyl 群可以得到群的各种性质，从而 BN-对成为研究群的一个重要工具.假定 R 是一个局部环，通过采用矩阵方法构造了 R 上一般线性群、辛群、正交群的 BN-对.构造了局部环上一族具有包含关系的一般线性群的 BN-对，并且证明了这组一般线性群和对应的 BN-对之间满足一个交换图.

关键词：局部环；典型群；初等辛矩阵；BN-对
中图分类号：O152.3　　**文献标志码**：A

0 引　言

Tits 提出 Building 和 BN-对的概念是为了从几何观点来理解例外李型群，此后人们发现，每一个李型群都对应于一个 Building，与 Building 相对应的是李型群中的 BN-对结构.由于 Building 这个几何结构对于研究相应群的各种性质具有深刻的意义，它在有限李型单群的结构理论和表示论、代数群及其表示等方面都得到了重要应用.

判定一个群是否存在 BN-对，及如何构造它的 BN-对是 Building 理论中的一个研究课题. Carter[1]证明了连通约化群是具有 BN-对的群.文献[2、3]构造了任意域上典型群的 BN-对和 Building. Iwahori 等[4]构造了带有离散赋值的域上的特殊线性群的另外一个 BN-对.本文在文献[2]的基础上采用矩阵方法构造局部环上一般线性群、辛群、正交群的 BN-对，并证明局部环上一族具有包含关系的一般线性群和对应的 BN-对之间满足一个交换图，且局部环上的辛群和正交群也有类似的结论.

1 预备知识

定义 1[5]　设 R 是一个局部环，$n = 2\nu(\nu \in \mathbf{Z}^{+})$，且

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}^{(\nu)} \\ -\boldsymbol{I}^{(\nu)} & \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{Sp}_n(R) = \{\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{GL}_n(R): \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S}\}$，则称 $\boldsymbol{Sp}_n(R)$ 为 R 上的 n 阶辛群.

定义 2[5]　设 R 是一个局部环，$n = 2\nu(\nu \in \mathbf{Z}^{+})$，且

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}^{(\nu)} \\ \boldsymbol{I}^{(\nu)} & \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{O}_n(R) = \{\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{GL}_n(R): \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S}\}$，则称 $\boldsymbol{O}_n(R)$ 为 R 上的 n 阶正交群.

定义 3[3]　在群 $\boldsymbol{G}$ 中，子群 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 被称为一个 BN-对，如果 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 生成了 $\boldsymbol{G}$，子群 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{N}$ 是 $\boldsymbol{N}$ 的一个正规子群，商群 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{N}/\boldsymbol{T}$ 存在一个由对合构成的生成元集 $\boldsymbol{S}$，且满足下面两个公理：

公理 1　$\boldsymbol{BsB} \cdot \boldsymbol{BwB} \subset \boldsymbol{BswB} \cup \boldsymbol{BwB}$，其中 $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$.

公理 2　$\boldsymbol{sBs}^{-1} \not\subset \boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{S}$.

四元对$(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{S})$ 称为群 $\boldsymbol{G}$ 的一个 Tits 系统，群 $\boldsymbol{W}$ 是与 BN- 对相伴的 Weyl 群，$\boldsymbol{S}$ 的基数是 Tits 系统的秩.如果 Weyl 群是有限群，则称 BN-对是球形的.

收稿日期：2008-07-22；　修回日期：2010-08-04.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10771023).
作者简介：秦玉芳*(1981-)，女，博士，E-mail:qinyufang666@126.com；南基洙(1965-)，男，教授，博士生导师，E-mail:jznan@163.com.

类似于域上初等辛矩阵,如下定义局部环上初等辛矩阵.

定义4　用$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_\nu,\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_\nu$表示局部环$R$上$2\nu$维向量空间的一组标准基底.初等辛矩阵是指在下面的嵌入中,2×2初等矩阵在$\boldsymbol{Sp}_{2\nu}(R)$中的像:

(1)对于每一个$i=1,2,\cdots,\nu$,2ν阶辛矩阵中存在一个$\boldsymbol{Sp}_2(R)$且它稳定在二维子空间$[\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{f}_i]$,保持除$\boldsymbol{e}_i$和$\boldsymbol{f}_i$以外的基向量不动;

(2)对于$1\leqslant i<j\leqslant\nu$,$2\nu$阶辛矩阵中存在一个$\boldsymbol{GL}_2(R)$且它稳定在$[\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j]$和$[\boldsymbol{f}_i,\boldsymbol{f}_j]$,并保持除了这4个向量以外的其他基向量不动;

(3)对于$1\leqslant i<j\leqslant\nu$,$2\nu$阶辛矩阵中存在一个$\boldsymbol{GL}_2(R)$且它稳定在$[\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{f}_j]$和$[\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{f}_i]$,并保持除了这4个向量以外的其他基向量不动.

