第51卷第3期
2011年5月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 51, No. 3
May 2011

文章编号：1000-8608(2011)03-0406-06

纯弯矩作用下非贯穿直裂纹管局部柔度分析研究

朱　形*，刘　朵，胡家顺，周　晶

（大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室，辽宁 大连　116024）

摘要： 基于应变能释放率原理与线性断裂力学理论，把裂纹与外力成任意角的非贯穿直裂纹管的裂纹截面划分为一系列独立的宽为 dx 的矩形微元体，按照平面裂纹梁理论计算每个矩形微元体裂纹区域的附加应变能，并根据卡式定理积分得出总体应变能，推导了非贯穿直裂纹管在纯弯矩作用下的局部柔度方程. 采用适应性 Simpson 方法编写了数值积分程序，并通过对比 Naniwadekar 等的试验结果，验证了推导的纯弯矩作用下非贯穿直裂纹管局部柔度系数的合理性.

关键词： 裂纹；损伤；应变能释放率原理；局部柔度；任意角度

中图分类号： O346　　**文献标志码：** A

0　引　言

裂纹是结构损伤的重要表现形式之一. 在复杂的外荷载作用下，结构中出现裂纹的位置往往复杂多变，其振动响应因裂纹位置的不同而发生改变. 为了研究裂纹结构的振动特性，首先必须建立合适的裂纹分析模型. 基于等效降截面、局部柔度与一致裂纹梁原理的模型是目前常用的 3 种模拟裂纹的方法. 其中，基于局部柔度的裂纹模型因其理论性强、物理意义明确而被广泛应用. 这是一种利用线性断裂力学原理计算外荷载作用下的裂纹局部柔度，并通过“有限元”或“弹簧铰”描述裂纹局部行为的方法[1~3].

目前，国内外众多学者针对矩形、圆形以及中空等裂纹截面形式，均建立了基于局部柔度的裂纹模型[4~10]. 在上述模型中，裂纹方向与外荷载方向垂直或平行，即假定截面裂纹的位置是固定的. 然而，这种假定在实际工程中并不常见. 复杂的外界环境使得结构中出现的裂纹常常与外力成任意角，并非仅仅与外力垂直或平行. 在裂纹转子动力学中，已有许多学者研究了裂纹与外力成任意角的裂纹模型，但是对于管类结构中裂纹与外力成任意角的裂纹模型研究却鲜有报道[11]. Naniwadekar 等通过模型试验的方法研究了裂纹与外力成任意角的管类结构的振动特性，但并没有给出相应的解析解[12]. 为了进一步扩展裂纹结构的局部柔度理论，本文开展裂纹与外力成任意角的管类结构局部柔度的理论研究，针对含有非贯穿直裂纹的裂纹管类结构在纯弯矩作用下的局部柔度进行理论推导和数值求解.

1　非贯穿直裂纹管局部柔度计算理论

图 1 为非贯穿裂纹管示意图. 首先作如下假定：(1)裂纹类型为非扩展型；(2)考虑裂纹的呼吸效应；(3)采用各向同性的匀质材料，参数 E 为弹性模量，ν 为泊松比. 图中 a 为裂纹深度；$t=(D_e-D_i)/2$，为管壁厚；D_e 为管外径；D_i 为管内径；φ 为方向角，即裂纹尖端与水平面的夹角.

下文中将对 $0°\leqslant\varphi\leqslant180°$ 的裂纹局部柔度进行讨论，对于裂纹位于 $180°\leqslant\varphi\leqslant360°$ 的情况，局部柔度可通过对称性求得. 由于应力强度因子应用条件的限制[3]，本文首先考虑裂纹方向角 $0°\leqslant\varphi\leqslant30°$ 的情形，且文中仅考虑水平弯矩荷载 p_3 的作用，不考虑轴力和剪力的影响. 根据图 1 中裂纹截面的几何尺寸，可得出如下几何关系：

收稿日期： 2009-11-05；　**修回日期：** 2011-04-06.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(50978044).
作者简介： 朱　形*(1957-)，男，博士，高级工程师，E-mail：eerd002@dlut.edu.cn；周　晶(1949-)，男，教授，博士生导师.

$$b = \sqrt{(D_e/2)^2 - (D_e/2 - a)^2} \tag{1a}$$

$$\xi' = \xi + \sqrt{D_e^2/4 - \eta^2} - D_e/2 \tag{1b}$$

$$h'(\eta) = \sqrt{D_e^2 - 4\eta^2} \tag{1c}$$

$$a' = h'(\eta)/2 - k - y_2 \tag{1d}$$

$$k = (b_2 - \eta)\tan\varphi \tag{1e}$$

$$b_1 = b\cos\varphi - s \tag{1f}$$

$$b_2 = b\cos\varphi + s \tag{1g}$$

$$y_1 = b\sin\varphi + (D_e/2 - a)\cos\varphi \tag{1h}$$

$$y_2 = -b\sin\varphi + (D_e/2 - a)\cos\varphi \tag{1i}$$

$$s = (D_e/2 - a)\sin\varphi \tag{1j}$$

式中：b 为裂纹宽度的一半；ξ' 为距离矩形微元体顶部的局部深度变量；$h'(\eta)$ 为微元体深度；ξ 为总体坐标系下的深度变量；η 为总体坐标系下的偏移距离.

