第51卷第2期
2011年3月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 51, No. 2
Mar. 2011

文章编号：1000-8608(2011)02-0221-05

结构可靠性指标计算的旋转梯度算法

杨 杰*， 赵德有

（大连理工大学 船舶工程学院，辽宁 大连 116024）

摘要： 结构可靠性指标计算是结构可靠度理论重要内容之一．在极限状态曲面非线性程度较高时，一次二阶矩算法经常不能收敛．为此提出了一种求解结构可靠性指标的旋转梯度算法．该算法以HL-RF算法为基础，迭代方向由迭代点处的负梯度方向与上一步迭代方向的线性组合确定．数值算例结果表明，该算法迭代格式简单，具有较强的适应性，即使极限状态曲面非线性程度很高，也能保证算法的收敛与稳定．

关键词： 可靠性指标；一次二阶矩；旋转梯度；收敛

中图分类号： TU311 **文献标志码：** A

0 引 言

结构可靠度的计算方法是可靠度理论中的一个重要内容，它涉及到结构可靠度理论在工程实际中的应用，以及结构的安全性和可靠性的正确评价．目前，在结构失效概率的计算中各种近似数值算法已经代替了求解随机变量联合概率密度多重积分的解析算法，其中，Hasofer-Lind Rackwitz-Fiessler(HL-RF)算法[1]是基于一次二阶矩理论求解可靠性指标的常用方法．但是由于一次二阶矩方法并没有考虑极限状态曲面的凹凸性，当极限状态方程的非线性程度较高时，会出现极限状态曲面与迭代方向没有交点而使迭代过程经常不收敛的现象[2]．

鉴于此，一些学者开始提出用修正方法来解决迭代求解不收敛的问题．贡金鑫[3]提出了有限步长迭代算法，该方法计算简单，在一定程度上克服了一次二阶矩验算点方法的缺点．但其收敛与否和步长的选取有关，当极限曲面的曲率很小，而步长远大于极限曲面的曲率半径时，该方法不收敛，且步长的选择需要靠试算，这给工程计算带来了很大的不便．文献[4～7]给出了不同的改进算法与公式，但在解决非线性程度较高时的不收敛问题上，各方法都有其局限性，改进效果并不明显．亢战等[8]针对极限状态方程非线性情况较高时可能存在不收敛的问题，提出一个检测严重迂回振荡的判据，在一定程度上解决了迭代不收敛的问题，但也涉及到步长的选取或预先指定参数值，并不具有广泛的适用性．

此外，文献[9～12]采用高次高阶矩方法来解决可靠性指标计算的收敛与精度问题．这类方法虽然能够提高一定的计算精度，但计算步骤较为繁琐，计算成本也大幅度提高．

本文基于可靠性指标的几何原理，提出一种更加有效的旋转梯度迭代算法，并对其有效性和可行性进行验证．

1 结构可靠性指标及其数学模型

设结构极限功能函数为

$$Z = G(\boldsymbol{x}) = G(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{1}$$

式中：$x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$为结构的基本随机变量．

对于相互独立的正态分布随机向量$\boldsymbol{x}$，将其转换成标准随机向量形式，得到标准正态分布向量$\boldsymbol{y} = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)^{\mathrm{T}}$，即

$$y_i = (x_i - \mu_i)/\sigma_i; i = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

其中μ_i和σ_i分别为第i个随机变量x_i的均值和标准差．

相应地，结构功能函数可以转换到标准正态空间中，即可表示为

收稿日期： 2009-03-11； **修回日期：** 2010-12-11.
作者简介： 杨 杰*(1979-)，女，博士，E-mail:jy_1003@163.com.

$$Z = G(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{B})) = g(\boldsymbol{y}) \quad (3)$$

式中：$\boldsymbol{y} = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)^{\mathrm{T}}$，其中 y_i 为相互独立的标准正态变量，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Tx} + \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{T}$ 为转换矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为常数向量，$\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 皆可由式(2) 推导得到.

根据结构可靠性指标 β 的几何含义，可靠性指标的获得就是在标准正态空间中，在功能函数面 $g(\boldsymbol{y}) = 0$ 上寻找一点 $\boldsymbol{y}$，使其与坐标原点的距离最短. 由此，可以得到可靠性指标计算的优化模型：

$$\begin{aligned} &\beta = \min \quad \sqrt{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} \\ &\text{s.t.} \qquad g(\boldsymbol{y}) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

于是，可靠性指标 β 的计算转化为求这个最短距离的问题，求解这一优化问题的方法很多[13~15]，相比较其他的优化方法，HL-RF 算法具有存储量小、迭代次数少等优点. 一般情况下，这种方法能保证可靠性指标计算的收敛，但如前文所述，有必要提出更有效的算法，以适用于具有高非线性功能函数的可靠性指标问题的求解.