2　局部环上一般线性群BN-对构造

令M是局部环R的唯一极大理想,$k=R/M$是R对应的剩余类域.典范同态$\pi:R\to k$诱导了下面的群同态$\phi:\boldsymbol{GL}_n(R)\to\boldsymbol{GL}_n(k):(c_{ij})\mapsto(\bar{c}_{ij})$.

令$\widehat{\boldsymbol{B}}$是$\boldsymbol{GL}_n(k)$中的上三角矩阵构成的群,$\widehat{\boldsymbol{N}}$是$\boldsymbol{GL}_n(k)$中的单项矩阵构成的群.选取$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{GL}_n(k)$的子群$\widehat{\boldsymbol{B}}$在同态ϕ下的逆像,$\boldsymbol{N}$是$\widehat{\boldsymbol{N}}$在同态ϕ下的逆像.下面证明子群$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{N}$构成局部环R上一般线性群$\boldsymbol{GL}_n(R)$的BN-对.

引理1　$\boldsymbol{GL}_n(R)$是由子群$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{N}$生成的.

证明　因为$\boldsymbol{GL}_n(R)$可以由局部环R上的初等矩阵生成,而初等矩阵可以由$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{N}$中的元素生成,即证.　□

引理2　(1)令$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{N}$,则$\boldsymbol{T}$是$\boldsymbol{N}$的正规子群.

(2)商群$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{N}/\boldsymbol{T}$存在一组由对合构成的生成集.

证明　(1)记$\widehat{\boldsymbol{T}}=\widehat{\boldsymbol{B}}\cap\widehat{\boldsymbol{N}}$.因为$\widehat{\boldsymbol{T}}$是$\widehat{\boldsymbol{N}}$的正规子群,故根据群的同态基本定理,$\widehat{\boldsymbol{T}}$的逆像是$\widehat{\boldsymbol{N}}$的逆像的正规子群,即$\boldsymbol{T}$是$\boldsymbol{N}$的正规子群.

(2)令同态$\phi_1:\boldsymbol{N}\to\widehat{\boldsymbol{N}}$是上面定义的同态$\phi$在$\boldsymbol{N}$上的限制,$\pi_1:\widehat{\boldsymbol{N}}\to\widehat{\boldsymbol{N}}/\widehat{\boldsymbol{T}}$是典范同态.则得到一个满同态$\varphi=\pi_1\circ\phi_1:\boldsymbol{N}\to\widehat{\boldsymbol{N}}/\widehat{\boldsymbol{T}}$,其中$\pi_1\circ\phi_1$表示$\pi_1$和$\phi_1$的复合同态.易证$\boldsymbol{T}$正好是同态$\varphi$的核,从而有$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{N}/\boldsymbol{T}=\widehat{\boldsymbol{N}}/\widehat{\boldsymbol{T}}$,这意味着$\boldsymbol{W}$是$n$个字母上的对称群,因而存在一组由对合构成的生成集.□

令$\boldsymbol{S}^*=\{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\cdots,\boldsymbol{s}_{n-1}\}$是$\boldsymbol{W}$的生成集,其中$\boldsymbol{s}_i$是指对换$(i,i+1)$.

定理1　上面所构造的子群$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{N}$是$\boldsymbol{GL}_n(R)$的BN-对.

证明　由BN-对的定义和引理1、2知,只需证明公理1和2成立.若选取

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&\\0&1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&&\boldsymbol{I}^{(n-2)}\end{pmatrix}$$

则有$\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{P}\boldsymbol{s}_1^{-1}\notin\boldsymbol{B}$.同理可证,对任意的$\boldsymbol{s}_i\in\boldsymbol{S}^*$,$\boldsymbol{sBs}^{-1}\not\subset\boldsymbol{B}$,从而公理2成立.下面证明公理1成立.因为公理1中的式子等价于$\boldsymbol{sB}\subset\boldsymbol{BB}'\cup\boldsymbol{BsB}'$,其中$\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{wBw}^{-1}$.所以只需证明$\boldsymbol{sB}$的任意矩阵通过左乘$\boldsymbol{B}$中的元素和右乘$\boldsymbol{B}'$中的元素,约化成单位矩阵或$\boldsymbol{s}$即可.下面证明$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1$的情形.

