第51卷第2期
2011年3月

大 连 理 工 大 学 学 报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 51， No. 2
Mar. 2011

文章编号：1000-8608(2011)02-0200-05

评价圆锥度误差的自适应方法

刘 宝 庆， 董 惠 敏*， 符 杰

（大连理工大学 机械工程学院，辽宁 大连 116024）

摘要： 借鉴鞍点规划的思想，依据最小条件原则和自适应拟合方法建立了圆锥度误差的数学评定模型；采用序列二次规划的方法求解自适应圆锥优化问题. 对于这个复杂的鞍点规划问题，全局最优解的获得依赖较好的初始点，通过分析测量模型与理想圆锥模型之间的几何关系，采用多步拟合的方法，计算出一个较优的初始点. 实例证明，采用多步拟合的初始点选取方式以及自适应圆锥拟合优化模型，可以得到重复度好以及精度高的圆锥形状误差评定结果.

关键词： 自适应；鞍点规划；三坐标测量机；圆锥度误差；最小条件原则

中图分类号： TG839 **文献标志码：** A

0 引 言

圆锥零件由于其安装定位的快速准确、零件间结合的可靠性和密封性，在机械工业以及航空航天工业中得以广泛应用，然而对圆锥零件的圆锥度测量和误差评定却并非易事，因为圆锥误差评定涉及的变量维数较高，而且数学模型难以线性化[1]. 传统方法是使用圆锥塞规、正弦尺、测角仪等工具检验圆锥零件是否合格，尽管这些方法装置简单、操作方便，但无法反映零件的整体形貌. 三坐标测量机的迅速推广，使最小二乘法成为圆锥度误差评定的主要方法. 文献[2]使用的评定方法计算过程比较简单，但不能很好地体现“最小条件原则”. 文献[3]使用最小二乘法进行圆锥度误差测量与评价，但是基于 3 个点计算圆心，然后使用 2 个圆心得到的初始理想轴线无法反映所有测量点的信息. 因此本文提出使用自适应圆锥的方法进行圆锥度测量和误差评定.

自适应圆锥是基于测量点，按照最大法向拟合误差最小为原则得到的拟合圆锥[4]. 在数学上，形象地称这种极大中极小问题的解为鞍点[5]. 这类问题的求解，就是鞍点规划问题. 文献[6]通过有规律地多次重复利用 POWLL 方法来寻找不同的局部最优解，从中选择最优的作为全局最优解，这种搜索方法具有较大的随机性，因此很多情况下得到的优化结果离全局最优解比较远. 本文通过分析测量模型跟理想圆锥模型之间的几何关系，采用多步拟合的方法，计算出一个优秀的初始点，并利用序列二次规划（SQP）方法来进行优化计算，给出圆锥误差的评定.

1 测量圆锥表面轮廓点

圆锥零件的形状尺寸不能直接测量得到，必须使用三坐标测量机等测量仪器，通过圆锥拟合得到. 数据点的采集方法随着圆锥拟合方法的不同而不同. 本文的采样方法是在零件表面取 5 个截面作为测量面，在每一个测量面上，测头从同一母线位置开始绕其测量轴旋转一周采集 40 组位置坐标. 图 1 为原理图，测头接触零件表面，由驱动系统控制测头运动，由测量系统采集数据.

2 圆锥拟合模型

圆锥误差的评定其实质是找到一个理想圆锥，数据点到理想圆锥表面距离的极差就是圆锥形状误差. 按得到理想圆锥的方法不同，分为最小二乘圆锥拟合和自适应圆锥拟合. 自适应圆锥（模型见图 2）是依据被拟合轨迹点的性质并按最大法向拟合误差最小为原则得到的拟合圆锥，这与形位误差评定的“最小条件原则”一致.

收稿日期： 2008-06-10； **修回日期：** 2010-11-22.
基金项目： “八六三”国家高科技发展计划资助项目（2006AA04Z101）；国家自然科学基金资助项目（50975038）.
作者简介： 刘宝庆（1980-），男，博士生，E-mail：LBQ9905@163.com；董惠敏*（1958-），女，博士，副教授，E-mail：donghm@dlut.edu.cn.