2 可靠性指标的旋转梯度算法

由于 Rosenblatt 变换[16]可将非正态变量变换为标准正态随机变量，可假定所有的结构随机变量均服从标准正态分布. 对于式(4)条件极值问题本文提出如下算法.

设 $\boldsymbol{y}^{(k)}$ 是在标准正态空间中第 k 次迭代得到的点，令 $k+1$ 次迭代点 $\boldsymbol{y}^{(k+1)}$ 到原点距离为 $\beta^{(k+1)}$，选取迭代方向为 $\boldsymbol{s}^{(k+1)}$，则有

$$\boldsymbol{y}^{(k+1)} = \beta^{(k+1)}\boldsymbol{s}^{(k+1)} \quad (5)$$

在 HL-RF 算法中，迭代方向 $\boldsymbol{s}^{(k+1)}$ 是选取极限状态曲面上点 $\boldsymbol{y}^{(k)}$ 处的负梯度方向，即

$$\boldsymbol{s}^{(k+1)} = -\nabla g(\boldsymbol{y}^{(k)})$$

在无约束优化方法中，负梯度方向是使函数值下降最快的方向，假设函数用 $f(\boldsymbol{x})$ 表示，那么新迭代点迭代方向满足 $\nabla^{\mathrm{T}} f(\boldsymbol{x}^{(k+1)}) \nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)}) = 0$，即迭代点的相邻两次移动方向彼此正交，对于有约束的情况，则要求每次迭代点都要在可行域内. 在可靠性指标计算中，可靠性指标迭代的约束是要满足迭代点在曲面上. 在图 1 中，m_1、m_2 方向分别是迭代点 $\boldsymbol{y}^{(k)}$、$\boldsymbol{y}^{(k+1)}$ 处的负梯度方向，$m_1 \parallel m'_1$，$m_2 \parallel m'_2$. 从图中可以看出，由于选择负梯度方向 m_2 作为下一次迭代方向，使得 $\angle m'_2 O m'_1$ 过大，导致直线 m'_2 与曲面 $g(\boldsymbol{y}) = 0$ 没有交点. 即使能够找到直线与极限状态曲面的交点，也可能因步长选择不当致使迭代出现两边摆动，不能收敛到真正的收敛点.

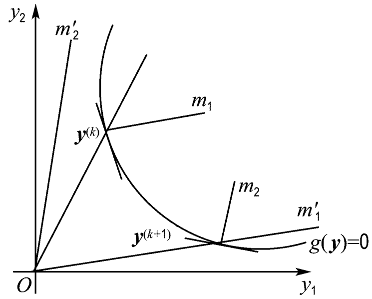


图 1 可靠性指标迭代过程不收敛示意图

Fig. 1 Schematic diagram of divergence iteration process for reliability index

本文构造了新的迭代方向，定义为旋转梯度方向，即将 $\boldsymbol{y}^{(k)}$ 点处的负梯度方向旋转一个角度 φ，φ 的大小由 $-\nabla g(\boldsymbol{y}^{(k)})$ 和 $\boldsymbol{s}^{(k)}$ 的线性组合确定，如图 2 所示. 从图中可以看出，新构造的迭代方向 $\boldsymbol{s}^{(k+1)}$ 介于上一次迭代方向 $\boldsymbol{s}^{(k)}$ 和负梯度的迭代方向 $-\nabla g(\boldsymbol{y}^{(k)})$ 之间，新的迭代方向通过调节旋转系数 μ_k 来调整，μ_k 的取值主要考虑了相邻两迭代点处增长率的相对大小. μ_k 越大，调节的角度 φ 越大，也即减少了点 $\boldsymbol{y}^{(k)}$ 到点 $\boldsymbol{y}^{(k+1)}$ 的绝对步长. 调整后的迭代点不易形成振荡，从而保证收敛.

