第51卷第1期
2011年1月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 51， No. 1
Jan. 2011

应用数学

文章编号：1000-8608(2011)01-0149-05

Hamilton体系下分离变量法可和性

苏木亚[*1,2]， 阿拉坦仓[2]， 郭崇慧[1]

（1.大连理工大学 系统工程研究所，辽宁 大连 116024；
2.内蒙古大学 数学科学学院，内蒙古 呼和浩特 010021）

摘要：非自伴算子特征函数系的完备性是一个非常困难的研究课题，至今还没有统一的处理方法. 对一类可用分离变量法求解的偏微分方程引入 Hamilton 系统，论证了基底函数组的辛正交系分别在 Abel 平均与 Cauchy 主值意义下的完备性与收敛性，并将 Abel 平均意义下的结论推广到更一般情形，即 θ 可和性意义下的情形. 特别地得到了给定级数在 Abel 平均与 Cauchy 主值意义下同时收敛的充分与必要条件. 最后通过实例说明了该方法的正确性.

关键词：Hamilton 系统；分离变量法；可和性
中图分类号：O175.3 **文献标志码**：A

0 引 言

分离变量法是求解偏微分方程的一个重要方法. 它的基本思想是把偏微分方程的求解问题通过变量分离转化为特征值问题，然后把解表示成按特征函数系展开的级数形式. 分离变量法的理论基础是 Sturm-Liouville 问题理论. 而 Sturm-Liouville 问题理论的本质是自伴算子特征值问题[1,2]. 在现实问题中遇到的大多是非自伴算子. 然而对于非自伴算子没有统一的处理方法，这直接导致非自伴算子的研究困难. 以往主要通过对称算子的自伴扩张和特殊的非自伴算子两个途径研究非自伴算子. 关于特殊的非自伴算子，20 世纪 50 年代，Glazman 发现一类特殊的非自伴算子——J-自伴算子，并给出了关于 J-自伴算子的一些结论. 至于另一个重要的非自伴算子——无穷维 Hamilton 算子的性质，尤其是其特征函数系的完备性问题虽然得到一些较好的结果[3~6]，但是还有诸多问题有待解决，例如上述文献并没有给出展开式的具体收敛方法. 本文对一类可用传统的分离变量法求解的偏微分方程引入 Hamilton 系统，讨论基底函数组的辛正交系在 Abel 平均等若干种收敛意义下的完备性问题及这些收敛方法的内在联系.

1 基本定义

定义 1 设 X 是 Hilbert 空间，$\boldsymbol{H}:\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})\subset X\times X\rightarrow X\times X$，$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}$，其中 A、B、C 均为 X 上的稠定闭线性算子，A^* 为 A 的共轭算子，B、C 均为自伴算子，则称 $\boldsymbol{H}$ 为无穷维 Hamilton 算子.

定义 2 设 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}u_k$ 是给定的级数，若 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}u_k\times r^{|k|}$ $(0\leqslant r<1)$ 收敛，记其收敛核为 $A(r)$，且 $\lim\limits_{r\rightarrow 1-0}A(r)$ 存在，则称级数 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}u_k$ 在 Abel 意义下收敛.

定义 3 设 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}u_k$ 是给定的级数. ρ 为参数，

收稿日期：2008-11-12； **修回日期**：2010-09-21.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10562002)；内蒙古自然科学基金资助项目(200508010103).
作者简介：苏木亚*(1983-)，男，博士生，E-mail：sumuya@mail.dlut.edu.cn；阿拉坦仓(1963-)，男，博士，教授，博士生导师；郭崇慧(1973-)，男，博士，教授，博士生导师.

取之于某个集合，这个集合或者是一个区间 (a,b)，$0\leqslant a<b\leqslant\infty$，或是集合 $\mathbf{N}$. $\theta_\rho(k)$ 为 θ 因子，若对每个 $\rho\in A$，$\theta_\rho(k)$ 为 L 上的实函数，满足以下条件：

(1) $k\theta_\rho(k)\in L'$；

(2) $\lim\limits_{\rho\to a}\theta_\rho(k)=1$，$\theta_\rho(k)=\theta_\rho(-k)$；

(3) $\lim\limits_{\rho\to a}\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}\theta_\rho(k)u_k(x)$ 存在

则称 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}u_k(x)$ 的 θ 平均存在.

