

基于区间分析的非概率稳健优化设计

董荣梅*, 孙伟, 许焕卫

(大连理工大学机械工程学院, 辽宁大连 116024)

摘要: 提出了一种新的基于区间分析的非概率稳健优化设计模型. 利用非线性区间数规划和函数的区间扩张, 对稳健性指标进行了计算, 将含有区间参数的常规稳健优化模型转化为确定性的稳健优化模型, 转化后的模型能够根据设计者要求实现任意指定稳健性的优化目标, 最终建立了两级稳健优化设计模型. 该模型无需知道设计参数的概率分布函数, 也不要求目标函数及约束连续、可导. 实例结果证明了该方法的有效性.

关键词: 非概率; 不确定性; 区间分析; 稳健优化设计

中图分类号: TH122 **文献标志码:** A

0 引言

稳健优化设计是处理不确定优化问题的一种方法, 该方法使系统性能受不确定因素变化的影响较小^[1,2]. 稳健优化设计包含目标的稳健性和约束的稳健性两方面内容. 目标的稳健性是指同时优化目标的平均值和目标的波动值. 约束的稳健性是指在不确定因素的影响下所求得的优化解仍在可行域范围内.

根据对不确定因素处理方式的不同, 稳健优化设计可被分成两种: 一种是概率稳健优化设计, 该方法需要预先知道不确定因素的概率密度函数, 然后基于概率或统计方法确保目标或约束的波动在可接受范围内^[3,4], 包含了概率信息的求解, 过程非常复杂, 并且在实际工程中不确定因素的统计信息往往是不知道或者很难获得的. 另一种是非概率稳健优化设计, 该方法一般是通过目标函数或约束的梯度信息求得稳健解, 这种方法不需要概率分布信息, 但却包含一定的局限性. 如文献[5]要求目标函数和约束对设计参数可导; 文献[6]假设目标函数或约束对设计参数是线性变化的, 因而不确定因素的变化范围不能太大; 文献[7]虽然不需要梯度信息, 但却要求目标函数或约束是连续的; 文献[7~9]通过逐一分析设计参数和目标函数及约束之间的映射关系, 推导出设计

参数对系统输出的响应, 并将该响应量作为惩罚函数加到原函数中, 该方法分析过程复杂, 所求的稳健解可能欠保守, 而且仅能获得一种稳健性指标的优化解.

为此, 本文提出基于区间分析的稳健优化设计方法, 该方法直接利用区间分析算法求得在不确定因素影响下变化后的目标函数及约束的上下界, 并且能够根据设计者的偏好求解具有任意稳健性指标的优化解.

1 稳健优化模型

1.1 目标函数的稳健性

含有不确定因素的常规优化模型可以表述如下:

$$\begin{aligned} \min & f(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \\ \text{s. t. } & g_i(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \leq 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & h_j(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = 0; \quad j = 1, 2, \dots, m \\ & \mathbf{X}_{\min} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_{\max} \end{aligned} \quad (1)$$

式中: $f(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ 是优化目标; 设计变量向量 $\mathbf{X} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k)$, \mathbf{X}_{\max} 、 \mathbf{X}_{\min} 是设计变量向量的上下界; $g_i(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ 是不等式约束; $h_j(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ 是等式约束; $\mathbf{P} = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_l)$ 是设计参数向量, 是设计中的不可控因素, 其变化范围的上下界是已知的. 根据区间分析的定义, 由设计参数向量 \mathbf{P} 或