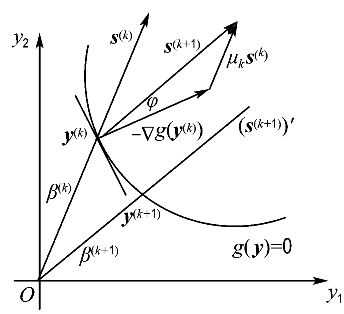


图 2 可靠性指标迭代过程示意图

Fig. 2 Schematic diagram of iteration process for reliability index

据此，旋转梯度方向 $\boldsymbol{s}^{(k+1)}$ 可由下式表示：

$$\boldsymbol{s}^{(k+1)} = -\nabla g(\boldsymbol{y}^{(k)}) + \mu_k \boldsymbol{s}^{(k)} \quad (6)$$

其中 μ_k 为旋转系数，且

$$\mu_k = \frac{\| \nabla g(\boldsymbol{y}^{(k)}) \|^2}{\| \nabla g(\boldsymbol{y}^{(k-1)}) \|^2} \quad (7)$$

从式(6) 可知，每步搜索方向是对 HL-RF 算法中选取的负梯度方向进行了修正，若系数

$\mu_k = 0$，本文算法与 HL-RF 算法是一致的.

确定迭代方向后，为求得结构可靠性指标，需采用迭代法. 为避免一维搜索，简化迭代过程，现将极限状态方程 $g(\boldsymbol{y}) = 0$ 在 $\boldsymbol{y}^{(k)}$ 点处作泰勒级数展开，并保留一次项得

$$g(\boldsymbol{y}^{(k)}) + \nabla^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{y}^{(k)})(\boldsymbol{y}^{(k+1)} - \boldsymbol{y}^{(k)}) = 0 \tag{8}$$

将式(5)代入到式(8)中，即可得到可靠性指标的显式表达式

$$\beta^{(k+1)} = \frac{\nabla^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{y}^{(k)})\boldsymbol{y}^{(k)} - g(\boldsymbol{y}^{(k)})}{\nabla^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{y}^{(k)})\boldsymbol{s}^{(k+1)}} \tag{9}$$

将式(9)代入式(5)，即得到如下迭代计算公式：

$$\boldsymbol{y}^{(k+1)} = \frac{\nabla^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{y}^{(k)})\boldsymbol{y}^{(k)} - g(\boldsymbol{y}^{(k)})}{\nabla^{\mathrm{T}} g(\boldsymbol{y}^{(k)})\boldsymbol{s}^{(k+1)}}\boldsymbol{s}^{(k+1)}$$

综合上面公式，本文算法的迭代步骤如下：

(1) 通过变换，将随机向量 $\boldsymbol{x}$ 变换为标准化正态随机向量 $\boldsymbol{y}$.

(2) 选取初始点 $\boldsymbol{y}^{(0)}$ 为原点，搜索方向 $\boldsymbol{s}^{(0)}$ 选取初始点 $\boldsymbol{y}^{(0)}$ 处的负梯度方向，由式(5)计算 $\boldsymbol{y}^{(1)}$.

(3) 由式(6)计算迭代方向 $\boldsymbol{s}^{(k+1)}$，旋转系数由式(7)计算.

(4) 由式(9)计算 $\beta^{(k+1)}$.

(5) 由式(5)计算 $\boldsymbol{y}^{(k+1)}$.

(6) 若 $\| \boldsymbol{y}^{(k+1)} - \boldsymbol{y}^{(k)} \| < \varepsilon$，$\varepsilon$ 为规定的允许误差，则停止迭代；否则返回步骤(3).

需要指出的是，由于以上算法重新定义了验算点搜索的迭代方向，有时会增加迭代步数，但迭代最终能保证收敛，而且不需要试算或人为地设定参数值，因此，从总体上提高了计算的效率和可操作性.

3　数值算例

为校验本文算法的收敛性和稳定性，下面选取几种不同形式的极限状态函数进行可靠性指标的迭代计算. 选取允许误差 $\varepsilon = 0.001$.

例 1　某悬臂梁结构功能函数[14]为 $g(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 - 2\,000 x_3$，其中随机变量 x_1、x_2 服从正态分布，随机变量 x_3 服从对数正态分布. 变量的均值和标准方差 (μ, σ) 分别为(0.32，0.032)、(1 400 000，70 000)、(100，40). 表 1 列出了各种计算方法的结果，数值结果表明了本文迭代算法的正确性和有效性.

表 1　结果比较

Tab. 1　Comparison of results

本文算法		文献[15]		文献[14]	
β	迭代次数	β	迭代次数	β	迭代次数
2.191	5	2.191	4	2.191	6

例 2　已知功能函数[17]取为

$$g(\boldsymbol{x}) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_2^3 - 18$$

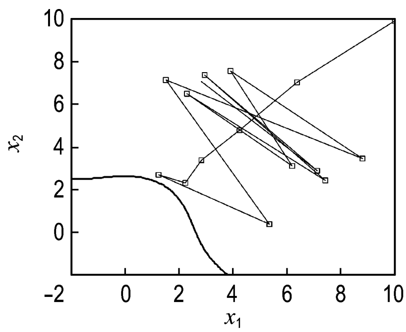
其中 x_1、x_2 统计特征如表 2 所示.