上述定义中根据定理的需要将文献[2]中 θ 平均的定义中 $\theta_\rho(k)\in L'$ 改为 $k\theta_\rho(k)\in L'$. 以下结论中涉及到的空间 X 均为 $L_2[0,1]$.

2 主要结果及其证明

考虑如下偏微分方程：

$$\begin{cases}s(x)\dfrac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)+M(x,t);\\0<x<1,t>0\\u(0,t)=u(1,t)=0;t>0\\u(x,0)=f(x),u_t(x,0)=g(x);x\in[0,1]\end{cases}\tag{1}$$

其中 $p(x)$、$s(x)$ 均为实函数，且满足以下 2 个条件：

(1) $p(x)\in c'[0,1]$，$s(x)\in c[0,1]$；

(2) $p(x)\geqslant p_0(x)>0$，$s(x)>0$，$x\in[0,1]$.

令 $v(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$，$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}u(x,t)\\v(x,t)\end{pmatrix}$，从而引入无穷维 Hamilton 系统：

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u(x,t)\\v(x,t)\end{pmatrix}=\boldsymbol{HV}+\begin{pmatrix}0\\s^{-1}(x)M(x,t)\end{pmatrix}\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}0&1\\s^{-1}(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{H})=\begin{pmatrix}u(x)\\v(x)\end{pmatrix}\in X\times X$，$u'$ 绝对连续，$u(0)=u(1)=0$，$u',u''\in X$.

引理 1 Hamilton 算子

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}0&1\\s^{-1}(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)&0\end{pmatrix}$$

的特征值为 $\lambda_k=\mathrm{i}\tau_k$，相应的特征函数为 $\boldsymbol{U}_k(x)=\begin{pmatrix}u_{|k|}(x)\\\mathrm{i}\tau_ku_{|k|}(x)\end{pmatrix}$，$k=\pm1,\pm2,\cdots,\pm n,\cdots$，且 $\{\boldsymbol{U}_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 加权 $s(x)$ 辛正交. 其中 $-\tau_k^2$、$u_k(x)$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots,\pm n,\cdots)$ 分别是微分方程 $-s^{-1}(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+\lambda^2u(x)=0$ 的特征值及其对应的特征函数.

引理 2[1] 设 Sturm-Liouville 系

$$\begin{cases}(p(t)x'(t))'+(\lambda r(t)+q(t))x(t)=0;\\\quad t\in I=[a,b]\\U_1(x)\equiv x(a)=0\\U_2(x)\equiv x(b)=0\end{cases}$$

其相关变量满足以下条件：

$p(t)$，$p'(t)$，$r(t)$，$q(t)\in c(I)$；$p(t)>0$，$r(t)>0$；$C^2\leqslant r(t)F(t)$，$M=\max\limits_{t\in I}\left(\dfrac{q(t)}{r(t)}\right)$，$m=\min\limits_{t\in I}\left(\dfrac{q(t)}{r(t)}\right)$；$f(t)\in c(I)$，$F(t)\geqslant p(t)$，$0<f(t)\leqslant p(t)$；$C^2\geqslant r(t)f(t)$；$t\in I$

则 Sturm-Liouville 系的特征值满足不等式

$$\frac{(n+1)^2\pi^2}{C^2\left(\int_a^b\dfrac{\mathrm{d}t}{F(t)}\right)^2}+M>\lambda_n>\frac{(n+1)^2\pi^2}{C^2\left(\int_a^b\dfrac{\mathrm{d}t}{f(t)}\right)^2}+m;$$

$$n=1,2,\cdots$$

推论 1 τ_n 与 n 是同阶无穷大.

定理 1 $\{\boldsymbol{U}_k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 在 $X\times X$ 中一般意义下不完备.