通过左乘$\boldsymbol{B}$中的矩阵,$\boldsymbol{sB}$中的任一矩阵可以约化为

$$\begin{pmatrix}b_{21}&a_{22}&\\a_{21}&c_{12}&\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{A}_2&&\boldsymbol{A}_3\end{pmatrix}$$

其中$\boldsymbol{A}_1$是$2\times(n-2)$阶零矩阵,$\boldsymbol{A}_2$是在M中取值的$(n-2)\times2$阶矩阵,$\boldsymbol{A}_3$是$(n-2)\times(n-2)$对角矩阵.

如果c_{12}是零因子,则通过左乘$\boldsymbol{B}$中的元素,上述约化矩阵变为$\boldsymbol{s}$.如果c_{12}是可逆元,分两种情况考虑.当$w^{-1}(1)>w^{-1}(2)$时,通过右乘$\boldsymbol{B}'$中的矩阵,将上述约化矩阵的(2,1)位置化为0,这时矩阵属于子群$\boldsymbol{B}$.当$w^{-1}(1)<w^{-1}(2)$,通过右乘$\boldsymbol{B}'$中的矩阵,将上述约化矩阵的(2,2)位置化为0.此时(2,2)位置是零因子,化成前面的情形.这就证明了公理1成立.最后,注意到$\boldsymbol{W}$的生成元集是有限的,所以这个BN-对是球形的.　□

3　局部环上辛群的BN-对构造

采用类似于第2章的方法构造局部环R上辛群$\boldsymbol{Sp}_{2\nu}(R)$的BN-对.令$\widetilde{\boldsymbol{B}}=\Big\{\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_2\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_3\end{pmatrix}:$

$\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{Sp}_{2\nu}(k)\Big\}$，其中 $\boldsymbol{A}_1$ 是 ν 阶可逆下三角矩阵，$\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_3-\boldsymbol{A}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{I}$ 是 ν 阶单位矩阵，$\boldsymbol{O}$ 是 ν 阶零矩阵. 令 $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ 是 $\boldsymbol{Sp}_{2\nu}(k)$ 中的单项辛矩阵构成的群. 考虑群同态 $\theta:\boldsymbol{Sp}_{2\nu}(R)\to\boldsymbol{Sp}_{2\nu}(k)$：$(c_{ij})\mapsto(\bar{c}_{ij})$.

令 $\boldsymbol{B}$ 是子群 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 在同态 θ 下的逆像，$\boldsymbol{N}$ 是 $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ 在同态 θ 下的逆像. 记 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{N}$，易证 $\boldsymbol{T}$ 是 $\boldsymbol{N}$ 的正规子群，且商群 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{N}/\boldsymbol{T}=\widetilde{\boldsymbol{N}}/\widetilde{\boldsymbol{T}}$. 假定 $\boldsymbol{L}_i=[\boldsymbol{e}_i]$ 是由 $\boldsymbol{e}_i$ 所张成的一维向量空间，$\boldsymbol{L}_i'=[\boldsymbol{f}_i]$，其中 $1\leqslant i\leqslant n$. 由文献[2]知，$\boldsymbol{W}$ 存在一个由对合构成的生成集 $\boldsymbol{S}^*=\{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\cdots,\boldsymbol{s}_n\}$，其中 $\boldsymbol{s}_i(i<n)$ 是两个对换 $\boldsymbol{L}_i\leftrightarrow\boldsymbol{L}_{i+1}$ 和 $\boldsymbol{L}_i'\leftrightarrow\boldsymbol{L}_{i+1}'$ 的乘积；$\boldsymbol{s}_n$ 是对换 $\boldsymbol{L}_n\leftrightarrow\boldsymbol{L}_n'$.

定理 2　子群 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 构成 $\boldsymbol{Sp}_{2\nu}(R)$ 的一个球形 BN-对.

证明　首先证明 $\boldsymbol{Sp}_{2\nu}(R)$ 是由 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 生成的. 对于 $\boldsymbol{Sp}_{2\nu}(R)$ 中的任一矩阵 $\boldsymbol{P}$，通过左乘和右乘初等辛矩阵可以约化成单位阵，而初等辛矩阵可以由 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 中的元素生成.