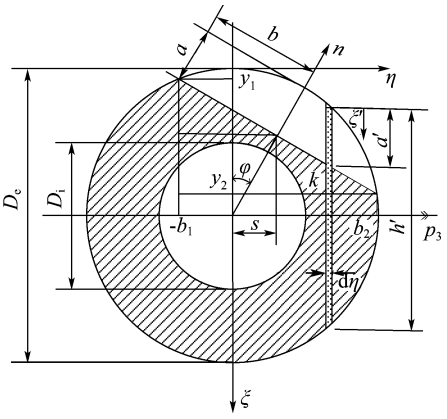


图 1　裂纹截面的几何尺寸

Fig. 1　The geometric dimensions of a cracked section

根据平面裂纹梁理论，裂纹深度为定值 a' 的矩形微元体裂纹区域的应变能为

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}\eta\int_0^{a'} J(\xi')\mathrm{d}\xi' \tag{2}$$

式中：$\mathrm{d}\eta$ 为矩形条带的宽度；$J(\xi')$ 为应变能密度函数，用如下方程表示：

$$J(\xi') = \frac{1}{E'}K_I^2(\xi') \tag{3}$$

式中：平面应变状态下 $E' = E/(1-\nu^2)$；平面应力状态下 $E' = E$；K_I 为弯矩荷载 p_3 作用下的应力强度因子，表示为

$$K_I = \frac{32p_3h'}{\pi D_e^4(1-\gamma^4)}\sqrt{\pi\xi'}F_2\left(\frac{\xi'}{h'}\right) \tag{4}$$

其中裂纹应力强度因子的修正系数 F_2 表示为

$$F_2\left(\frac{\xi'}{h'}\right) = \sqrt{\frac{2h'}{\pi\xi'}\tan\frac{\pi\xi'}{2h'}}\left(0.923 + 0.199\left(1 - \sin\left(\frac{\pi\xi'}{2h'}\right)\right)^4\Big/\cos\left(\frac{\pi\xi'}{2h'}\right)\right) \tag{5}$$

根据线弹性断裂力学理论，由裂纹引入的附加应变能为

$$U = \frac{1}{E'}\int_{-b_1}^{b_2}\mathrm{d}\eta\int_0^{a'}\frac{1\,024p_3^2h'^2\xi'}{\pi D_e^8(1-\gamma^4)^2}F_2^2\left(\frac{\xi'}{h'}\right)\mathrm{d}\xi' \tag{6}$$

利用卡氏定理(Castigliano's theorem)求得裂纹引入的附加位移

$$u_3 = \partial U/\partial p_3$$

进一步求得裂纹所引起的附加局部柔度：

$$c_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial p_3} = \frac{\partial^2 U}{\partial p_3\partial p_3} = \frac{1}{E'}\int_{-b_1}^{b_2}\mathrm{d}\eta\int_0^{a'}\frac{2\,048h'^2\xi'}{\pi D_e^8(1-\gamma^4)^2}F_2^2\left(\frac{\xi'}{h'}\right)\mathrm{d}\xi' \tag{7}$$

令 $x = \xi/D_e$，$y = \eta/D_e$，则 $\mathrm{d}\xi' = D_e\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}\eta = D_e\mathrm{d}y$.

$$w = \frac{\xi'}{h'} = \frac{\xi + \sqrt{\frac{D_e^2}{4} - \eta^2} - \frac{D_e}{2}}{\sqrt{D_e^2 - 4\eta^2}} = \frac{2x + \sqrt{1-4y^2} - 1}{2\sqrt{1-4y^2}} \tag{8}$$

化简式(7)，在水平弯矩荷载 p_3 的作用下，非贯穿直裂纹管的量纲一局部柔度系数 $NF(3,3)$ 可表示为

$$NF(3,3) = c_{33}E'D_e^3 = \frac{2\,048}{\pi(1-\gamma^4)^2}\int_{-b'_1}^{b'_2}\int_m^n \alpha\beta F_2^2(w)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9}$$

式中

$$b'_1 = b'\cos\varphi - \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{D_e}\right)\sin\varphi \tag{10a}$$

$$b'_2 = b'\cos\varphi + \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{D_e}\right)\sin\varphi \tag{10b}$$

