文章编号:1000-8608(2011)03-0368-07

修形斜齿轮啮合性质及误差影响分析

尚振国,王德伦*

(大连理工大学 机械工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要:将制造安装误差和齿面修形引入齿轮传动坐标系统,建立了修形斜齿轮的齿面方程, 通过坐标变换矩阵,将固连于齿轮上的动坐标系中的齿面方程转换到固连于机架上的固定坐 标系中,建立了满足连续相切接触条件的啮合方程.通过调用 Matlab 有约束非线性优化函数 将啮合方程的求解问题转化为两齿面间距离最短及单位法向量偏差最小的优化问题,分析了 多种修形方式及制造安装误差对修形斜齿轮接触轨迹和传递误差的影响.分析结果表明,所 提的修形方式可以改善轮齿啮合状态,对制造安装误差具有较好的适应性.

关键词:齿轮修形;齿面方程;接触迹线;传递误差

中图分类号: TH132.41 文献标志码: A

0 引 言

随着风力发电增速器、船舶推进器等大功率 齿轮传动装置向高速化、大型化、重载化和环保化 方向发展,齿轮传动装置的振动和噪声问题日益 突出,齿轮修形技术成为解决齿轮传动装置的振 动和噪声的有效途径.文献[1]总结了直齿轮齿廓 修形理论.Litvin 等应用轮齿接触分析技术研究 了齿廓和齿向采用二次曲线的双鼓形修形斜齿轮 的啮合区域及传动误差^[2~4].方宗德、常山等应用 柔度系数法,并以荷载均布和传递误差最小为目 标函数,以数学规划法确定齿轮修形参数^[5~8]. Wagaj等采用有限元接触分析技术,以修形量、修 形长度、齿向修鼓量等为参数,计算了不同参数下 2D修形和 3D 修形齿轮弯曲应力和接触应力的 变化情况^[9].

本文在考虑制造、安装误差等实际啮合条件 下,分析一种保留部分渐开线齿面的局部修形斜 齿轮的啮合轨迹及安装误差对啮合轨迹的影响.

1 含误差的齿面啮合方程

1.1 坐标系

如图 1 所示,用 3 个坐标系表示被动齿轮实际齿面.坐标系 S₆(O₆-x₆y₆z₆)与理论齿面固



图1 实际齿面坐标系

Fig. 1 Coordinate systems of real tooth surface

收稿日期: 2009-02-13; 修回日期: 2010-11-25.

基金项目:"八六三"国家高技术发展计划资助项目(2006AA04Z101).

作者简介:尚振国(1969-),男,博士生;王德伦*(1958-),男,教授,博士生导师,E-mail:dlunwang@dlut.edu.cn.

连,坐标系 $S_4(O_4 - x_4 y_4 z_4)$ 与实际齿面固连,坐标 系 $S_2(O_2 - x_2 y_2 z_2)$ 为随被动齿轮一起转动的动坐 标系,引入固定坐标系 $S_t(O_t - x_t y_t z_t)$ 与机架固 连. $S_6 \rightarrow S_4$ 的坐标变换矩阵 M_{46} 代表实际齿面与 理论齿面之间的误差,包括齿形误差、受载变形及 几何修形,用沿接触点公法线距离 δ_2 表示,对应 的齿轮转角误差用 $\Delta \phi_2$ 表示; $S_4 \rightarrow S_2$ 的坐标变换 矩阵 M_{24} 代表实际齿轮轴线与理论齿轮轴线之间 的平行度误差及位置误差(中心距误差); $S_2 \rightarrow S_t$ 的坐标变换矩阵 M_{12} 代表在固定坐标系 S_t 中的曲 面族.

同样引入坐标系 S_1 、 S_3 、 S_5 表示主动齿轮实际齿面.

在初始位置, S_1 与 S_f 重合, x_2 与 x_f 同向, y_2 与 y_f 重合, z_2 与 z_f 同向,坐标原点 O_2 、 O_f 间的距离 等于齿轮副中心距.