其分量 p_i 上下界构成的区间参数向量 \mathbf{P}^j 或其区间参数分量 p_i^j 如下式所示:

$$\mathbf{P} \in \mathbf{P}^j = (p_1^j \quad p_2^j \quad \cdots \quad p_t^j) = [\mathbf{P}^l, \mathbf{P}^u] = [(p_1^l \quad p_2^l \quad \cdots \quad p_t^l), (p_1^u \quad p_2^u \quad \cdots \quad p_t^u)];$$

$$i = 1, 2, \dots, t \quad (2)$$

当设计参数是区间变量时, 根据区间函数扩张定义, 原目标函数 $f(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ 变为相应的区间函数 $F(\mathbf{X}, \mathbf{P}^j)$. 在区间规划中, 区间数序关系表示一个区间优于另外一个区间, 用于区间数的排序. 最小化问题中区间 B^l 优于区间 A^l 的数序关系为^[10]

$$\begin{cases} A^l \leq_{\text{mw}} B^l; & A^c \geq B^c \text{ 且 } A^w \geq B^w \\ A^l <_{\text{mw}} B^l; & A^l \leq_{\text{mw}} B^l \text{ 且 } A^l \neq B^l \end{cases} \quad (3)$$

由式(3)可知, 只有当区间 B^l 的中值和半径都小于区间 A^l 的中值和半径时, 区间 B^l 才优于区间 A^l . 对于 B^l , 其中值和半径可由下式计算:

$$B^c = (B^u + B^l)/2, \quad B^w = (B^u - B^l)/2 \quad (4)$$

其中

$$B^l(\mathbf{X}, \mathbf{P}^j) = \min_{\mathbf{P} \in \Omega} B(\mathbf{X}, \mathbf{P})$$

$$B^u(\mathbf{X}, \mathbf{P}^j) = \max_{\mathbf{P} \in \Omega} B(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \quad (5)$$

$$\mathbf{P} \in \Omega = \{\mathbf{P} \mid \mathbf{P}^l \leq \mathbf{P} \leq \mathbf{P}^u\}$$

在目标区间函数 $F(\mathbf{X}, \mathbf{P}^j)$ 的寻优过程中, 只有其中值和半径都最小时, 该区间函数才是最优的, 因此可将方程(1)中的单目标函数转化为该区间函数的中值最小和半径最小双目标函数, 如下式所示:

$$\min f(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \min(F^c(\mathbf{X}, \mathbf{P}^j), F^w(\mathbf{X}, \mathbf{P}^j)) \quad (6)$$

式(6)中双目标函数优化问题同时考虑到了优化目标的平均值 $F^c(\mathbf{X}, \mathbf{P}^j)$, 及优化目标波动的幅值 $F^w(\mathbf{X}, \mathbf{P}^j)$, 通过权衡目标最优及波动最小两者之间的权重关系, 确保目标的稳健性. 而在实际工程优化问题中, 设计者要寻找的往往不是目标函数波动的最小值, 而是在一定波动程度内, 目标的最优值. 因此当预先确定了目标函数的波动值 Δf 时, 式(6)中的双目标优化可以转化为满足波动范围的目标优化形式, 即

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= \min(F^c) \\ \text{s. t. } &F^w \leq \Delta f \end{aligned} \quad (7)$$

1.2 不等式约束的稳健性

通过常规优化方法所求得的最优化解往往位于活动约束的边界上, 设计参数的微小波动都可能导致该最优化解位于新构成约束的不可行域内, 如图1所示. 图中 g_i 是原约束, g'_i 是由于设计参数

的变化而形成的新约束, 阴影部分是新增的不可行域. 图1(a)中, 最优化解 $x_{k\min}$ 和 $x_{k\max}$ 都位于新约束 g'_i 的不可行域内; 图1(b)中 $x_{k\min}$ 仍旧满足新约束 g'_i 可行性的要求, 而 $x_{k\max}$ 则破坏了新约束 g'_i 的边界; 图1(c)中的两个最优化解在设计参数的影响下仍位于新约束 g'_i 的可行域内.