其中 $b' = \sqrt{\frac{a}{D_e} - \left(\frac{a}{D_e}\right)^2}$.

$$m = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2} \tag{10c}$$

$$n = \frac{1}{2} + y\tan\varphi - \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{D_e}\right)(\cos\varphi + \tan\varphi\sin\varphi) \tag{10d}$$

$$\alpha = 1 - 4y^2 \tag{10e}$$

$$\beta = x + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2} - \frac{1}{2} \tag{10f}$$

由式(9)可知,裂纹的量纲一局部柔度是方向角 φ 的函数.当方向角 φ 发生改变,即裂纹在截面上的位置变化时,裂纹的呼吸(张开与闭合)行为也会随之发生改变.在外弯矩荷载 p_3 的作用下,裂纹截面被分成了两部分,即分别为受拉与受压区域,如图2所示.裂纹可能完全位于截面的受拉区,也可能完全位于受压区,或者部分受拉部分受压[3].不同区域的裂纹会表现出不同的行为,位于受拉区的裂纹处于张开状态,位于受压区的裂纹处于闭合状态.一般认为,闭合裂纹对裂纹结构的附加局部柔度无影响,可忽略不计;只有张开裂纹对附加局部柔度有贡献.

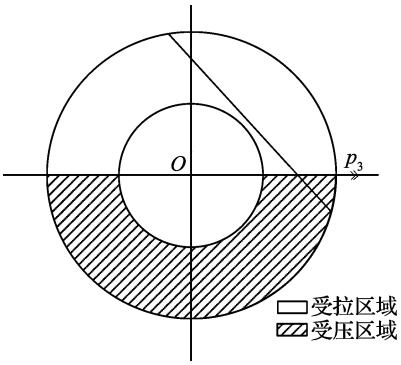


图2 量纲一柔度系数 $NF(3,3)$ 随裂纹位置的变化

Fig. 2 The dimensionless compliance $NF(3,3)$ as function of the crack location

当方向角 $-30°\leqslant\varphi\leqslant30°$[3] 时,可利用式(9)计算裂纹的量纲一局部柔度系数,这是由应力强度因子的限制条件所决定的.随着方向角 φ 的变化,裂纹的有效积分区域也发生改变.当

$$\varphi=\varphi_{cr}=\arctan\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\Big/\sqrt{\lambda-\lambda^2}\right) \quad (11)$$

时,裂纹开始进入截面的受压区;当

$$\varphi\geqslant\varphi_{cl}=-\arctan\left(\frac{\frac{1}{2}-\lambda}{\sqrt{\lambda-\lambda^2}}\right)+180° \quad (12)$$

时,裂纹完全处于受压区,即裂纹处于闭合状态,此时裂纹无任何附加的局部柔度,$NF(3,3)=0$.为方便起见,将 φ_{cr} 称为临界角,作为裂纹是否进入受压区的标志;将 φ_{cl} 称为闭合角,标志裂纹是否已完全进入受压区.在式(11)、(12)中,$\lambda=a/D_e$,即临界角 φ_{cr}、闭合角 φ_{cl} 均是裂纹相对深度 (a/D_e) 的函数.

上述内容是对裂纹在水平弯矩作用下的情形的讨论.利用同样的研究方法,可以得出裂纹在竖直弯矩作用下的附加局部柔度系数,即

$$NF(3,3)=c_{33}E'D_e^3=\frac{8\ 192}{\pi(1-\gamma^4)^2}\int_{-b_1'}^{0}\int_{m}^{n}\beta y^2F_1^2(w)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (13)$$

式中

$$F_1(w)=\sqrt{\tan\left(\frac{\pi w}{2}\right)\Big/\left(\frac{\pi w}{2}\right)}\Big/\cos\left(\frac{\pi w}{2}\right)\times\left(0.752+2.02w+0.37\left(1-\sin\frac{\pi w}{2}\right)^3\right) \quad (14)$$

如图3,(a)中所示的裂纹与水平面平行,即 $\varphi=0°$;(b)中所示的裂纹与水平面垂直,即 $\varphi=90°$.在这两种情形下,由裂纹引起的附加局部柔度是一致的.因此,在竖直弯矩的作用下,方向角 $-30°\leqslant\varphi\leqslant0°$ 等价于水平弯矩作用下 $60°\leqslant\varphi\leqslant90°$ 的情形,此时可利用式(13)进行量纲一化局部柔度系数的计算.