1.2 齿面啮合方程

齿面 Σ_1 和 Σ_2 在固定坐标系 S_f 中的曲面族方程为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{f}^{(1)}(\theta_{1},\varphi_{1},\psi_{1}) = \mathbf{M}_{f1}\mathbf{M}_{13}\mathbf{M}_{35}\mathbf{r}_{5}^{(1)}(\theta_{1},\varphi_{1}) \\ \mathbf{r}_{f}^{(2)}(\theta_{2},\varphi_{2},\psi_{2}) = \mathbf{M}_{f2}\mathbf{M}_{24}\mathbf{M}_{46}\mathbf{r}_{6}^{(2)}(\theta_{2},\varphi_{2}) \end{cases}$$
(1)

如图 1 所示,齿面 Σ_2 的各坐标变换矩阵如下:

$$\mathbf{M}_{12}(\psi_{2}) = \begin{pmatrix} \cos\psi_{2} & -\sin\psi_{2} & 0 & 0\\ \sin\psi_{2} & \cos\psi_{2} & 0 & a\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(2)
$$\mathbf{M}_{24}^{(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos(-\Delta\gamma_{x}^{(2)}) & -\sin(-\Delta\gamma_{x}^{(2)}) & 0\\ 0 & \sin(-\Delta\gamma_{x}^{(2)}) & \cos(-\Delta\gamma_{x}^{(2)}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(3)
$$\mathbf{M}_{24}^{(y)} = \begin{pmatrix} \cos(\Delta\gamma_{y}^{(2)}) & 0 & \sin(\Delta\gamma_{y}^{(2)}) & \Delta a_{x}^{(2)} \\ 0 & 1 & 0 & \Delta a_{y}^{(2)} \\ -\sin(\Delta\gamma_{y}^{(2)}) & 0 & \cos(\Delta\gamma_{y}^{(2)}) & \Delta a_{z}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(4)
$$\mathbf{M}_{24} = \mathbf{M}_{24}^{(x)} \mathbf{M}_{24}^{(y)}$$
(5)
$$\mathbf{M}_{46} = \begin{pmatrix} \cos(\Delta\psi_{2}) & -\sin(\Delta\psi_{2}) & 0 & 0\\ \sin(\Delta\psi_{2}) & \cos(\Delta\psi_{2}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(6)

式中:a 为齿轮副中心距; ϕ_1 、 ϕ_2 为主、被动齿轮转 角; $\Delta \gamma_x^{(2)}$ 、 $\Delta \gamma_y^{(2)}$ 为绕 x_2 轴和 y_2 轴偏斜角度; $\Delta a_x^{(2)}$ 、 $\Delta a_y^{(2)}$ 、 $\Delta a_z^{(2)}$ 为沿 x_2 、 y_2 、 z_2 3个坐标轴的位 置误差.

同样地,可以得到齿面 Σ_1 的坐标变换矩阵 M_{f1} 、 M_{13} 、 M_{35} ,这里不再赘述.

齿面 Σ_1 和 Σ_2 在固定坐标系 S_f 中的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}_{f}^{(1)}(\theta_{1},\varphi_{1},\psi_{1}) = \boldsymbol{L}_{f1}\boldsymbol{L}_{13}\boldsymbol{L}_{35}\boldsymbol{n}_{5}^{(1)}(\theta_{1},\varphi_{1})$$
(7)
$$\boldsymbol{n}_{f}^{(2)}(\theta_{2},\varphi_{2},\psi_{2}) = \boldsymbol{L}_{f2}\boldsymbol{L}_{24}\boldsymbol{L}_{46}\boldsymbol{n}_{6}^{(2)}(\theta_{2},\varphi_{2})$$
(7)
$$\boldsymbol{n}_{5}^{(1)} = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}_{5}^{(1)}}{\partial \theta_{1}} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}_{5}^{(1)}}{\partial \varphi_{1}}}{\left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}_{5}^{(1)}}{\partial \theta_{1}} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}_{5}^{(1)}}{\partial \varphi_{1}} \right\|}$$
(8)
$$\boldsymbol{n}_{6}^{(2)} = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}_{6}^{(2)}}{\partial \theta_{2}} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}_{6}^{(2)}}{\partial \varphi_{2}}}{\left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}_{6}^{(2)}}{\partial \theta_{2}} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}_{6}^{(2)}}{\partial \varphi_{2}} \right\|}$$

L为各坐标系间的坐标变换矩阵,由对应 M 矩阵 去掉最后1行和最后1列得到.

