第51卷第1期 大连理工大学学报 Vol. 51, No. 1
2011年1月 Journal of Dalian University of Technology Jan. 2011

工程力学

文章编号：1000-8608(2011)01-0001-06

弹性梁非线性热屈曲行为与辛本征解展开方法

褚洪杰[1]， 徐新生*[1]， 林志华[2]， 江 南[1]， 马建青[1]

（1.大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室，辽宁 大连 116024；
2.香港城市大学 建筑系，香港 九龙达之路83号）

摘要： 基于Hamilton体系，研究了弹性梁在温度荷载下发生的前屈曲和后屈曲问题.在辛空间中，前屈曲问题和后屈曲问题分别归结于系统的零本征值问题和非零本征值问题，而结构屈曲的临界温度和屈曲模态对应Hamilton体系的广义本征值和本征解.采用辛本征解展开方法对非线性大变形的后屈曲问题进行了深入探讨，揭示了从前屈曲到后屈曲变化的整个过程.结果发现梁在屈曲变形过程中向一个特殊的模式过渡，并最终发展为梁在某一平衡位置作周期振荡.

关键词： Hamilton体系；弹性梁；热屈曲；大变形

中图分类号： O343.9 **文献标志码：** A

0 引 言

梁作为最基本工程结构，其屈曲行为一直受到关注[1,2].滕宁钧等[3]和魏勇等[4]考虑应力波效应研究了半无限长弹性杆在轴向荷载冲击作用下的屈曲问题.基于精确几何大变形理论，Li等[5,6]采用打靶法讨论了梁沿轴线伸长对其屈曲的影响，并研究了简支-简支、简支-固支等边界条件下梁的后屈曲行为.Coffin等[7]借助于椭圆积分分析了两端简支弹性梁的湿热过屈曲问题，给出了一种过屈曲平衡路径.Bhangale等[8]采用有限元方法研究了功能梯度梁的热屈曲问题，并分别得到了临界温度和振动频率.这些研究揭示了梁发生屈曲的一些机理.然而他们的研究工作是在Lagrange体系下进行的，因而很难将前屈曲问题和后屈曲问题自然结合起来.本文借助于Hamilton体系[9]分析热弹性梁前屈曲问题的临界温度和对应的屈曲模态，并提出一种辛本征解展开方法，研究前屈曲和后屈曲问题之间的关系，并得到梁的后屈曲路径，以及最终过渡到振动模式，以期为研究非线性问题提供一条路径.

1 基本问题和Hamilton体系

考虑热弹性材料直梁，其横截面为矩形，截面积为A，弹性模量为E，长度为l，线密度为ρ，热膨胀系数为α.设温度为$\overline{T}$，选取直角坐标系(x,z)，相应方向上的位移为(u,w)，x轴取在梁的中性层上.梁的弯矩M和曲率κ、内力N与弹性应变ε_x和温度的本构关系可以表示为

$$\begin{cases} M = D\kappa \\ N = N_x + N_T = K\varepsilon_x - K\alpha\overline{T} \end{cases} \tag{1}$$

其中N_x和N_T分别表示弹性变形内力和温度内力，梁的抗拉刚度和抗弯刚度分别为$K = EA$和$D = EI$，I为惯性矩.记$\partial_x = \partial/\partial x$，$\partial_t = \partial/\partial t$，几何方程可以写成

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \partial_x u + \lambda(\partial_x w)^2/2 \\ \kappa = -\partial_x^2 w \end{cases} \tag{2}$$

对于前屈曲问题，由于初始变形很小，可以采用小变形模型，此时取参数$\lambda = 0$.在梁的变形问题中，弯曲变形在变形能中起主导作用.Lagrange函数包含了势能、动能和外力功，即

$$L = \frac{1}{2}\rho(\partial_t w)^2 - \frac{1}{2}M\kappa - \frac{1}{2}N_x\varepsilon_x + \frac{1}{2}N_T(\partial_x w)^2 \tag{3}$$

收稿日期： 2008-12-01； **修回日期：** 2010-11-25.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11072054)；工业装备结构分析国家重点实验室基金资助项目(S08202，GZ0809).
作者简介： 徐新生*(1957-)，男，教授，博士生导师，E-mail：xsxu@dlut.edu.cn.