其次证明公理 1 成立. 只需证明 $\boldsymbol{sB}\subset\boldsymbol{BB}'\cup\boldsymbol{BsB}'$，其中 $\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{wBw}^{-1}$. 令 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1$. 对于 $\boldsymbol{sB}$ 中的任一矩阵，通过左乘 $\boldsymbol{B}$ 中的矩阵，可以约化成

$$\begin{pmatrix}
c_{21} & a_{22} & \boldsymbol{A}_1 & & & \\
a_{11} & 0 & & & \boldsymbol{A}_5 & \\
\boldsymbol{A}_6 & & \boldsymbol{A}_7 & & & \\
 & & & 0 & a_{\nu+2,\nu+2} & \boldsymbol{A}_4 \\
 & \boldsymbol{A}_2 & & a_{\nu+1,\nu+1} & c_{\nu+1,\nu+2} & \\
 & & & & \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_8
\end{pmatrix}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$、$\boldsymbol{A}_3$ 的元素均是零因子，$\boldsymbol{A}_4$、$\boldsymbol{A}_5$、$\boldsymbol{A}_6$ 是 $2\times(\nu-2)$、$\nu\times\nu$、$(\nu-2)\times 2$ 阶零矩阵，

$$\boldsymbol{A}_7=\begin{pmatrix} a_{33} & & & \\ & a_{44} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{\nu\nu}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_8=\begin{pmatrix} a_{\nu+3,\nu+3} & & & \\ & a_{\nu+4,\nu+4} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{2\nu,2\nu}\end{pmatrix}$$

如果 c_{21} 是零因子，则 $c_{\nu+1,\nu+2}$ 也是零因子，从而上述约化矩阵通过左乘 $\boldsymbol{B}$ 中的矩阵化为 $\boldsymbol{s}$. 如果 c_{21} 是可逆元，分两种情况考虑. 当 $w^{-1}(1)>w^{-1}(2)$ 时，通过右乘 $\boldsymbol{B}'$ 中的元素将上述约化矩阵的 $(1,2)$ 位置和 $(\nu+2,\nu+1)$ 位置同时化为 0，这时矩阵属于子群 $\boldsymbol{B}$. 当 $w^{-1}(1)<w^{-1}(2)$，通过右乘 $\boldsymbol{B}'$ 中的矩阵，将上述约化矩阵的 $(1,1)$ 位置和 $(\nu+2,\nu+2)$ 位置同时化为 0. 此时 $(1,1)$ 位置是零因子，化成前面的情形.

易证公理 2 成立. 从而子群 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 是 $\boldsymbol{Sp}_{2\nu}(R)$ 的一个 BN-对. 又因为 $\boldsymbol{W}$ 的生成元集是有限的，所以这个 BN-对是球形的. □

注：对于 R 上的正交群 $\boldsymbol{O}_n(R)$，采用类似的讨论，可以构造出它的 BN-对.

4　同调性质

下面定义局部环 R 上一般线性群 $\boldsymbol{GL}_n(R)$ 的子群族 $\boldsymbol{GL}_n^{(i)}(R)$，其中 $1\leqslant i\leqslant r$，r 是一个常数. $\boldsymbol{GL}_n^{(i)}(R)$ 是由形式为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{(d_{i_1})} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}^{(d_{i_{s_i}})}\end{pmatrix}$ 的矩阵构成的群，其中 $d_{i_1}+d_{i_2}+\cdots+d_{i_{s_i}}=n$. 并且这族子群满足 $\boldsymbol{GL}_n^{(i+1)}(R)\subset\boldsymbol{GL}_n^{(i)}(R)$.

在 $\boldsymbol{GL}_n^{(i)}(R)$ 中，选取 $\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{GL}_n^{(i)}(R)$，$\boldsymbol{N}_i=\boldsymbol{N}\cap\boldsymbol{GL}_n^{(i)}(R)$，其中 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 是第 2 章构造的 $\boldsymbol{GL}_n(R)$ 的 BN-对. 则采用类似第 2 章的方法，可以证明子群 $\boldsymbol{B}_i$ 和 $\boldsymbol{N}_i$ 是 $\boldsymbol{GL}_n^{(i)}(R)$ 的一个 BN-对.

令 $\boldsymbol{T}_i=\boldsymbol{B}_i\cap\boldsymbol{N}_i$，对应的 Weyl 群为 $\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{N}_i/\boldsymbol{T}_i$，则有下面的交换图.