齿面 Σ_1 和 Σ_2 在固定坐标系 S_f 中任意瞬时连续相切接触的条件为

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{f}^{(1)}(\theta_{1},\varphi_{1},\psi_{1}) = \boldsymbol{r}_{f}^{(2)}(\theta_{2},\varphi_{2},\psi_{2}) \\ \boldsymbol{n}_{f}^{(1)}(\theta_{1},\varphi_{1},\psi_{1}) = \boldsymbol{n}_{f}^{(2)}(\theta_{2},\varphi_{2},\psi_{2}) \end{cases}$$
(9)

方程组(9)称为含误差的齿面啮合方程[10].

如果接触点位于齿面的边缘,那么面和面接 触将变成线和面接触. 假设接触点位于线 $L\varphi^{(2)} = r_6^{(2)}(\theta_2, \varphi_{20})$ 上,则线 $L\varphi^{(2)}$ 的切线与法向量 $n_f^{(1)}$ 垂 直,方程组(9) 变为

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{f}^{(1)}(\theta_{1},\varphi_{1},\psi_{1}) = \boldsymbol{r}_{f}^{(2)}(\theta_{2},\varphi_{20},\psi_{2}) \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}_{f}^{(2)}(\theta_{2},\varphi_{20},\psi_{2})}{\partial \theta_{2}} \cdot \boldsymbol{n}_{f}^{(1)}(\theta_{1},\varphi_{1},\psi_{1}) = 0 \end{cases}$$
(10)

方程组(9)、(10)包括两个矢量方程,共有6 个未知数(θ_1 , φ_1 , ϕ_1 , θ_2 , φ_2 , ϕ_2),但只能生成5个 标量方程,因为 $\| \mathbf{n}_{f}^{(1)} \| = \| \mathbf{n}_{f}^{(2)} \|$.如果给定主 动齿轮转角 ϕ_1 ,就可以求出其他5个参数 $\theta_1(\phi_1)$ 、 $\varphi_1(\phi_1)$ 、 $\theta_2(\phi_1)$ 、 $\varphi_2(\phi_1)$ 、 $\phi_2(\phi_1)$.

1.3 接触迹线和传递误差

接触迹线:如图 2 所示,主、被动齿轮接触点的轨迹,称为接触迹线(contact path),用符号 P。 表示.

接触迹线在齿面 Σ_1 上表示如下:

$$\boldsymbol{P}_{c} = \boldsymbol{r}_{1}(\theta_{1}(\psi_{1}), \varphi_{1}(\psi_{1})) \qquad (11)$$

传递误差:如图 3 所示,被动齿轮实际啮合位置与理论啮合位置之差,称为传递误差 (transmission error),用符号 *E*_t表示.

$$E_{t} = \psi_{2}(\psi_{1}) - \frac{z_{1}}{z_{2}}\psi_{1}$$
(12)



图 2 接触迹线示意图 Fig. 2 Schematic plan of contact path



Fig. 3 Schematic plan of transmission error

2 齿面方程

令直角坐标系 $S_1(O_1 - x_1 y_1 z_1)$ 的坐标原点取 在轮齿中间截面与齿轮轴线的交点上, y_1 轴通过 节点 p, z_1 轴沿齿轮轴线方向,如图 4 所示.齿面 Σ_1 的参数方程可以表示成

$$\mathbf{r}_1(\theta_1,\varphi_1) = (x_1(\theta_1,\varphi_1) \quad y_1(\theta_1,\varphi_1) \quad z_1(\theta_1,\varphi_1))$$
(13)