若对上式进行变分，可以得到传统意义下的控制方程. 为引入 Hamilton 体系，不妨记原变量 $w = q$，$\dot{q} = \partial_t q$，引进对偶变量

$$p = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} = \rho \dot{q} \tag{4}$$

该对偶变量的物理意义就是系统的动量. 此时 Hamilton 函数为

$$H = p\dot{q} - L = \frac{1}{2}\rho p^2 + \frac{1}{2}D(\partial_x^2 q)^2 + \frac{K}{8}\lambda^2(\partial_x q)^4 - \frac{1}{2}N_T(\partial_x q)^2 \tag{5}$$

根据 Hamilton 原理可以得到 Hamilton 体系下的对偶正则方程

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} \equiv \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta H/\delta p \\ -\delta H/\delta q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p/\rho \\ -D\partial_x^4 q - N_T\partial_x^2 q + 3K\lambda^2(\partial_x q)^2\partial_x^2 q/2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

该方程与传统的控制方程是等价的. 注意到在得到控制方程的同时，可以得到响应的端部边界条件，如：

$$q|_{x=0} = 0,\ \partial_x q|_{x=0} = 0,$$
$$q|_{x=l} = 0,\ \partial_x q|_{x=l} = 0 \tag{7}$$

2 热弹性梁的前屈曲和后屈曲行为

为量纲一化，选择梁长 l 为特征长度，$l^3\sqrt{\rho/EI}$ 为特征时间，这样 $X = x/l$，$\tau = t/(l^3\sqrt{\rho/EI})$，$W = w/l$，量纲一温度(荷载)$T = N_T l^2/D$ 和量纲一参数 $\eta = 3Kl^2/2D$. 此时正则方程(6)有对应的形式.

在讨论前屈曲问题中，注意到正则方程(6)的零本征值问题，即 $\dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{0}$. 求解此时的正则方程(6)，并满足端部边界条件的零本征值本征解及其约当型解可以表示为

$$\boldsymbol{\psi}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} W_n,\ \boldsymbol{\psi}_n^* = \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} W_n \tag{8}$$

其中 $W_n = (1-\cos\sqrt{T_n})[1-\cos(\sqrt{T_n}X)] + \sin\sqrt{T_n}[\sin(\sqrt{T_n}X) - \sqrt{T_n}X]$，同时得到临界温度满足的分叉条件[10]：

$$2 - 2\cos\sqrt{T_n} - \sqrt{T_n}\sin\sqrt{T_n} = 0 \tag{9}$$

本征解(8)描述了在临界温度式(9)情况下的屈曲模态. 为讨论辛共轭正交关系[9]，引入泛函 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \equiv \int_0^1 \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}x$，其中旋转单位矩阵 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 重新组合本征解：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_n = \tilde{\boldsymbol{\psi}}_n / \sqrt{\langle \tilde{\boldsymbol{\psi}}_n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_n^* \rangle} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} Q_n(X) \\ \boldsymbol{\varphi}_n^* = \tilde{\boldsymbol{\psi}}_n^* / \sqrt{\langle \tilde{\boldsymbol{\psi}}_n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_n^* \rangle} \equiv \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} P_n(X) \end{cases} \tag{10}$$