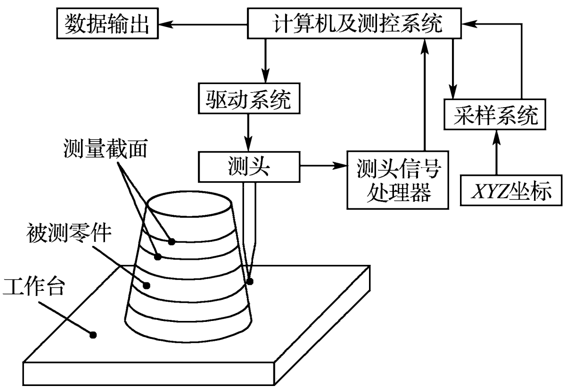

图 1　数据采集模型

Fig. 1　The model of data collection

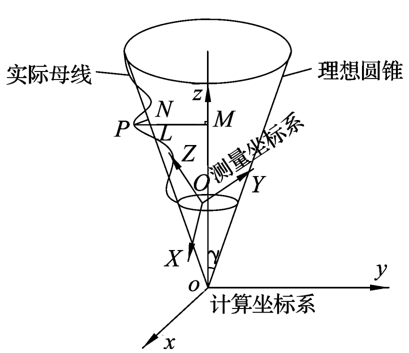

图 2　自适应圆锥模型

Fig. 2　The model of adaptive cone

在三坐标测量机采集数据的过程中，零件的加工与装卡问题，会导致零件轴线偏离测量轴线. 为了使圆锥误差评定模型直观简洁、计算方便，必须把测量的数据点从测量坐标系转换到标准的计算坐标系：

$$\boldsymbol{T}_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a & 0 \\ 0 & -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{T}_Y = \begin{pmatrix} \cos b & 0 & -\sin b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin b & 0 & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{p}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & d & e & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{T}_X$ 为绕 X 轴旋转矩阵；$\boldsymbol{T}_Y$ 为绕 Y 轴旋转矩阵；$\boldsymbol{T}_{\mathrm{p}}$ 为平移矩阵；a、b 分别为坐标系绕 X、Y 轴的旋转角度；c、d、e 分别为坐标系沿 X、Y、Z 轴的移动量.

总的变换矩阵

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{p}} \boldsymbol{T}_X \boldsymbol{T}_Y \tag{4}$$

则变换方程

$$(x \quad y \quad z \quad 1) = (X \quad Y \quad Z \quad 1)\boldsymbol{T} \tag{5}$$

式中：$(x \quad y \quad z \quad 1)$ 为计算坐标系下的坐标值，$(X \quad Y \quad Z \quad 1)$ 为测量坐标系下的坐标值. 此时目标函数

$$|PM| = (\sqrt{x^2 + y^2} - |z| \times \tan\gamma) \times \cos\gamma \tag{6}$$

目标函数中有 6 个待优化参数，分别为 a、b、c、d、e 和 γ.

目标函数确定后，对此鞍点规划问题的求解采用 MATLAB 优化工具箱中的 FMINIMAX 函数直接编程计算，该函数基于序列二次规划(SQP)算法[7].

目前，SQP 方法是公认的处理非线性规划问题的最有效方法之一[8]. 其实质是运用 Kuhn-Tucker 最优化条件所形成的非线性方程进行迭代计算，而这一迭代过程恰好可以用求解相应的二次规划问题替代，故原问题的求解过程转化为求解一个序列二次规划的问题[9].

对此多参数非线性优化问题，要想得到一个较好的“全局”最优解，其初始点的选择至关重要.

3　计算初始点

对复杂优化问题的求解，理想情况是给定的初始点在全局最优解附近. 分析测量模型跟理想圆锥模型的差别，发现轴线的偏转是问题的关键. 因此，本文采用多步拟合的方法计算初始点.

首先拟合每个测量圆截面，获得测量位置的圆心和半径；通过圆心坐标，采用空间直线拟合的方法得到轴线方程；通过坐标变换，把所有的测量数据转换到一个平面坐标系下，拟合出母线，它与轴线的夹角即为半锥顶角.

3.1　拟合圆

图 3 为测量圆截面示意图，折线表示测量点的连线，虚线表示使用自适应方法拟合获得的理想圆.