$$\begin{cases} x_{1}(\theta_{1},\varphi_{1}) = -q_{s1}(\theta_{1},\varphi_{1})\cos(\alpha_{t} + \theta_{1} + \varphi_{1}) \\ \varphi_{1}) + r_{b1}\sin(\alpha_{t} + \theta_{1} + \varphi_{1}) \\ y_{1}(\theta_{1},\varphi_{1}) = q_{s1}(\theta_{1},\varphi_{1})\sin(\alpha_{t} + \theta_{1} + \varphi_{1}) \\ \varphi_{1}) + r_{b1}\cos(\alpha_{t} + \theta_{1} + \varphi_{1}) \\ z_{1}(\theta_{1},\varphi_{1}) = \frac{P_{1}}{2\pi}\varphi_{1} \\ q_{s1}(\theta_{1},\varphi_{1}) = q_{o1} + r_{b1}\theta_{1} + S_{1}(\theta_{1},\varphi_{1}); \\ q_{o1} = r_{b1}\tan\alpha_{t}$$
(15)

其中 θ_1 为渐开线发生线滚过的角度,当发生线通过 节点p时, $\theta_1 = 0$,因此 $- \tan \alpha_t \leq \theta_1 \leq \tan \alpha_{atl} - \tan \alpha_t$, α_t 为端面节圆压力角, α_{atl} 为端面齿顶圆压 力角; φ_1 为端面截形的旋转角, $-\frac{\pi b}{P_1} \leqslant \varphi_1 \leqslant \frac{\pi b}{P_1}$, b为齿轮宽度, P_1 为螺距; r_{b1} 为基圆半径; $S_1(\theta_1, \varphi_1)$ 为齿面 Σ_1 的修形曲线方程^[11].



图 4 主动齿轮坐标系

Fig. 4 Coordinate system of driving gear

同样地,在直角坐标系 $S_2(O_2 - x_2 y_2 z_2)$ 中齿 面 Σ_2 的参数方程可以表示成

$$\boldsymbol{r}_{2}(\theta_{2},\varphi_{2}) = (x_{2}(\theta_{2},\varphi_{2}) \quad y_{2}(\theta_{2},\varphi_{2}) \quad \boldsymbol{z}_{2}(\theta_{2},\varphi_{2}))$$
(16)

$$\begin{cases} x_{2}(\theta_{2},\varphi_{2}) = q_{s2}(\theta_{2},\varphi_{2})\cos(\alpha_{t} + \theta_{2} - \varphi_{2}) \\ \varphi_{2}(\theta_{2},\varphi_{2}) = -q_{s2}(\theta_{2},\varphi_{2})\sin(\alpha_{t} + \theta_{2} - \varphi_{2}) \\ y_{2}(\theta_{2},\varphi_{2}) = -q_{s2}(\theta_{2},\varphi_{2})\sin(\alpha_{t} + \theta_{2} - \varphi_{2}) \\ \varphi_{2}(\theta_{2},\varphi_{2}) = -q_{s2}\cos(\alpha_{t} + \theta_{2} - \varphi_{2}) \\ z_{2}(\theta_{2},\varphi_{2}) = \frac{P_{2}}{2\pi}\varphi_{2} \\ q_{s2}(\theta_{2},\varphi_{2}) = q_{02} + r_{b2}\theta_{2} + S_{2}(\theta_{2},\varphi_{2}); \\ q_{02} = r_{b2}\tan\alpha_{t}$$
(18)

其中 $S_2(\theta_2, \varphi_2)$ 为齿面 Σ_2 的修形曲线方程.

3 修形曲线方程

齿轮修形包括齿廓修形和齿向修形.齿廓修 形是指沿齿高方向从齿面上去除一部分材料,从 而改变齿廓形状.齿廓修形的参数包括修形量、修 形长度和修形曲线.