其中 $n = 1, 2, \cdots$，$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_n = \boldsymbol{\psi}_n - \sum_{k=1}^{n-1}\langle \boldsymbol{\psi}_n, \boldsymbol{\varphi}_k^*\rangle \boldsymbol{\varphi}_k$，$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_n^* = \boldsymbol{\psi}_n^* + \sum_{k=1}^{n-1}\langle \boldsymbol{\psi}_n^*, \boldsymbol{\varphi}_k\rangle \boldsymbol{\varphi}_k^*$. 本征解(10)满足辛共轭正交关系

$$\langle \boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\varphi}_m^*\rangle = -\langle \boldsymbol{\varphi}_m^*, \boldsymbol{\varphi}_n\rangle = \delta_{nm},$$
$$\langle \boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\varphi}_m\rangle = \langle \boldsymbol{\varphi}_n^*, \boldsymbol{\varphi}_m^*\rangle = 0 \tag{11}$$

这样本征解(10)描述的是 Hamilton 体系下独立的模态.

后屈曲问题可归结为非零本征值问题. 该问题应采用几何大变形模型，即取参数 $\lambda = 1$. 正则方程(6)的解可用上述辛本征解(10)展开[9]和系数对某一时刻展开的方法，有

$$\boldsymbol{\psi} = \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n(\tau)\boldsymbol{\varphi}_n(T, X) + \beta_n(\tau)\boldsymbol{\varphi}_n^*(T, X, \tau)] = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{nm}\boldsymbol{\varphi}_n + B_{nm}\boldsymbol{\varphi}_n^*)S^{m-1} \tag{12}$$

其中 $S = (\tau - \tau_0)/\Delta\tau$，$\tau_0$ 为某一时刻，$\Delta\tau$ 为时间步长. 式(12)说明，只要 $A_{nm}(\tau_0)$ 和 $B_{nm}(\tau_0)$ 已知，则在时间步长内任何时刻的屈曲变形都可以得到. 同时式(12)也可以写成

$$\boldsymbol{\psi} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} F_{nm}(X) \\ G_{nm}(X) \end{pmatrix} S^{m-1} \tag{13}$$

其中 $F_{nm}(X) = (\tau_0 B_{nm} + \Delta\tau B_{n(m-1)})P_n(X) + A_{nm}Q_n(X)$，$G_{nm}(X) = B_{nm}P_n(X)$，记 $B_{n0} = 0$. 此时式(6)可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} G_{nm}(X) \\ \sum_{m=1}^{\infty}\left[R_m(X) - \sum_{n=1}^{\infty}(F_{nm}^{(4)}(X) + TF''_{nm}(X))\right] \end{pmatrix} S^{m-1} \equiv \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{\infty}\bar{G}_m(X) \\ \sum_{m=1}^{\infty}\bar{F}_m(X) \end{pmatrix} S^{m-1} \tag{14}$$

其中 $R_m(X) = \eta\sum_{k=1}^{m}\left\{\sum_{l=1}^{k}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}F'_{nl}(X)\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty}F'_{n(k+1-l)}(X)\right)\right]\left(\sum_{n=1}^{\infty}F''_{n(m+1-k)}(X)\right)\right\}$. 将式(12)和(13)分别代入方程(14)，并利用辛共轭正

交关系(11) 可以得到

$$\begin{cases} \langle \dot{\boldsymbol{\psi}}, \boldsymbol{\varphi}_k \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\Delta\tau} B_{k(m+1)} S^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \langle \boldsymbol{\xi}_m^{(3)}, \boldsymbol{\varphi}_k \rangle S^{m-1} \\ \langle \boldsymbol{\varphi}_k^*, \dot{\boldsymbol{\psi}} \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\frac{m}{\Delta\tau} A_{k(m+1)} - \langle \bar{\boldsymbol{\varphi}}_m, \boldsymbol{\xi}_k^{(1)} \rangle - \\ \qquad \langle \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{m-1}, \boldsymbol{\xi}_k^{(2)} \rangle \Big) S^{m-1} = \\ \qquad \sum_{m=1}^{\infty} (\langle \boldsymbol{\xi}_k^{(1)}, \boldsymbol{\xi}_{m-1}^{(3)} \rangle + \langle \boldsymbol{\xi}_k^{(2)}, \boldsymbol{\xi}_m^{(3)} \rangle) S^{m-1} \end{cases} \tag{15}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_m = (1 \quad 0)^{\mathrm{T}} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} P_n(X)$，$\boldsymbol{\xi}_k^{(1)}(X) = (\tau_0 \quad 1)^{\mathrm{T}} P_k(X)$，$\boldsymbol{\xi}_k^{(2)}(X) = (1 \quad 0)^{\mathrm{T}} P_k(X) \Delta\tau$，$\boldsymbol{\xi}_m^{(3)}(X) = (\bar{G}_m(X) \quad \bar{F}_m(X))^{\mathrm{T}}$，$\bar{\boldsymbol{\varphi}}_0 = \mathbf{0}$，$\xi_0^{(3)}(X) = 0$. 比较上式系数，可得