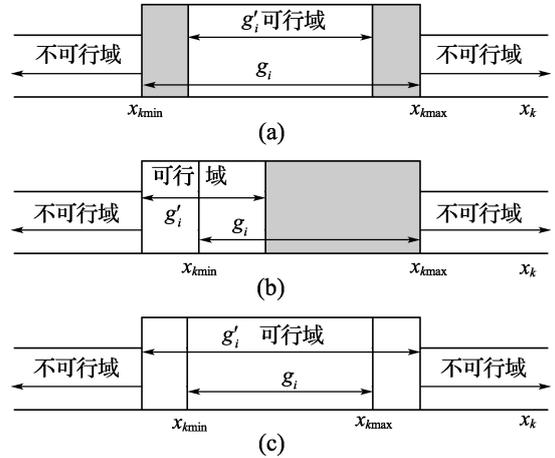


图1 约束 g_i 的可行稳健性

Fig. 1 The feasible robustness of the constraint g_i

约束的稳健性是指即使存在不确定因素的影响也能保证最优化解位于约束的可行域内. 当设计参数是区间变量时, 原约束函数变为相应的区间约束函数. 根据式(1), 区间约束的可行域指的是不大于0的区间变量, 那么这部分区间变量占整个区间的百分比即表示新约束满足可行稳健性的程度. 由文献[11]比较两个区间的定义, 当其中一个区间蜕变为实数 ϵ 时, 可得到一个区间 g'_i 小于 ϵ 或大于 ϵ 的可能性程度, 如式(8)和(9)所示.

$$P_{g'_i < \epsilon} = \begin{cases} 0; & g'_i \geq \epsilon \\ (\epsilon - g'_i)/(g'_i{}^u - g'_i{}^l); & g'_i \leq 0 \leq g'_i{}^u \\ 1; & g'_i{}^u \leq \epsilon \end{cases} \quad (8)$$

$$P_{g'_i \geq \epsilon} = \begin{cases} 1; & g'_i \geq \epsilon \\ (g'_i{}^u - \epsilon)/(g'_i{}^u - g'_i{}^l); & g'_i \leq 0 \leq g'_i{}^u \\ 0; & g'_i{}^u \leq \epsilon \end{cases} \quad (9)$$

当 $\epsilon = 0$ 时, $P_{g'_i < 0} = [0, 1]$ 即为稳健设计中约束稳健性的指标. 在实际工程优化问题中, 设计者对于约束满足稳健性的要求是不一样的: 在某些工况下, 目标函数的最优是设计者最关心的, 而约束条件可以有某种程度的破坏; 在另外一些工况下, 最优化解严格满足约束条件是最重要的, 目标函

数可以做出适当的牺牲. 因而有必要提供一种能由设计者任意控制稳健性指标的优化策略. 若设计者要求不等式约束的稳健性不小于 φ_i 时, 式 (1) 中的不等式约束可以转化为

$$P_{g'_i \leq 0} \geq \varphi_i, \quad g'_i = [g_i^l, g_i^u]; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

1.3 等式约束的稳健性

与不等式约束类似, 等式约束也由实数函数变成了相应的区间函数 $h'_j = [h_j^l, h_j^u] = 0$, 因此可以转化为

$$h_j^l \leq h'_j(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \leq h_j^u \quad (11)$$

式 (11) 可以转化成以下两个不等式约束:

$$\begin{aligned} h'_j(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &\leq h_j^u \\ h'_j(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &\geq h_j^l \end{aligned} \quad (12)$$

若设计者要求等式约束的稳健性不小于 φ_j 时, 式 (12) 可以转化为

$$\begin{aligned} P_{h'_j \leq h_j^u} &\geq \varphi_j, \quad P_{h'_j \geq h_j^l} \geq \varphi_j; \\ h'_j &= [h_j^l, h_j^u], \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (13)$$

1.4 两级优化模型

综合上述对目标函数及约束的稳健性分析, 最终形成了以下两级优化模型: 如图 2 所示, 基于区间分析的两级优化模型包含两个优化流程. 首先由顶层优化子模型在设计变量 \mathbf{X} 的设计空间内寻找满足常规约束的最优解 x_0 , 并将该优化解 x_0 传递到底层的优化子模型中, 利用区间算法, 在设