证明 在式(1)中令 $s(x)=1$，$p(x)=1$，$M(x,t)=0$，则易知该偏微分方程的特征函数系为 $\left\{\begin{pmatrix}\sin k\pi x\\\mathrm{i}k\pi\sin k\pi x\end{pmatrix}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$，$\forall\begin{pmatrix}f(x)\\g(x)\end{pmatrix}\in X\times X$，按其特征函数系 $\left\{\begin{pmatrix}\sin k\pi x\\\mathrm{i}k\pi\sin k\pi x\end{pmatrix}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 的辛 -Fourier 展开为

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \left(\int_0^1 f(x)\sin k\pi x \mathrm{d}x + \frac{1}{\mathrm{i}k\pi}\int_0^1 g(x)\sin k\pi x \mathrm{d}x \right) \sin k\pi x \\ \sum\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \left(\mathrm{i}k\pi \int_0^1 f(x)\sin k\pi x \mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\sin k\pi x \mathrm{d}x \right) \sin k\pi x \end{pmatrix}$$

特别地，取 $f(x)=1$，$g(x)=0$，则容易证明上述 $g(x)$ 的展开式的 L_2 范数等于2，即当 $k\to\infty$ 时展开式在一般意义下发散. □

定理 2[3]　$\{\boldsymbol{U}_k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 在 $X\times X$ 中具有 Cauchy 主值意义下的完备性.

定理 3[7]　$\{\boldsymbol{U}_k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 在 $X\times X$ 中具有 Abel 平均意义下的完备性.

可以把上述结果推广到更一般的情况，即有以下定理成立.

定理 4　$\{\boldsymbol{U}_k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 中元素和 $\theta_\rho(k)$ 满足定义 3 的条件，则 $\{\boldsymbol{U}_k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 在 $X\times X$ 中具有 θ 可和性意义下的完备性.

证明　类似于定理 3 的证明，先对偏微分方程(1) 的解进行展开，再利用 θ 可和性的特殊性质证明收敛性. 设偏微分方程(1) 的解有如下表达式：

$$\boldsymbol{V} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \boldsymbol{U}_k(x)T_k(t) = \boldsymbol{U}(x)\boldsymbol{T}(t) \tag{3}$$

$\boldsymbol{U}_k(x)$ 的表达式与引理 1 中的一样. 将 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{U}(x)\boldsymbol{T}(t)$ 代入式(2) 有

$$\boldsymbol{U}(x)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{U}(x)\boldsymbol{T}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ s^{-1}(x)M(x,t) \end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}_k(x)=\lambda_k\boldsymbol{U}_k(x)$，有 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}(x)=\boldsymbol{U}(x)\boldsymbol{M}$，其中 $\boldsymbol{M}$ 为由 $\lambda_k(k=\pm1,\pm2,\cdots,\pm n,\cdots)$ 组成的对角矩阵. 从而

$$\boldsymbol{U}(x)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{U}(x)\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ s^{-1}(x)M(x,t) \end{pmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{U}(x)\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(t)}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{T}(t)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ s^{-1}(x)M(x,t) \end{pmatrix}$$

再将 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(t)}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{T}(t)$ 辛 -Fourier 展开，即令

$$\boldsymbol{U}(x)\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ s^{-1}(x)M(x,t) \end{pmatrix}$$

其中展开系数 $\boldsymbol{G}=(g_1\quad g_2\quad\cdots\quad g_{-1}\quad g_{-2}\quad\cdots)^{\mathrm{T}}$.

经计算可得

$$g_k = \frac{1}{2\mathrm{i}\tau_k \| u_{|k|}(x) \|_{L_s^2}^2}\int_0^1 u_{|k|}(x)M(x,t)\mathrm{d}x$$

$$g_{-k} = \frac{1}{2\mathrm{i}\tau_{-k} \| u_{|k|}(x) \|_{L_s^2}^2}\int_0^1 u_{|k|}(x)M(x,t)\mathrm{d}x$$

通过求解 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(t)}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{T}(t) = \boldsymbol{G}$ 的单个方程，得

$$T_k(t) = c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau_k t} + \int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau_k(t-\tau)} g_k \mathrm{d}\tau;\ k=\pm1,\pm2,\cdots$$