$$\begin{cases} B_{k(m+1)} = C_{km}^{(1)} \\ A_{k(m+1)} = C_{km}^{(2)} + C_{km}^{(3)} \end{cases} \tag{16}$$

其中 $k, m = 1, 2, 3, \cdots$,

$$C_{km}^{(1)} = -(\Delta\tau/m) \int_0^1 Q_k \bar{F}_m \mathrm{d}X,$$

$$C_{km}^{(2)} = (\Delta\tau/m) \sum_{n=1}^{\infty} B_{km} \int_0^1 P_k P_m \mathrm{d}X,$$

$$C_{km}^{(3)} = (\Delta\tau/m) \int_0^1 [P_k(\tau_0 \bar{F}_{m-1} + \Delta\tau \bar{F}_m - \bar{G}_{m-1})] \mathrm{d}X$$

式(16) 表明：若某一时刻($\tau = \tau_0$) 的屈曲变形已知($m = 1$)，式(12) 的各系数可由式(16) 给出. 这样通过式(16) 和(12)，可以得到 $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$ 时刻的屈曲变形. 该变形可作为下一时刻的已知屈曲变形. 反复利用式(16) 和(12) 就可以描述从前屈曲到后屈曲发展的整个过程. 注意到当 $\tau_0 = 0$ 和 $m = 1$ 时为初始状态，即初始位移 W_0. 该初始状态应由前屈曲模态 $\boldsymbol{\psi}_0$ 给出. 同时也注意到在数值计算中，只能采用有限个辛共轭正交本征解叠加方式，因此将式(12) 中双无穷级数的 N 项和 M 项截断. 此时共有 $2N \times M$ 个系数，皆可由式(16) 确定.

为了更好说明屈曲发展过程，可用前屈曲模态描述屈曲模态. 事实上从式(8) 以及正交化过程式(10) 可以看出，如果式(12) 中的系数已知，其表达式可以写成

$$\boldsymbol{\psi} = \sum_{n=1}^{N} [\alpha_n(\tau) \boldsymbol{\varphi}_n(T, X) + \beta_n(\tau) \boldsymbol{\varphi}_n^*(T, X, \tau)] = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{N} a_n(\tau) \\ \sum_{n=1}^{N} b_n(\tau) \end{pmatrix} W_n(T, X) \tag{17}$$

只要再次利用辛共轭正交关系，对上式两端作用 $\langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}_k \rangle$ 和 $\langle \boldsymbol{\varphi}_k^*, \boldsymbol{\psi} \rangle$，就可以得到未知系数(函数) 的代数方程组，进而得到有关系数.