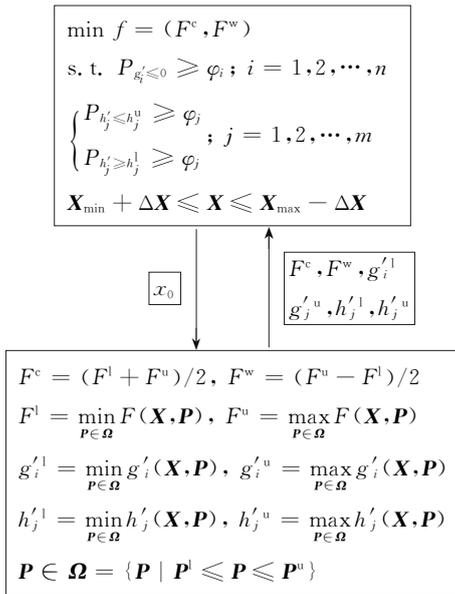


图 2 稳健优化设计的两级优化模型

Fig. 2 Bi-level mathematical model of robust design optimization

计参数 \mathbf{P} 的变化空间内计算区间数 (F^l, g_i^l, h_j^l) 的上下界 ($F^c, F^w, g_i^l, g_i^u, h_j^l, h_j^u$), 再将该上下界的值传递到顶层子模型中. 该过程循环进行直到寻到顶层模型的最优解为止. 由循环过程可知, 在顶层优化模型中, 旨在寻求设计变量的最优解, 因此区间数的上下界是定值; 在底层优化子模型中, 旨在计算区间数的上下界, 因此设计变量 x_0 是定值.

2 算 例

图 3 所示的焊接梁优化问题要求在严格满足各约束条件下, 焊接梁的造价最低, 并且其目标函数波动小于 0.04. 原优化问题的详细描述、计算中其余公式及数据可参考文献 [12]. 本文将直接给出原优化问题的数学模型.

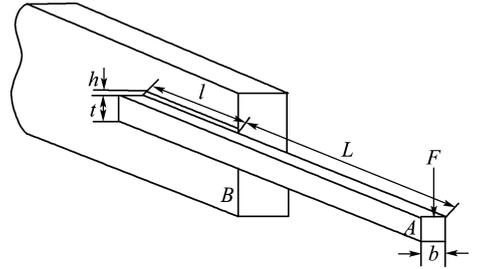


图 3 焊接梁结构

Fig. 3 A welded beam assembly

焊接梁的常规优化数学模型为

设计变量: $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T = (t \ b \ h \ l)^T$

目标函数: $\min f = (1 + c_1)x_3^2 x_4 + c_2 x_1 x_2 (L + x_4)$

约束函数: $g_1(x) = \tau - \tau_d \leq 0$

$g_2(x) = \sigma - \sigma_d \leq 0$

$g_3(x) = \delta - 0.25 \leq 0$

$g_4(x) = F - p_c \leq 0$

$0.1 \leq x_1 \leq 13, \quad 0.1 \leq x_2 \leq 2$

$0.125 \leq x_3 \leq 2, \quad 0.1 \leq x_4 \leq 10$

其中 L 和 c_1 包含有不确定因素: $\Delta L = \pm 0.25, \Delta c_1 = \pm 0.05$. 采用了 4 种方法对该问题进行求解, 分别是常规优化解法 [12] (M_1)、灵敏域解法 [7] (M_2)、最大波动分析法 [9] (M_3) 及本文提出的方法 (M_4). 优化结果如表 1 所示. 约束的稳健性如表 2 所示, 其中该问题中 4 个约束函数的稳健性指标分别用 R_1, R_2, R_3, R_4 表示. 为了比较目标的稳健性, 分别在 L 和 c_1 的容差范围内选择了 29 种随机参