表 2　随机变量统计特征

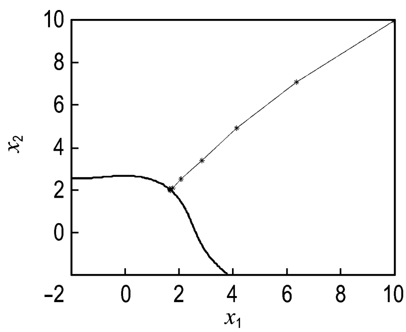
Tab. 2　Statistics of random variables

随机变量	分布类型	均值	标准差
x_1	正态分布	10.0	5
x_2	正态分布	9.9	5

本算例极限状态方程为三次多项式，极限状态曲线在验算点附近曲率比较大，而且它的外法向沿曲线改变较为剧烈. 图 3(a)为经典 HL-RF 算法的迭代过程，算法不收敛. 图 3(b)为本文方法迭代过程，收敛结果为 $\beta = 2.298\,3$，验算点坐标为(1.685 5，1.968 0). 表 3 列出了两种算法的前 16 步迭代过程结果. 从表中数据对比可以看出，本文算法具有较快的收敛速度.



(a) HL-RF 算法



(b) 本文算法

图 3　迭代过程比较

Fig. 3　Comparison of iteration history

表 3 迭代点比较

Tab.3 Comparison of iteration points

迭代步	本文方法		HL-RF 方法	
	x_1	x_2	x_1	x_2
1	6.366 5	7.025 1	6.366 5	7.025 1
2	4.160 5	4.872 7	4.255 2	4.766 6
3	2.868 8	3.352 4	2.836 3	3.387 0
4	2.091 3	2.476 9	2.253 4	2.311 8
5	1.775 0	2.048 9	1.250 8	2.699 4
6	1.668 6	1.993 7	5.341 0	0.365 6
7	1.705 4	1.947 9	1.525 8	7.160 6
8	1.676 2	1.978 1	8.808 9	3.450 1
9	1.687 5	1.965 9	3.908 1	7.548 8
10	1.685 5	1.968 0	6.181 5	3.116 3
11			2.289 7	6.509 8
12			7.434 8	2.443 3
13			2.972 3	7.355 8
14			7.126 8	2.897 8
15			2.822 8	7.084 3
16			7.109 6	2.729 2
⋮			⋮	⋮

例 3 某结构指数形式的极限状态函数为[3]

$$g(\boldsymbol{x})=(1/P)\ln\{\exp[P(1+x_1-x_2)]+\exp[P(5-5x_1-x_2)]\}$$

其中 x_1、x_2 均为服从标准正态分布的随机变量. P 为一参数, P 分别取 1 和 10 时极限状态曲线如图 4 所示.

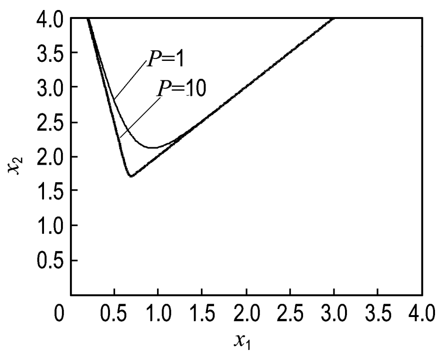


图 4 $P=1$ 和 $P=10$ 时极限状态曲线

Fig.4 Limited state curves for $P=1$ and $P=10$

由图可见,在此两种情况下极限状态方程呈高度非线性. 本例用 HL-RF 算法求解不收敛. 本算法得到与文献[3]一致的结果,如表 4 所示.

当结构极限状态方程非线性程度不同时,文献[3]需要给参数 λ 设定不同的数值,而本文方法对于不同的非线性程度,均能给出较好的计算结果,见表 5.