设圆方程为

$$(X - O_X)^2 - (Y - O_Y)^2 = R^2 \tag{7}$$

则此优化问题的数学模型为

$$\min\,(\max|AB|)$$

优化目标函数

$$|AB| = |OB| - |OA| = \sqrt{(X-O_X)^2+(Y-O_Y)^2} - R \quad (8)$$

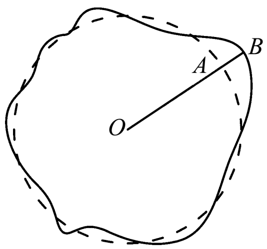

图3 圆截面

Fig. 3 The circular section

目标函数中含有3个优化参数，选用轴的设计尺寸作为优化初始点即可获得理想的最优解，即每个截面的拟合圆心和半径. 如图4所示，折线为实际轮廓，最外圆为极大半径圆，最内虚线圆为最小半径圆，中间虚线圆为自适应圆.

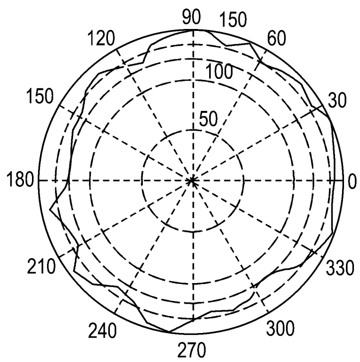

图4 圆截面拟合

Fig. 4 The fitting of circular section

3.2 拟合轴线

由第一步拟合出来的5个圆心坐标，通过空间直线拟合，就能得到圆锥轴线方程.

设空间轴线的方程

$$\frac{X-X_0}{l} = \frac{Y-Y_0}{m} = \frac{Z-Z_0}{n} \quad (9)$$

由空间点到直线距离公式：

$$d = \frac{\left\| \begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X_0-X_1 & Y_0-Y_1 & Z_0-Z_1 \\ l & m & n \end{matrix} \right\|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \quad (10)$$

用最小二乘法进行轴线拟合，则数学模型为

$$\min\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right)$$

目标函数 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$，为每个圆心坐标到拟合轴线距离的平方和. 取第1个截面的圆心和第5个截面的圆心确定的空间直线作为拟合初始值.

3.3 拟合母线计算半锥顶角

半锥顶角是轴线与母线之间的夹角，故需首先进行母线拟合.

依据测量点到拟合轴线的距离 d_i，将测量数据映射到过拟合轴线的任意一平面(O-$X'Y'$)中，映射方程为

$$\begin{cases} X' = d_i \\ Y' = z \end{cases} \quad (11)$$

把空间测量点映射到同一个平面内(如图5所示).

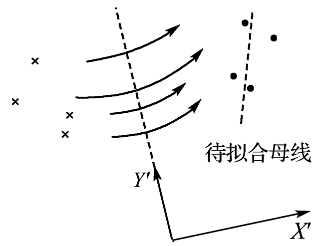

图5 数据点映射到同一个平面

Fig. 5 Mapping the data to the same plane

设拟合母线方程为

$$Y' = k_1 X' + k_2 \quad (12)$$

式中

$$k_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X'_i Y'_i - n\overline{X'}\,\overline{Y'}}{\sum_{i=1}^{n} X'^2_i - n(\overline{X'})^2} \quad (13)$$

$$k_2 = \overline{Y'} - k_1 \overline{X'} \quad (14)$$

在这个平面内，轴线方程

$$X = 0 \quad (15)$$

则半锥顶角

$$\gamma = \arctan k_1 \quad (16)$$

3.4 获得初始点的相关参数

如图6所示，$\tan\gamma = \dfrac{r_1}{|e|+|Zz|}$，则 $|e| = \dfrac{r_1}{\tan\gamma} - |Zz|$ (r_1 是轴最上面测量面的拟合半径)，因为在测试数据中 Zz 为负，所以 $|e| = \dfrac{r_1}{\tan\gamma} + Zz$，即锥顶点的 Z 坐标为 $\dfrac{r_1}{\tan\gamma} + Zz$，因此沿 Z 轴平移量 $e = -\left(\dfrac{r_1}{\tan\gamma} + Zz\right)$.