修形量是指齿廓上任意位置沿法向去除材料的厚度.齿顶和齿根部位修形量最大,如图 5 中 e_{r1}、e_{r1}所示(下标 t 表示齿顶,下标 r 表示齿根,下 同). 修形曲线表示齿廓上任意位置与对应修形量 的关系,如图 5 中 γ₁ 所示.

修形长度是指修形曲线在齿廓上的起始点至 齿顶或齿根终止点的距离,可以在齿轮副啮合线 上用起始点对应的发生线滚动角表示,如图 5 中 θ_{t1} 、 θ_{r1} 所示.

齿向修形包括螺旋角修形和齿端修鼓两种形式.齿向修形参数包括螺旋角修形量 $\Delta\beta$ (在齿面 方程中直接以螺旋角大小表示),齿向修形量 h_{11} 、 h_{12} ,齿向修形长度 b_{11} 、 b_{12} ,齿向修形曲线 ζ_1 ,如图 5 所示.

在这里,主动齿轮的齿顶和齿根采用二次抛物线修形^[12],修形起始点取单双齿啮合转换点 $\theta_{t1}, \theta_{t1}.$ 齿的两端也采用二次抛物线修形,修形长度 b_{11} 和 b_{12} 用对应的端面截形旋转角 $\varphi_{min1}, \varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{max1}$ 表示,如图 5 所示.这样,修形曲线方程可以表示成

$$S_{1}(\theta_{1},\varphi_{1}) = \begin{cases} -d_{11}(\theta_{1} - \theta_{t1})^{2} - c_{11}(\varphi_{1} - \varphi_{11})^{2}; \\ \theta_{t1} \leqslant \theta_{1} \leqslant \theta_{max1}, \varphi_{min1} \leqslant \varphi_{1} \leqslant \varphi_{11} \\ -d_{11}(\theta_{1} - \theta_{t1})^{2}; \\ \theta_{t1} \leqslant \theta_{1} \leqslant \theta_{max1}, \varphi_{11} \leqslant \varphi_{1} \leqslant \varphi_{12} \\ -d_{11}(\theta_{1} - \theta_{t1})^{2} - c_{12}(\varphi_{1} - \varphi_{12})^{2}; \\ \theta_{t1} \leqslant \theta_{1} \leqslant \theta_{max1}, \varphi_{12} \leqslant \varphi_{1} \leqslant \varphi_{max1} \\ -c_{11}(\varphi_{1} - \varphi_{11})^{2}; \\ \theta_{r1} \leqslant \theta_{1} \leqslant \theta_{t1}, \varphi_{min1} \leqslant \varphi_{1} \leqslant \varphi_{11} \\ 0; \quad \theta_{r1} \leqslant \theta_{1} \leqslant \theta_{t1}, \varphi_{11} \leqslant \varphi_{1} \leqslant \varphi_{12} \\ -c_{12}(\varphi_{1} - \varphi_{12})^{2}; \\ \theta_{r1} \leqslant \theta_{1} \leqslant \theta_{r1}, \varphi_{12} \leqslant \varphi_{1} \leqslant \varphi_{max1} \\ -d_{12}(\theta_{1} - \theta_{r1})^{2} - c_{11}(\varphi_{1} - \varphi_{11})^{2}; \\ \theta_{min1} \leqslant \theta_{1} \leqslant \theta_{r1}, \varphi_{min1} \leqslant \varphi_{1} \leqslant \varphi_{11} \\ -d_{12}(\theta_{1} - \theta_{r1})^{2}; \\ \theta_{min1} \leqslant \theta_{1} \leqslant \theta_{r1}, \varphi_{11} \leqslant \varphi_{1} \leqslant \varphi_{12} \\ -d_{12}(\theta_{1} - \theta_{r1})^{2} - c_{12}(\varphi_{1} - \varphi_{12})^{2}; \\ \theta_{min1} \leqslant \theta_{1} \leqslant \theta_{r1}, \varphi_{12} \leqslant \varphi_{1} \leqslant \varphi_{max1} \\ (19)$$