定理 3　在前面的假设下，存在如图 1 所示的一个交换图.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] & & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \boldsymbol{T}_d \arrow[r] \arrow[d] & \boldsymbol{T}_{d-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \boldsymbol{T}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \boldsymbol{T}_1 \arrow[d] \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \boldsymbol{N}_d \arrow[r, "i_{d-1}"] \arrow[d] & \boldsymbol{N}_{d-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \boldsymbol{N}_2 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & \boldsymbol{N}_1 \arrow[d] \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \boldsymbol{W}_d \arrow[r, "i'_{d-1}"] \arrow[d] & \boldsymbol{W}_{d-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \boldsymbol{W}_2 \arrow[r, "i'_1"] \arrow[d] & \boldsymbol{W}_1 \arrow[d] \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

图 1　子群族 $\boldsymbol{GL}_n^{(i)}(R)(1\leqslant i\leqslant r)$ 及其 BN-对之间的交换图

Fig. 1　The communicative diagram between $\boldsymbol{GL}_n^{(i)}(R)(1\leqslant i\leqslant r)$ and their BN-pair

其中 i_j、$i_j'(1\leqslant j\leqslant d-1)$ 是嵌入映射.

现在定义局部环 R 上辛群 $\boldsymbol{Sp}_{2\nu}(R)$ 的子群族 $\boldsymbol{Sp}_{2\nu}^{(i)}(R)$，其中 $1\leqslant i\leqslant r$，r 是一个常数. $\boldsymbol{Sp}_{2\nu}^{(i)}(R)$ 中的元素具有下面的形式：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{(d_{i_1})} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boldsymbol{B}^{(d_{i_{s_i}})} & & & \\ & & & \boldsymbol{C}^{(d_{i_1})} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boldsymbol{C}^{(d_{i_{s_i}})} \end{pmatrix}$$

其中 $d_{i_1}+\cdots+d_{i_{s_i}}=\nu$. 并且这组子群满足 $\boldsymbol{Sp}_{2\nu}^{(i+1)}(R)\subset\boldsymbol{Sp}_{2\nu}^{(i)}(R)$.

对于上面构造的这组辛群，也存在类似于定理 3 的交换图.

5 结 语

域上典型群理论在许多领域已取得丰硕的成果，近些年，数学研究者开始关注局部环上典型群的相关问题. 本文构造了局部环上一般线性群、辛群、正交群的 BN-对. 由于与所构造的 BN-对相伴的 Weyl 群是已知的有限反射群，这便为研究局部环上典型群打下了良好的基础. 在接下来的研究中，一方面可以考虑文中所构造的 BN-对对应的 Building 是否是一个几何体，进而得到群的几何解释；另一方面，由于文中构造的 BN-对中子群 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的形式比较复杂，给后续研究增加了难度，可以考虑能否构造局部环上典型群的更简单的 BN-对.

参考文献：

[1] CARTER R W. **Finite Groups of Lie Type: Conjugacy Class and Complex Characters** [M]. London: Wiley-Interscience, 1985

[2] BROWN K S. **Buildings** [M]. New York: Springer-Verlag, 1989

[3] GARRETT P. **Buildings and Classical Groups** [M]. London: Chapman and Hall, 1997

[4] IWAHORI N, MATSUMOTO H. On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of the p-adic Chevalley groups [J]. **Publications Mathématiques de L′IHÉS**, 1965, **25**(1): 5-48

[5] 吴 炎. Galois 环上特殊矩阵的分类及其应用[M]. 北京：科学出版社，2006

Construction of BN-pairs of classical groups over local rings

QIN Yu-fang*[1,2], NAN Ji-zhu[1]

(1. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. College of Information Technology, Shanghai Ocean University, Shanghai 201306, China)

Abstract: The construction of BN-pairs of groups is an important topic in Building theory. Since every BN-pair of a group corresponds to a group of Weyl type, the properties of the group are obtained by discussing the group of Weyl type. Therefore, BN-pair is a useful tool in studying groups. Let R be a local ring. Using matrix method, BN-pairs of the general linear group, orthogonal group and symplectic group over local ring R are constructed, respectively. Furthermore, BN-pairs of a family of general linear groups over local ring R are also discussed, and these general linear groups and their corresponding BN-pairs satisfy a communicative diagram of groups.

Key words: local ring; classical group; elementary symplectic matrix; BN-pair