3　数值结果

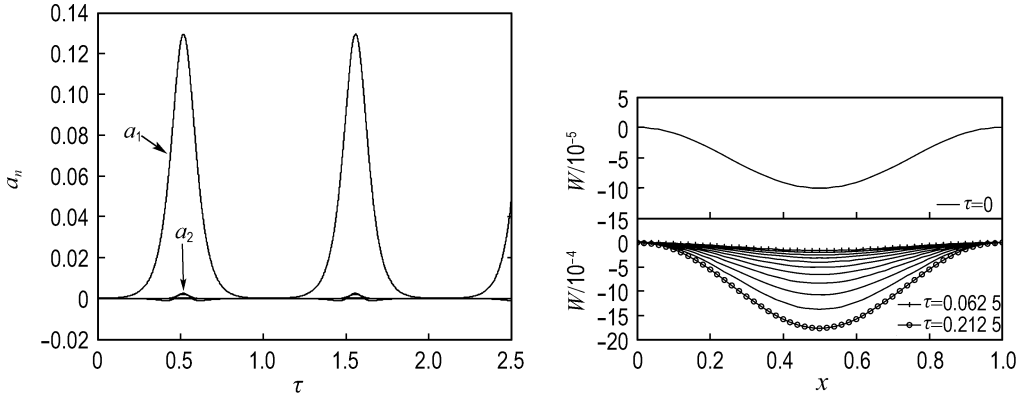
计算分叉条件(9)，可以得到梁热屈曲的临界温度：$T_1 = 39.47$，$T_2 = 80.96$，$T_3 = 157.91$，$T_4 = 238.72$，$T_5 = 355.31$，$T_6 = 475.60$，$T_7 = 631.66$，$T_8 = 791.43$，$T_9 = 986.96$，$T_{10} = 1\,186.22$ 等. 与之对应的前屈曲模态也同时可以得到. 在讨论后屈曲问题中，不妨取 $N = 10$ 和 $M = 5$，时间步长 $\Delta\tau = 0.000\,5$，选取参数 $\eta = 1\,000$. 首先观察初始屈曲模态对后屈曲发展的影响. 由于梁开始发生屈曲时可能是第一阶、第二阶屈曲模态等且幅值很小，初始屈曲模态取 $W_0 = \varepsilon W_k$，其中 $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$. 不失一般性，不妨讨论第一和第二阶屈曲模态作为初始模态，即 $k = 1, 2$. 当温度 $T = 60$ 时，已经超过一阶临界温度. 经过计算，得到各系数随时间变化曲线，如图 1(a). 说明在后屈曲发展过程中 a_1 始终起主导作用，并且呈现在某一位置的振荡. 图 1(b)($\tau = 0$ 为初始屈曲模态) 是在前一时间段对应的屈曲变形过程. 当温度 $T = 150$ 时，已经超过二阶临界温度. 同样可以得到各系数随时间变化曲线及对应的屈曲发展过程(见图 2). 该图说明在后屈曲发展过程中 a_1 最终起主导作用. 换句话说屈曲变形的发展趋于第一阶屈曲模态. 可以看出初始屈曲模态(前屈曲模态) 在后屈曲发展中的前一个时间段影响比较大；而在发展到某种程度后此影响逐渐消失. 可以说初始屈曲模态只影响屈曲发展的路径，而不影响最终状态.

值得注意的是从以上后屈曲发展过程以及以高阶屈曲模态为初始模态的后屈曲问题，可以看出：当初始模态为奇数阶时，屈曲变形由初始模态很快过渡到第一屈曲模态；而初始给定偶数阶模态时，屈曲变形则先过渡到第二屈曲模态，然后到第一屈曲模态. 总之最终均达到第一屈曲模态，并在某一个平衡位置呈现振动形式. 从能量的角度看，第一模态变形能最小. 该平衡位置可以直接得到，即在该位置 $W = cW_1$，其中 c 为常数. 可以用零本征值本征解表示：$\boldsymbol{\psi} = c(1 \quad 0)^{\mathrm{T}} W_1$. 由辛共轭正交关系知 $\langle \dot{\boldsymbol{\psi}}, \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle = 0$，$\langle \boldsymbol{\varphi}_1^*, \dot{\boldsymbol{\psi}} \rangle = 0$. 利用正则方程(6) 可以得到系数 c 的表达式

$$c=\pm\left\{\int_0^1(T-T_1)(\partial_X^2W_1)W_1\mathrm{d}X/\left[\eta\int_0^1(\partial_X^2W_1)(\partial_XW_1)^2W_1\mathrm{d}X\right]\right\}^{1/2} \quad (18)$$

其中正负号分别表示存在上下两个平衡位置.