式中: d11、c11、d12、c12 是与修形量有关的常数,

$$d_{11} = rac{e_{ ext{t1}}}{(heta_{ ext{maxl}} - heta_{ ext{t1}})^2}, \ c_{11} = rac{h_{11}}{(arphi_{ ext{minl}} - arphi_{ ext{t1}})^2} \ d_{12} = rac{e_{ ext{r1}}}{(heta_{ ext{minl}} - heta_{ ext{r1}})^2}, \ c_{12} = rac{h_{12}}{(arphi_{ ext{maxl}} - arphi_{ ext{r2}})^2}$$



图 5 主动齿轮修形示意图

Fig. 5 Schematic plan of driving gear modification

被动齿轮齿廓采用直线修形,齿顶修形量 e₁₂ 等于零,齿根修形量 e₁₂ 最大.齿向采用抛物线修 形,各参数在啮合面上的表示如图 6 所示.修形曲 线方程可以表示成

$$S_{2}(\theta_{2},\varphi_{2}) = \begin{cases} d_{2}(\theta_{2} - \theta_{\max 2}) - c_{21}(\varphi_{2} - \varphi_{21})^{2}; \\ \varphi_{\min 2} \leqslant \varphi_{2} \leqslant \varphi_{21} \\ d_{2}(\theta_{2} - \theta_{\max 2}); \varphi_{21} \leqslant \varphi_{2} \leqslant \varphi_{22} \\ d_{2}(\theta_{2} - \theta_{\max 2}) - c_{22}(\varphi_{2} - \varphi_{22})^{2}; \\ \varphi_{22} \leqslant \varphi_{2} \leqslant \varphi_{\max 2} \end{cases}$$
(21)

$$c_{21} = \frac{h_{21}}{(\varphi_{\min 2} - \varphi_{21})^2}$$

$$d_2 = \frac{e_{r2}}{(\theta_{\max 2} - \theta_{\min 2})^2}$$

$$c_{22} = \frac{h_{22}}{(\varphi_{\max 2} - \varphi_{22})^2}$$
(22)



图 6 被动齿轮修形示意图



4 啮合方程的求解方法

4.1 啮合方程的等效解法

372

将方程组(9)、(10)的求解问题转化为齿面 Σ_1 和 Σ_2 间距离最短及单位法向量偏差最小的优 化问题,即

$$d_{\min} = \min(\| \mathbf{r}_{f}^{(1)}(\theta_{1}(\psi_{1}),\varphi_{1}(\psi_{1}),\psi_{1}) - \mathbf{r}_{f}^{(2)}(\theta_{2}(\psi_{1}),\varphi_{2}(\psi_{1}),\psi_{2}(\psi_{1})) \| + \| \mathbf{n}_{f}^{(1)}(\theta_{1},\varphi_{1},\psi_{1}) \times \mathbf{n}_{f}^{(2)}(\theta_{2},\varphi_{2},\psi_{2}) \|)$$
(23)

最优解($\theta_1^*(\phi_1), \varphi_1^*(\phi_1), \theta_2^*(\phi_1), \varphi_2^*(\phi_1), \phi_2^*(\phi_1), \phi_2^*(\phi_1),$

首先给定初值,再调用 Matlab 的有约束非线 性优 化 函 数 *fmincon*(),即可求得最优 解 $(\theta_1^*(\phi_1), \varphi_1^*(\phi_1), \theta_2^*(\phi_1), \varphi_2^*(\phi_1), \phi_2^*(\phi_1)).$

4.2 初值的确定

为了求解上述优化问题,在每一个啮合位置 需要给定一个初值($\theta_1^{\circ}(\phi_1), \varphi_1^{\circ}(\phi_1), \theta_2^{\circ}(\phi_1), \varphi_2^{\circ}(\phi_1), \varphi_2^{\circ}(\phi_1), \phi_2^{\circ}(\phi_1)$).由于齿面修形量很小,在这里,可 以将修形齿面仍看做是理想的渐开线螺旋面,则