将初等条件 $u(x,0)=f(x)$，$u_t(x,0)=g(x)$ 代入 $\boldsymbol{V}(x,t)=\boldsymbol{U}(x)\boldsymbol{T}(t)$ 有

$$\boldsymbol{V}(x,0) = \boldsymbol{U}(x)\boldsymbol{T}(0) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{T}(0) = (c_1\quad c_2\quad\cdots\quad c_{-1}\quad c_{-2}\quad\cdots)^{\mathrm{T}}$$

与上述方法类似可得

$$c_k = \frac{1}{2\mathrm{i}\tau_k \| u_{|k|}(x) \|_{L_s^2}^2}\int_0^1 \boldsymbol{U}_{-k}^{\mathrm{T}}(x)\begin{pmatrix} g(x) \\ -f(x) \end{pmatrix}\mathrm{d}x$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2\mathrm{i}\tau_{-k} \| u_{|k|}(x) \|_{L_s^2}^2}\int_0^1 \boldsymbol{U}_{k}^{\mathrm{T}}(x)\begin{pmatrix} g(x) \\ -f(x) \end{pmatrix}\mathrm{d}x$$

将求出的 c_k、c_{-k} 和 $T_k(t) = c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau_k t} + \int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau_k(t-\tau)} g_k \mathrm{d}\tau$ 代入式(3)，左乘 $\begin{pmatrix} \theta_\rho(k) & 0 \\ 0 & \theta_\rho(k) \end{pmatrix}$，取极限并利用 θ 可和性的定义可得

$$\lim_{\rho\to a}\begin{pmatrix}\theta_\rho(k) & 0\\ 0 & \theta_\rho(k)\end{pmatrix}\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\|u_{|k|}(x)\|_{L_s^2}^2}\left[\frac{1}{\tau_k}\int_0^t M_s\mathrm{d}\tau\cdot u_{|k|}(x)+\frac{1}{\tau_k}B\sin\tau_k t\cdot u_{|k|}(x)+A\cos\tau_k t\cdot u_{|k|}(x)\right]\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\|u_{|k|}(x)\|_{L_s^2}^2}\left[\int_0^t M_c\mathrm{d}\tau\cdot u_{|k|}(x)+B\cos\tau_k t\cdot u_{|k|}(x)-\tau_k A\sin\tau_k t\cdot u_{|k|}(x)\right]\end{pmatrix}$$

其中

$$M_s=\int_0^1 u_{|k|}(x)M(x,t)\sin\tau_k(t-\tau)\mathrm{d}x$$

$$M_c=\int_0^1 u_{|k|}(x)M(x,t)\cos\tau_k(t-\tau)\mathrm{d}x$$

$$A=\int_0^1 u_{|k|}(x)s(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$B=\int_0^1 u_{|k|}(x)s(x)g(x)\mathrm{d}x$$

□

定理 5　$\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}u_k$ 是给定的级数，则 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}u_k$ 既在 Abel 平均意义下收敛又在 Cauchy 主值意义下收敛的充分必要条件如下.

(1) $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}u_k$ 可分解成如下形式：

$$u_k=a_k+b_k$$

其中

$$a_k=-a_{-k};\ k=\pm1,\pm2,\cdots,\pm n,\cdots$$

(2) $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}b_k$ 收敛且 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}a_k r^{|k|}$ 绝对收敛.

证明

必要性：由假设 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}u_k$ 在 Cauchy 主值意义下收敛，即 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}(u_k+u_{-k})$ 收敛，把 u_k 分解成 $u_k=a_k+b_k$ 的形式，其中 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}b_k$ 收敛，则 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}a_k$ 是 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}u_k$ 中不收敛的部分，否则归结到 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}b_k$ 中，则 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}(a_k+a_{-k})$ 收敛，若不然与 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}(u_k+u_{-k})$ 收敛矛盾，从而 $a_k=-a_{-k}$. 再由 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}u_k$ 在 Abel 意义下的收敛知 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}a_k r^{|k|}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}a_k r^{|k|}$ 绝对收敛.