数组组合,并对这 29 种随机工况进行了仿真实验,目标函数的波动(Δf)情况如图 4 所示,其中虚线表示最大允许波动值。为了分析约束稳健性受设计参数区间大小的影响,以第一个约束为例,图 5 给出了约束稳健性指标(R_1)随着设计参数区间宽度变化的趋势,其中横坐标为设计参数区间宽度的倍数(k)。

表 1 优化结果的比较

Tab. 1 Comparison of optimization results

方法	f	x_1	x_2	x_3	x_4
M ₁	2.382	8.292	0.244	0.244	6.219
M ₂	2.487	9.138	0.248	0.246	5.461
M ₃	2.694	8.328	0.247	0.176	9.843
M ₄	2.710	8.310	0.248	0.175	9.973

表 2 约束稳健性的比较

Tab. 2 Comparison of constraint robustness

方法	R_1	R_2	R_3	R_4
M ₁	0.51	0.50	1	0.52
M ₂	0.57	1	1	1
M ₃	0.99	1	1	0.88
M ₄	1	1	1	1

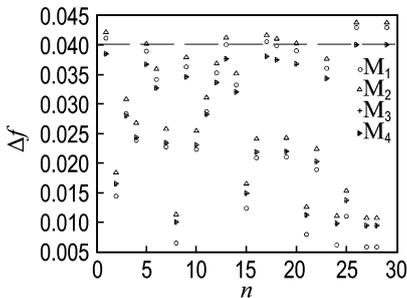


图 4 目标函数波动的比较

Fig. 4 Comparison of objective robustness fluctuation

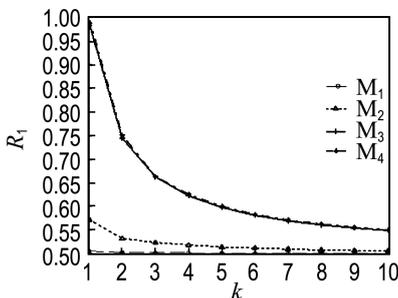


图 5 约束稳健性指标随着设计参数区间大小变化的趋势

Fig. 5 Objective robustness comparison with respect to the interval width variation of uncertain parameters

由表 1、表 2 和图 4 可知,常规优化解法的优化解最好,但其约束稳健性和目标稳健性最差.本文所提方法的优化解最大,但所有约束稳健性及目标稳健性均满足要求.最大波动分析法的优化解与本文方法比较接近,但仍有两个约束条件没有被严格满足,如第 1 个和第 4 个约束的稳健性指标分别为 0.99 和 0.88.灵敏域解法的优化解略大于常规优化解法,但其目标函数波动范围最大,而且第 1 个约束稳健性仅有 0.57.

由图 4 可知,用本文方法和最大波动分析法所求得的优化解其目标波动值都小于最大允许值 0.04,而灵敏域解法则在 n 为 1、13、17、18、26、29 这 6 次实验中的波动值都超过了最大许用值,常规优化解法在 n 为 1、17、26、29 这 4 次实验中的波动值也超过了最大许用值.因此与其他方法相比,本文方法能够有效地确保约束函数的稳健性.

由图 5 可知,约束稳健性随着设计参数变化区间的增大而减小,但本文所提方法的约束稳健性略高于最大波动分析法,远高于常规优化解法和灵敏域解法.因此与其他方法相比,本文方法能够有效确保约束函数的稳健性受不确定因素区间变化的影响较小.

上述结果表明,优化解与目标稳健性和约束稳健性是相互矛盾的,要获得较大的稳健性就需要牺牲一定的目标函数值.本文所提方法能够求得满足设计者所定的具有任意稳健性指标的优化解,尤其是在要求优化解严格满足约束条件的实际工程问题中,使用本文方法能确保优化解对不确定因素的变化最不灵敏.