$$\psi_2^0(\psi_1) = \frac{z_1}{z_2} \psi_1 \tag{24}$$

 $\theta_1^0(\phi_1), \varphi_1^0(\phi_1), \theta_2^0(\phi_1), \varphi_2^0(\phi_1)$ 采用逐点搜索法确 定. 将齿面参数 θ 在区间[$\theta_{\min}, \theta_{\max}$]进行 n_1 等分, φ 在区间[$\varphi_{\min}, \varphi_{\max}$]进行 n_2 等分. 设齿面 Σ_1, Σ_2 上 任一点 P的曲纹坐标分别为 $P_1(\theta_1^{(n)}, \varphi_1^{(m)}),$ $P_2(\theta_2^{(j)}, \varphi_2^{(j)}), 则 P_1 和 P_2$ 两点在固定坐标系 S_i 中 的距离为

5 算例分析

根据前面的理论分析,计算了一对齿轮副(见 表 1)在 5 组修形参数组合方式下(见表 2)的接触 迹线和传递误差,如图 7 和 8 所示,可见在第 V 组 修形参数情况下,接触迹线较为理想.因此将修形 参数固定为第 V 组,在轴线偏斜 $\Delta \gamma_x^{(2)}, \Delta \gamma_y^{(2)}$ 分别 为 3'情况下,考察了轴线平行度误差对接触迹线 和传递误差的影响,如图 9 和 10 所示.

表1 齿轮副几何参数

Tab. 1 Gear pair parameters

	齿数 <i>z</i>	螺旋角 β/(°)	模数 <i>m</i> _n / mm	压力角 α _n /(°)	齿宽 <i>b/</i> mm	中心距 a/ mm
主动齿轮	50	25.058 (右旋)	3	20	60	127.5
被动齿轮	27	25.041 (左旋)	3	20	60	127.5

表 2 修形参数

Tab. 2 Modification parameters 10⁻² mm

修形参 数组合	主动齿轮				被动齿轮			
	e_{t1}	$e_{\rm rl}$	h_{11}	h_{12}	e_{r2}	h_{21}	h_{22}	$\Delta \beta / $ (°)
Ι	0	0	0	0	0	0	0	0.017
П	2	2	0	0	0	0	0	0.017
Ш	2	2	2	2	0	0	0	0.017
IV	2	2	2	2	0	2	2	0.017
V	2	2	2	2	2	2	2	0.017

注:Δβ为螺旋角修形量



Fig. 7 Contact path





图 9 有轴线偏差情况下的接触迹线 Fig. 9 Contact path under axial error



图 10 有轴线偏差情况下的传动误差 Fig. 10 Transmission error under axial error

6 结果讨论

齿轮修形的主要目的是控制接触轨迹、调整 传递误差和增强对制造安装误差的适应性.如表 2 所示,修形参数组合 I 表示被动齿轮进行螺旋 角修形,而主动齿轮不修形,在这种情况下,齿轮 副沿轮齿边缘接触,传递误差近似呈线性分布,见 图 7、8 曲线修形参数组合 I.

修形参数组合 II 表示主动齿轮进行齿廓修 形,被动齿轮进行螺旋角修形,在这种情况下,接 触迹线由齿顶向齿面中间转移,可以消除齿顶边 缘接触现象,但齿端仍存在边缘接触现象,见图 7 曲线修形参数组合 II.

修形参数组合Ⅲ表示主动齿轮进行齿廓修形 和齿向修形,被动齿轮进行螺旋角修形,在这种情 况下,接触迹线由齿廓方向转向沿齿轮轴向方向, 可以消除齿轮端面边缘接触现象,见图 7 曲线修 形参数组合Ⅲ.

修形参数组合Ⅳ表示在修形参数组合Ⅲ基础

上,被动齿轮又进行轴向修形,修形效果也与修形 参数组合Ⅲ类似,见图7曲线修形参数组合Ⅳ.

修形参数组合 V 表示在修形参数组合 IV 基础 上,被动齿轮又进行齿廓修形,在这种情况下,接 触迹线进一步向齿面中间转移,接触迹线较为理 想,见图 7 曲线修形参数组合 V.