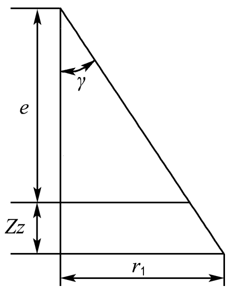

图 6　Z 轴平移量模型

Fig. 6　The model of Z-axis translation

对空间轴线方程 $\dfrac{X-X_0}{l}=\dfrac{Y-Y_0}{m}=\dfrac{Z-Z_0}{n}$，令上式 $Z=-e$，则 $X=X_0+\dfrac{l(-e-Z_0)}{n}$，$Y=Y_0+\dfrac{m(-e-Z_0)}{n}$，$c=-X=-X_0+\dfrac{l(e+Z_0)}{n}$（为沿 X 轴的平移量），$d=-Y_0+\dfrac{m(e+Z_0)}{n}$（为沿 Y 轴的平移量）.

单位化轴线的方向向量，令其为 $(l\quad m\quad n)^{\mathrm{T}}$，因为 Z 轴的向量为 $(0\quad 0\quad 1)^{\mathrm{T}}$，由新坐标值 = 旧坐标值 × 变换矩阵，可以列出以下等式：

$$(0\quad 0\quad 1)=(l\quad m\quad n)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos a & \sin a\\ 0 & -\sin a & \cos a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos b & 0 & -\sin b\\ 0 & 1 & 0\\ \sin b & 0 & \cos b\end{pmatrix}\qquad(17)$$

解方程，获得参数 a、b .

至此，圆锥拟合所需要的初始点参数全部计算得到，可以进行优化计算.

4　实际算例

圆锥零件的名义尺寸为中径 35.5 mm、锥度 1∶50、锥长 40 mm. 在零件表面选择 15 个截面作为测量面，将其分为 3 组，每组截面距离锥底面的高度 h 如表 1 所示.

使用三坐标测量机采集零件表面数据，每个截面采集 40 个点. 表 2 所示为第 1 组截面 4 所对应采集点的坐标数据.

使用本文优化方法，基于多步拟合的初始点评价圆锥的形状误差，结果记为 T_{f}. 再同时使用常规的最小二乘法，并且以设计的名义尺寸（中径 35.5 mm、锥度 1∶50、锥长 40 mm）作为初始点评价圆锥形状误差，结果记为 T_{f}^{0}. 比较结果如表 3 所示.

表 1　截面高度

Tab. 1　The height of cross section

	h/mm				
	截面 1	截面 2	截面 3	截面 4	截面 5
第 1 组	3	11	19	27	33
第 2 组	5	13	21	29	35
第 3 组	7	15	23	31	37

表 2　三坐标测量机的测量数据

Tab. 2　The measuring data of three-dimensional CMM

序号	X/mm	Y/mm	Z/mm
1	0.115 0	17.621 5	−27.000 2
2	−2.565 8	17.437 4	−27.001 1
3	−3.657 6	17.239 7	−27.002 5
4	−5.236 3	16.828 0	−27.001 4
5	−7.806 5	15.803 7	−27.002 5
6	−10.135 6	14.422 3	−27.003 4
7	−12.212 8	12.709 5	−27.003 8
8	−14.008 3	10.695 3	−27.004 7
9	−15.475 8	8.433 5	−27.005 3
10	−16.579 6	5.973 0	−27.005 2
11	−17.297 1	3.372 0	−27.005 6
12	−17.608 3	0.696 3	−27.005 9
13	−17.510 6	−2.001 0	−27.005 7
14	−17.002 4	−4.648 7	−27.005 6
15	−16.095 1	−7.187 4	−27.005 1
16	−14.804 2	−9.560 8	−27.005 1
17	−13.175 9	−11.712 5	−27.004 1
18	−11.237 9	−13.582 7	−27.003 5
19	−9.037 3	−15.120 1	−27.003 3
20	−6.616 9	−16.341 2	−27.002 2
21	−4.053 3	−17.156 7	−27.000 8
22	−1.392 3	−17.575 8	−27.000 8
23	1.302 1	−17.582 9	−26.999 6
24	3.965 2	−17.175 7	−26.999 1
25	6.538 6	−16.368 3	−26.997 5
26	8.957 7	−15.181 8	−26.997 2
27	11.161 9	−13.641 0	−26.996 6
28	13.112 7	−11.782 9	−26.996 0
29	14.759 1	−9.642 7	−26.995 2
30	16.054 0	−7.288 5	−26.994 7
31	16.976 5	−4.755 9	−26.993 4
32	17.501 2	−2.121 0	−26.994 1
33	17.620 0	0.573 0	−26.994 3
34	17.326 6	3.253 8	−26.995 0
35	16.627 8	5.856 7	−26.994 5
36	15.540 9	8.319 6	−26.995 1
37	14.091 0	10.586 1	−26.995 1
38	12.318 9	12.606 1	−26.994 7
39	10.252 1	14.338 9	−26.996 9
40	7.950 2	15.729 7	−26.995 8