3 结 论

本文提出了一种新的基于区间分析的非概率稳健优化设计模型.与其他方法相比,本文方法主要是利用了区间数学的相关理论来转换包含有不确定因素的常规优化模型:基于区间数学关系将单目标函数转换为能够表征目标均值和目标波动的双目标函数;基于区间可能度将约束函数转换为能够表达决策者对稳健性偏好信息的约束函数;通过求解包含有目标稳健性和约束稳健性的数学模型,最终实现目标函数和约束函数的稳健性.把所提方法应用到实际的工程优化问题中,验证了本文所提方法的有效性及其可行性.值得一提的是本文方法是以区间分析为基础的.虽然与概率理论为基础的稳健设计方法相比,本文方法可

大大降低对原始数据的要求,且不涉及概率的概念.但是,应该指出,基于概率理论的稳健设计方法的正确性和成熟性是毋庸置疑的.因此当具有足够数据描述不确定参数的概率特性时,宜采用概率理论为基础的稳健设计方法;当掌握的不确定性数据较少,目标函数以及约束不连续、不可导时,可采用本文所提稳健设计模型.

参考文献:

- [1] TAGUCHI G. **Taguchi on Robust Technology Development: Bringing Quality Engineering Upstream** [M]. New York: ASME, 1993
- [2] 陈立周. 稳健设计[M]. 北京:机械工业出版社, 2000
- [3] PAPADRAKAKIS M, LAGAROS N D. Reliability-based structural optimization using neural networks and Monte Carlo simulation [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2002, **191**(32):3491-3507
- [4] DU X, CHEN W. Towards a better understanding of modeling feasibility robustness in engineering design [J]. **ASME Journal of Mechanical Design**, 2000, **122**(4):385-394
- [5] LEE K, PARK G. Robust optimization considering tolerances of design variables [J]. **Computers and Structures**, 2001, **79**(1):77-86
- [6] PARKINSON A, SORENSEN C, POURHASSAN

- N A. A general approach to robust optimal design [J]. **ASME Journal of Mechanical Design**, 1993, **115**(1):74-80
- [7] GUNAWAN S, AZARM S. A feasibility robust optimization method using sensitivity region concept [J]. **ASME Journal of Mechanical Design**, 2005, **127**(5):858-865
- [8] LI M, AZARM S. A new deterministic approach using sensitivity region measures for multi-objective robust and feasibility robust design optimization [J]. **ASME Journal of Mechanical Design**, 2006, **128**(4):874-883
- [9] 许焕卫,孙伟,张旭. 基于最大波动分析的稳健设计[J]. **农业机械学报**, 2008, **39**(12):162-165
- [10] ISHIBUCHI H, TANAKA H. Multiobjective programming in optimization of the interval objective function [J]. **European Journal of Operational Research**, 1990, **48**(2):219-225
- [11] SENGUPTA A, PAL T K, CHAKRABORTY D. Interpretation of inequality constraints involving interval coefficients and a solution to interval linear programming [J]. **Fuzzy Sets and Systems**, 2001, **119**(1):129-138
- [12] RAGSDELL K M, PHILLIPS D T. Optimal design of a class of welded structures using geometric programming [J]. **ASME Journal Engineering for Industry**, 1976, **98**(3):1021-1025

Non-probabilistic robust optimization design based on interval analysis

DONG Rong-mei*, SUN Wei, XU Huan-wei

(School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A novel non-probabilistic robust design optimization model using interval analysis is presented. Based on non-linear interval number programming and function interval extension, the robustness was assessed, and the uncertain robust optimization model with interval parameters was transformed into a deterministic form, which can achieve the objective with any expected robustness level according to decision-maker, and a bi-level mathematical model is established. This model doesn't require the presumed probability distribution of uncertain factors and gradient or continuous information of constraints and objective functions. Experimental results demonstrate the effectiveness of the given method.

Key words: non-probabilistic; uncertainty; interval analysis; robust optimization design