由图 8 可见,齿廓和(或)齿向修形以后,传递 误差曲线在啮入侧和啮出侧呈不对称抛物线分布 (啮出侧偏大),中间段近似呈线性分布.这样,在 受载情况下,有利于减少轮齿啮入和啮出几何干 涉,降低振动和噪声^[12].

由图 9 可见,采用修形参数组合 V 进行齿轮 修形以后,在存在轴线偏差的情况下,接触迹线变 化不大.

7 结 论

(1)主动齿轮采用齿顶和齿根二次抛物线修 形,被动齿轮采用齿根二次抛物线修形和螺旋角 修形,可以将接触迹线调整至齿面中间区域,使传 递误差曲线呈抛物线分布,有利于改善轮齿啮合 状态.

(2)采用前述修形方式,可以降低轮齿啮合对 制造和安装误差的敏感性,提高啮合稳定性.

参考文献:

- [1] HARIANTO J, HOUSER D R. A methodology for obtaining optimum gear tooth micro-topographies for noise and stress minimization over a broad operating torque range [J]. Gear Technology, 2008(7):42-55
- [2] LITVIN F L, LU J, TOWNSEND D, et al. Computerized simulation of meshing of conventional helical involute gears and modification of geometry
 [J]. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34(1): 123-147
- [3] LITVIN F L, CHEN N X, LU J, et al. Computerized design and generation of low-noise helical gears with modified surface topology [J].
 Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 1995, 117(2A):254-261

[4] LITVIN F L, FENG P H, LAGUTIN S A, et al.

Helical and spur gear drive with double crowned pinion tooth surfaces and conjugated gear tooth surfaces:US, 6205879[P/OL]. 2001-03-27. http://www.freepatentsonline.com/6205879.html

- [5]方宗德.斜齿轮齿面柔度矩阵与修形的有限元计算[J].航空动力学报,1994(9):242-244
- [6]方宗德. 修形斜齿轮的承载接触分析[J]. 航空动力 学报,1997(12):251-254
- [7]常山,徐振忠,霍肇波.斜齿圆柱齿轮瞬时啮合刚 度及齿廓修形的研究[J].热能动力工程,1997(4): 270-274
- [8]常山,徐振忠,李威,等.重载齿轮的最佳轮齿修形[J].热能动力工程,1995(5):330-333
- [9] WAGAJ P, KAHRAMAN A. Influence of tooth profile modification on helical gear durability [J].

Journal of Mechanical Design, 2002, 124(3):501-510

- [10] 王树人,齿轮啮合理论简明教程[M],1版,天津: 天津大学出版社,2005
- [11] UMEYAMA M, KATO M, INOUE K. Effects of gear dimensions and tooth surface modifications on the loaded transmission error of a helical gear pair
 [J]. Journal of Mechanical Design, 1998, 120(1): 119-125
- [12] LITVIN F L, FUENTES A, GONZALEZ-PEREZ
 I, et al. Modified involute helical gears: computerized design, simulation of meshing and stress analysis [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192 (33-34): 3619-3655

Analysis of modified helical gear meshing characteristics and error influence

SHANG Zhen-guo, WANG De-lun*

(School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Misalignment and gear modification were introduced to gear transmission coordinate system and tooth surface equations of the modified helical gears were established in the movable coordinate systems that were rigidly connected to the gears. The meshing equation was obtained by applying coordinate transformation matrix from the movable coordinate systems to the fixed coordinate system that was rigidly connected to the frame. The equation of meshing was presented to meet the condition of continuous tangency. The minimization of distance between tooth surfaces combined with deviation between unit normal vectors to tooth surfaces was performed to obtain the results of the equation of meshing by application of a constrained nonlinear optimization function in Matlab. The influence of the combination of the various modification style and misalignment on the contact path and transmission error was investigated. The presented results highlight that the modification pattern proposed can improve the tooth meshing condition and the adaptability to the misalignment.

Key words: gear modification; tooth surface equation; contact path; transmission error