表 3　结果比较

Tab. 3　The comparison of results

	T_f/mm	T_f^0/mm	$(T_f^0-T_f)$/mm
第 1 组	0.018 390	0.021 230	0.002 840
第 2 组	0.018 752	0.024 725	0.005 973
第 3 组	0.018 056	0.023 008	0.004 952

通过表 3 的比较发现，自适应法的评价结果均小于最小二乘法. 同时自适应法评价结果的标准差（0.000 28）小于最小二乘法评价结果的标准差（0.001 43），这表明针对同一圆锥不同截面的数据，最小二乘法评价结果比自适应法评价结果分散. 所以自适应法的评价结果重复性好、精度高.

5　结　论

（1）使用三坐标测量机获得的圆锥零件表面点坐标数据，通过坐标变换的方法建立了针对圆锥形状误差的自适应圆锥误差评定优化模型，较好地遵循了“最小条件原则”.

（2）通过多步拟合的方法得到搜索初始点，可使该优化模型在全局最优解处收敛. 实例验证表明，使用本文所述方法进行圆锥形状误差评定，可以得到重复性好、精度高的结果.

参考文献：

[1] 侯　宇，袁志文. 任意方位圆锥度误差的测量和评定[J]. 现代计量测试，1996(4)：16-19

[2] 田社平. 圆锥轮廓误差最小二乘评定方法[J]. 计量技术，2005(3)：25-27

[3] 王瑞康，张国雄. 三坐标测量机上实现圆锥度误差测量和评价[J]. 仪器仪表学报，1993，**14**(1)：1-7

[4] 王德伦，王淑芬，李　涛. 平面四杆机构近似运动综合的自适应方法[J]. 机械工程学报，2001，**37**(12)：21-26

[5] 刘　健，王晓明. 鞍点规划与形位误差评定[M]. 大连：大连理工大学出版社，1996

[6] 王宇华，范彦斌. 圆锥轮廓误差的最小区域评定方法[J]. 测试技术学报，2004，**18**(2)：147-150

[7] 褚洪生，杜增吉，阎金华. MATLAB 7.2 优化设计实例指导教程[M]. 北京：机械工业出版社，2007

[8] 王世怀，徐亦方，沈　复. 简约 Hesse 序列二次规划方法研究进展[J]. 石油大学学报，1997，**21**(4)：101-106

[9] 刘国华，程伟平，郑冠军. 序列二次规划法在多水源管网优化调度中的应用研究[J]. 水利学报，2003(2)：48-54

An adaptive method for evaluation of cone error

LIU　Bao-qing，　DONG　Hui-min*，　FU　Jie

（School of Mechanical Engineering，Dalian University of Technology，Dalian 116024，China）

Abstract：According to saddle point programming，a mathematical measuring model of cone error based on adaptive fitting method and minimum zone principle is established，which is solved by sequential quadratic programming. Since the global optimum is dependent of the initial point for this complex saddle point programming problem，a step by step fitting method is adopted to obtain a better one by analyzing the geometrical relation between the measurement model and the ideal cone model. The results of many examples indicate that based on initial points obtained with step by step fitting method and the adaptive fitting cone optimization model，a repeatable and high-precision evaluation results of the cone error can be achieved.

Key words：adaptive；saddle point programming；three-dimensional coordinate measuring machine；cone error；minimum zone principle