充分性：若 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}u_k=\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}(a_k+b_k)$，由 $a_k=-a_{-k}$ 及由 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}b_k$ 收敛知 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}(u_k+u_{-k})$ 收敛. 即 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}u_k$ 在 Cauchy 主值意义下收敛，且 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}a_k r^{|k|}=\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}(a_k+b_k)r^{|k|}$，由 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}a_k r^{|k|}$ 绝对收敛，$a_k=-a_{-k}$ 及 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}b_k$ 收敛知 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}(a_k+b_k)r^{|k|}$ 绝对收敛，即 $\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}u_k$ 在 Abel 平均意义下收敛.　□

3　实　例

考虑如下偏微分方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}+M(x,t)\\ u(0,t)=u(1,t)=0;\ t>0\\ u(x,0)=f(x),u_t(x,0)=g(x);\ x\in[0,1]\end{cases}$$

令 $\sigma=\dfrac{\partial u}{\partial t},\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}u\\ \sigma\end{pmatrix}$，在 Abel 收敛意义下经计算可得

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[2\int_0^1A\cos k\pi t+\frac{2}{k\pi}\int_0^1B\sin k\pi t\right]\sin k\pi x+\frac{2}{k\pi}\left[\int_0^t M\sin k\pi(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\sin k\pi x\right\}\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[-2k\pi\int_0^1A\sin k\pi t+2\int_0^1B\cos k\pi t\right]\sin k\pi x+2\left[\int_0^t M^*\cos k\pi(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\sin k\pi x\right\}\end{pmatrix}$$

其中

$$A = f(x)\sin k\pi x \mathrm{d}x$$

$$B = g(x)\sin k\pi x \mathrm{d}x$$

$$M^{*} = \int_{0}^{1} M(x,\tau)\sin k\pi x \mathrm{d}x$$

所求得的 $u(x,t)$ 的表达式与传统的分离变量法下的结果完全一样,这说明结果是正确的.

4　结　论

对一类可用分离变量法求解的偏微分方程引入 Hamilton 系统后,发现了基底函数组的辛正交系分别在 Abel 平均与 Cauchy 主值意义下具有完备性.并且可将上述结论推广到更一般情形.最后还得到了给定级数在 Abel 平均与 Cauchy 主值意义下同时收敛的充分与必要条件.实例表明本文的结论是正确的.

参考文献：

[1] 邓宗琦. 常微分方程边值问题和 Sturm 比较理论引论[M]. 武汉：华中师范大学出版社，1987

[2] TITCHMARSH E C. **Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations** [M]. Oxford：Oxford Press，1962

[3] 阿茹娜，阿拉坦仓. 一类无穷维 Hamilton 算子特征函数系的完备性[D]. 呼和浩特：内蒙古大学，2005

[4] ZHANG H Q，Alatancang，ZHONG W X. The Hamilton system and completeness of symplectic orthogonal system [J]. **Applied Mathematics and Mechanics**，1997，**18**(3)：237-242

[5] 钟万勰. 分离变量法与哈密尔顿体系[J]. 计算结构力学及其应用，1991，**8**(3)：229-239

[6] 周建方，卓家寿，李典庆. 基于 Hamilton 体系的分离变量法[J]. 河海大学学报，2000，**28**(6)：27-31

[7] 苏木亚，阿拉坦仓，郭崇慧. Hamilton 算子特征函数系的完备性[J]. 内蒙古大学学报，2008，**39**(6)：601-606

Summability of method for separation of variables on Hamilton system

Sumuya*[1,2]，　Alatancang[2]，　GUO　Chong-hui[1]

(1. Institute of Systems Engineering，Dalian University of Technology，Dalian 116024，China；

2. School of Mathematical Sciences，Inner Mongolia University，Hohhot 010021，China)

Abstract：For the completeness of the eigenvectors of non-self-adjoint operator，there isn't a unified solving approach until now. To research into the topic，first，Hamilton system to a class of partial differential equations which can be solved by traditional method of separation of variables is introduced. Then，the completeness and summability of the eigenvectors in Abel means，Cauchy principal value are proved and the conclusions of Abel means to θ summability are extended. Especially，a sufficient and necessary condition of the given series is obtained under which both the Abel means and the Cauchy principal value converge. Finally，an example is given to illustrate the correctness of the analytical results.

Key words：Hamilton system；method of separation of variables；summability