表 4 可靠度指标值

Tab.4 Reliability index

P	可靠度		
	HL-RF 算法	文献[3]	本文算法
1	—	2.299 5 ($\lambda=0.1$)	2.299 5
10	—	1.845 5 ($\lambda=0.02$)	1.845 5

表 5 参数 P 取不同值时的计算结果

Tab.5 Computational results for different parameter P

P	x_1	x_2	β	收敛迭代步
0.1	2.625 4	6.316 1	6.840 0	7
0.5	1.060 7	2.595 6	2.804 0	10
0.8	0.913 3	2.247 1	2.425 6	15
1.0	0.864 1	2.131 0	2.299 5	17
3.0	0.732 8	1.821 3	1.963 2	40
5.0	0.706 1	1.759 6	1.895 9	59
8.0	0.691 8	1.724 5	1.858 1	87
10.0	0.686 2	1.713 2	1.845 5	112
15.0	0.679 5	1.697 7	1.828 7	157

4 结 论

极限状态方程的非线性程度较高时,可靠性指标计算常常不收敛. 本文提出了旋转梯度可靠性指标算法,通过迭代点处最大增长率的大小来控制迭代方向. 数值算例结果表明,该算法能保证迭代的收敛性,而且具有较好的计算精度,由于不需要试算或人为设定参数值,更适用于复杂结构可靠度的分析.

参考文献:

[1] HASOFER A M, LIND N C. Exact and invariant second moment code format [J]. **Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE**, 1974, **100**(EM1):111-121

[2] 贡金鑫. 工程结构可靠度计算方法[M]. 大连:大连理工大学出版社, 2003

[3] 贡金鑫. 结构可靠性指标求解的一种新的迭代方法[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, **12**(3):369-373

[4] 吴 狄,关 鼎. 一种结构可靠性指标的搜索方法[J]. 计算力学学报, 2005, **22**(6):788-791

[5] 蒋友宝,冯 健,孟少平. 求解结构可靠性指标的线性可行方向算法[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2006, **36**(2):312-315

[6] 李　刚，程耿东．基于性能的结构抗震设计——理论、方法与应用[M]．北京：科学出版社，2004

[7] LEE Jae-ohk，YANG Young-soon，RUY Won-sun. A comparative study on reliability-index and target-performance-based probabilistic structural design optimization [J]. **Computers and Structures**，2002，**80**(3-4)：257-269

[8] 亢　战，罗阳军．计算结构可靠度指标的修正迭代算法[J]．工程力学，2008，**25**(11)：20-26

[9] ZHAO Yan-gang，ONO T. Moment methods for structural reliability [J]. **Structural Safety**，2001，**23**(1)：47-75

[10] 李云贵，赵国藩．结构可靠度的四阶矩分析法[J]．大连理工大学学报，1992，**32**(4)：455-459
(LI Yun-gui，ZHAO Guo-fan. Reliability analysis of structures based on maximum entropy theory [J]. **Journal of Dalian University of Technology**，1992，**32**(4)：455-459)

[11] TVEDT L. The distribution of quadratic forms in normal space-application to structural reliability [J]. **Journal of Engineering Mechanics**，1990，**116**(6)：1183-1197

[12] DER KIUREGHIAN A，LIN Hong-zong，HWANG Shyh-jiann. Second-order reliability approximation [J]. **Journal of Engineering Mechanics**，1984，**113**(8)：1208-1225

[13] 张子明．用 Lagrange 乘子法求解结构可靠性指标[J]．工程力学，1994，**11**(1)：90-98

[14] SANTOSH T V，SARAF R K，GHOSH A K，*et al*. Optimum step length selection rule in modified HL-RF method for structural reliability [J]. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**，2006，**83**(10)：742-748

[15] LIU Pei-ling，DER KIUREGHIAN A. Optimization algorithms for structural reliability [J]. **Structural Safety**，1991，**9**(3)：161-177

[16] ROSENBLATT M. Remarks on a multivariate transformation [J]. **The Annals of Mathematical Statistics**，1952，**23**(3)：470-472

[17] KAYMAZ I M C A. A response surface method based on weighted regression for structural reliability analysis [J]. **Probabilistic Engineering Mechanics**，2005，**20**(1)：11-17

Rotation gradient algorithm for calculating structural reliability index

YANG Jie*，ZHAO De-you

(Department of Naval Architecture，Dalian University of Technology，Dalian 116024，China)

Abstract：Computation of the structural reliability index is one of the important factors in structural reliability theory. First-order second-moment algorithm often behaves discretely when the limit state surface is highly nonlinear. So rotation gradient algorithm is presented for computing the structural reliability. The method is based on Hasofer-Lind Rackwitz-Fiessler (HL-RF) algorithm，whose direction vector is determined by the linear combination of the negative gradient direction and former iteration direction vector. The numerical results show that the rotation gradient algorithm possesses the advantages of simplified iteration format and high convergence robust. The algorithm can ensure convergence and stability even the limit state surface is highly nonlinear.

Key words：reliability index；first-order second-moment；rotation gradient；convergence