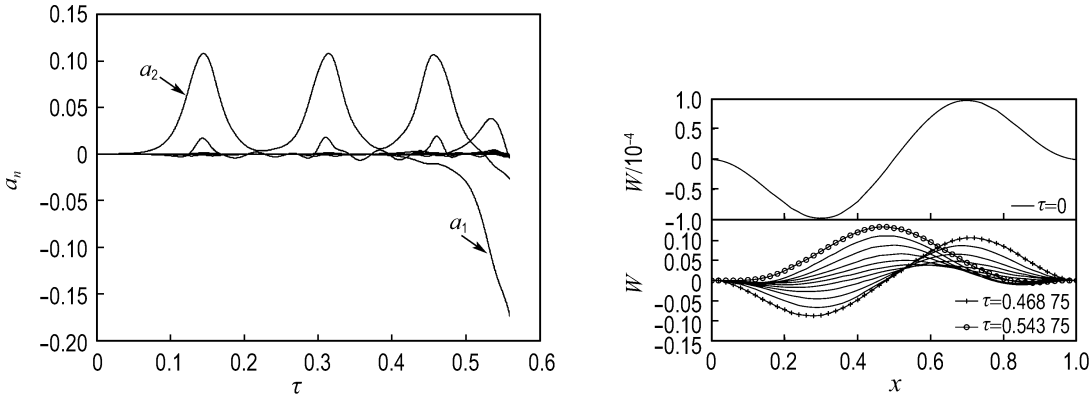
从上面的讨论知初始屈曲模态会影响后屈曲发展的路径.而初始屈曲模态的幅值对该路径的影响从图 3 中可以得到答案.该图是以第四阶屈曲模态作为初始模态为例,同样取温度 $T=150$,其中图 3(a)、(b)和(c)中分别取初始屈曲模态的幅值为 $\varepsilon=1\times10^{-3}$、$1\times10^{-4}$、$1\times10^{-5}$.除了 3 个图都有向第一屈曲模态过渡的相同之处外,还有不同之处.在向第一屈曲模态过渡过程中,初始模态幅值略大时(如图3(a)),其对屈曲发展的路径影响也大;反之影响也小,如图 3(b)和(c)所示.



(a)系数 (b)模态

图 1 第一阶初始屈曲模态下后屈曲发展过程

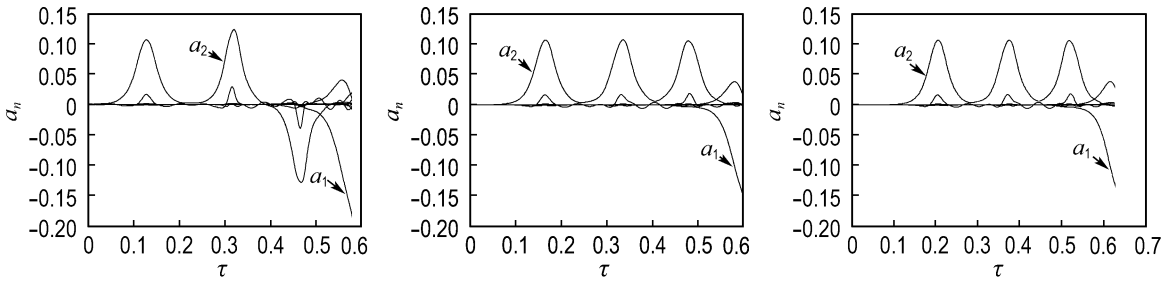
Fig. 1 Post-buckling progress under the initial modal of the first order



(a)系数 (b)模态

图 2 第二阶初始屈曲模态下后屈曲发展过程

Fig. 2 Post-buckling progress under the initial modal of the second order



(a) $\varepsilon=1\times10^{-3}$ (b) $\varepsilon=1\times10^{-4}$ (c) $\varepsilon=1\times10^{-5}$

图 3 初始屈曲模态的幅值对后屈曲路径的影响

Fig. 3 Amplitude effects of the initial modal for paths of the post-buckling

注意到 $W=0$ 仍为系统的平衡位置. 温度低于第一阶屈曲临界温度时，计算结果表明梁仅在该平衡位置振动. 当温度高于第一阶以上的临界温度时，由以上的结果得出后屈曲会过渡到绕另一平衡位置的振动形式. 由能量守恒原理，梁在振动时会再次接近该平衡位置. 在此情况下有可能发生二次失稳现象，图 4 给出了这种现象. 在计算中以第五阶屈曲模态作为初始屈曲模态，选取参数 $\varepsilon=1\times10^{-4}$，温度 $T=80$. 该温度接近第二阶屈曲临界温度. 图 4(a)表明屈曲变形很快从初始的第五阶模态过渡到第一阶屈曲模态. 图 4(b)中分别给出 $0.81\leqslant\tau\leqslant0.96$ 和 $0.96\leqslant\tau\leqslant1.76$ 两个相连时间段的屈曲变形. 说明梁从初始屈曲到向第一屈曲模态过渡，又变化到接近初始平衡位置. 此时由于高阶模态还未完全消失，在初始平衡位置形成扰动. 当这种扰动的速度方向与梁的主模态速度方向相反时，不会出现二次失稳（如图 4(a)中系数 a_1 第一次回到初始平衡位置）；反之，扰动的速度方向与梁的主模态速度方向一致时会出现二次失稳现象（如图 4(a)中系数 a_1 第二次回到初始平衡位置）. 图 4(b)中整个过程揭示了后屈曲变形模态又从一个平衡位置向另一个平衡位置过渡. 随着高阶模态逐渐消失，梁接近而不达到初始平衡位置，这样最后在新的平衡位置往复振动. 这些现象与给定的温度和初始屈曲模态有关，也与梁的材料常数和几何参数有关.

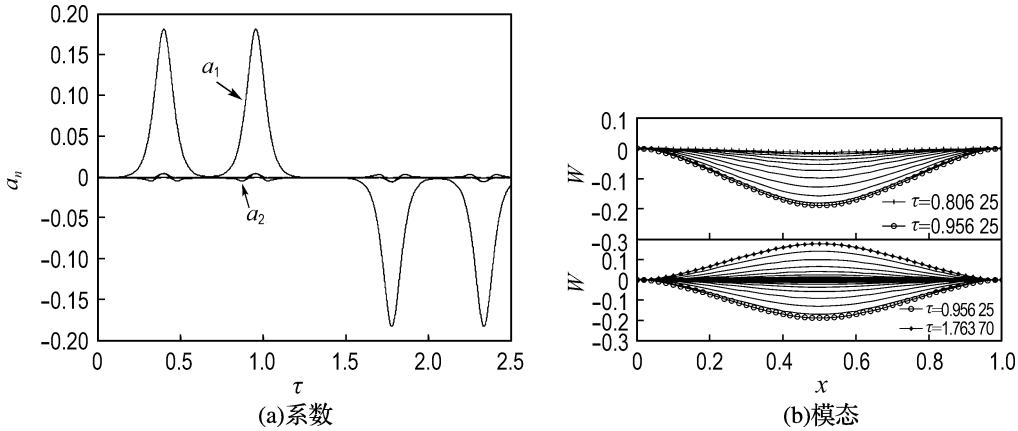


图 4　后屈曲过程中的二次失稳

Fig. 4　The second instability for the post-buckling process

4　结　论

在温度荷载作用下，梁的热前屈曲和热后屈曲问题可以分别归结为 Hamilton 体系下的零本征值问题和非零本征值问题. 由于 Hamilton 体系下的本征解（零本征值本征解及其约当型解）具有辛共轭正交关系，辛本征解展开方法是简洁和有效的，并可直接生成相应的计算方法. 从计算结果可以得到：在某温度荷载（大于临界温度）下，无论小量级的初始屈曲模态是什么形式，梁的后屈曲发展过程均会向第一阶屈曲模态过渡，最后转化为在某一平衡位置的振动；而初始屈曲模态的幅值和形态只影响后屈曲发展路径. 最终的屈曲模态与给定的温度、梁的材料常数和几何参数有关. 在特殊情况下，后屈曲模态又出现二次失稳现象，其由绕某一平衡位置的振动跳向绕另一个平衡位置的振动. 这些现象和机理为工程设计提供了依据.

参考文献：

[1] 王　仁. 冲击载荷下结构塑性稳定性的研究[M] // 王礼立，余同希，李永池，编. 冲击动力学进展. 合肥：中国科学技术大学出版社，1992：157-176

[2] 杨桂通，王德禹. 结构的冲击屈曲问题[M] // 王礼立，余同希，李永池，编. 冲击动力学进展. 合肥：中国科学技术大学出版社，1992：177-210

[3] 滕宁钧，苏先樾. 半无限长弹性直杆受轴向冲击载荷

作用的分叉问题[J]. 力学学报，1989，**21**(5)：591-595

[4] 魏 勇，朱兆祥，李永池. 轴向冲击载荷作用下直杆弹性动态屈曲的研究[J]. 实验力学，1988，**3**(3)：258-263

[5] LI Shi-rong，CHENG Chang-jun. Analysis on the thermal post-buckling of heated elastic rods [J]. **Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)**，2000，**21**(2)：133-140

[6] LI Shi-rong，ZHOU You-he，ZHENG Xiao-jing. Thermal post-buckling of a heated elastic rod with pinned-fixed ends [J]. **Journal of Thermal Stresses**，2002，**25**(1)：45-56

[7] COFFIN D W，BLOOM F. Elastica solution for the hydrothermal buckling of a beam [J]. **International Journal of Non-Linear Mechanics**，1999，**34**(5)：935-947

[8] BHANGALE R K，GANESAN N. Thermoelastic buckling and vibration behavior of a functionally graded sandwich beam with constrained viscoelastic core [J]. **Journal of Sound and Vibration**，2006，**295**(1-2)：294-316

[9] ZHONG Wan-xie. **Duality System in Applied Mechanics and Optimal Control** [M]. Dordrecht：Kluwer Academic Publishers，2004

[10] XU Xin-sheng，CHU Hong-jie，LIM Chee-wah. Hamiltonian system for dynamic buckling of transversely isotropic cylindrical shells subjected to an axial impact [J]. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**，2008，**8**(3)：487-504

Non-linear thermal buckling of elastic beams and expanding method of symplectic eigensolutions

CHU Hong-jie[1]，XU Xin-sheng[*1]，LIM Chee-wah[2]，JIANG Nan[1]，MA Jian-qing[1]

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment，Dalian University of Technology，Dalian 116024，China；2. City University of Hong Kong，83，Tat Chee Avenue，Kowloon，Hong Kong，China)

Abstract：The Hamiltonian system is introduced for pre-buckling and post-buckling of elastic beams under the thermal load. In the symplectic space，the problems of the pre-buckling and the post-buckling of beams are deduced respectively into the subjects of the zero eigenvalues and non-zero eigenvalues of the system. The critical temperatures and buckling modes can be obtained by generalized eigenvalues and eigensolutions of Hamiltonian system. Using the expanding method of symplectic eigensolutions，the post-buckling problem is discussed，in which the non-linear problem of the large deformation is considered. The whole process from the pre-buckling to the post-buckling of the beam is revealed. Results show that there is a transitional mode in the process of the buckling deformation and the last phase of the buckling is a periodic vibration of the beam on a balanceable station.

Key words：Hamiltonian system；elastic beams；thermal buckling；large deformation