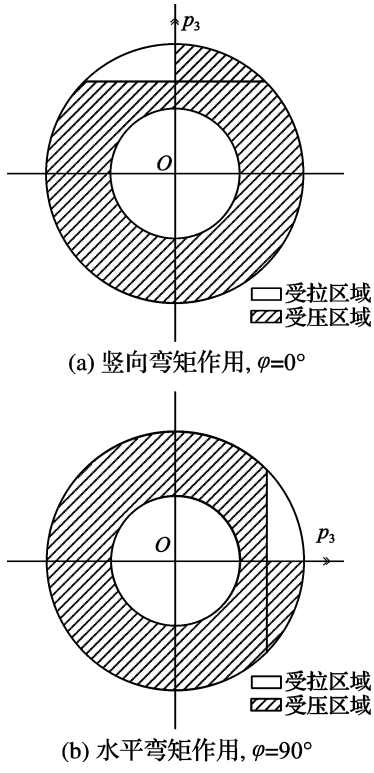


图3 竖向和水平弯矩作用

Fig. 3 Bending for the horizontal plane and the vertical plane

所以，在 0°至 180°的方向角范围内，量纲一化局部柔度系数 $NF(3,3)$ 计算可以分 3 段进行，即 $0°\leqslant\varphi\leqslant30°$、$60°\leqslant\varphi\leqslant90°$、$\varphi_{cl}\leqslant\varphi\leqslant180°$. 对于 $30°\leqslant\varphi\leqslant60°$ 和 $90°\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{cl}$ 的局部柔度系数可根据可导性和连续性的边界条件通过 B 样条曲线拟合得到[3]. 至此，当非贯穿直裂纹位于截面任意位置时，即方向角 φ 为任意值时的附加局部柔度系数 $NF(3,3)$ 均可通过计算得到.

2　裂纹管局部柔度系数求解

为了求解非贯穿直裂纹管量纲一柔度方程，即求解式(9)和(13)，本文根据文献[1]中的适应性 Simpson 方法，应用 Matlab 软件编写了数值积分程序. 首先利用该程序对文献[11]中的圆形截面裂纹梁的量纲一化局部柔度系数 $\bar{c}_{55}$（$\bar{c}_{55}$ 为水平弯矩作用下的量纲一化柔度系数，下同）进行求解. 为了验证本文数值积分程序的正确性及求解精度，将计算结果与文献中给出的数值进行比较，对比结果如表 1 所示.

表 1　局部柔度的理论计算值与文献[11]结果对比

Tab. 1　Theoretical results and results in Lit. [11] of the local compliance

a/R	理论计算值	文献[11]中的结果	误差/%
0.080 000	0.016 190	0.016 190	0
0.160 000	0.085 426	0.085 426	0
0.240 000	0.221 576	0.221 576	0
0.320 000	0.432 251	0.432 249	0.000 463
0.400 000	0.724 880	0.724 880	0
0.480 000	1.109 452	1.109 450	0.000 180
0.560 000	1.600 488	1.600 490	−0.000 125
0.640 000	2.219 096	2.219 100	−0.000 180
0.720 000	2.995 618	2.995 620	−0.000 067
0.800 000	3.973 547	3.973 550	−0.000 075
0.880 000	5.215 775	5.215 780	−0.000 096
0.960 000	6.815 114	6.815 160	−0.000 675
1.000 000	7.790 387	7.790 390	−0.000 039

从表 1 中的误差一栏可以看出：对于不同的裂纹深度，本文的计算值与文献[11]中给出的结果相比，误差都非常小. 且当 $a/R=1$ 时，两者的计算结果都等于 7.79，从而说明了本文针对量纲一局部方程编写的数值积分程序的合理与可靠性.

根据式(9) 或(13) 可知，求解裂纹管的附加局部柔度，首先应确定 γ 和方向角 φ. γ 是裂纹管的内外径之比，即 $\gamma=D_i/D_e$. 首先假定 $\gamma=0.5$，然后选取不同的 φ，以了解方向角的变化对裂纹局部柔度产生的影响. 针对方向角 $0°\leqslant\varphi\leqslant180°$ 的应用范围，本文选取 12 个角度值分别进行了计算.

根据不同的裂纹深度(a/D_e) 值，计算出了相应的临界角 φ_{cr} 与闭合角 φ_{cl}，其结果如表 2 所示，以便确定裂纹的有效积分区域.

在本文研究的裂纹深度比 a/D_e 范围内，最大闭合角 φ_{cl} 为 148.668°(见表 2 中计算结果)，因此可以认为，当方向角 $\varphi>150°$ 时，裂纹完全位于截面受压区，即裂纹闭合，量纲一化局部柔度系数 $NF(3,3)=0$. 所以，将 12 个角度值分成以下 3 组：

$$\varphi_1=0°,10°,20°,30°$$
$$\varphi_2=60°,70°,80°,90°$$
$$\varphi_3=150°,160°,170°,180°$$

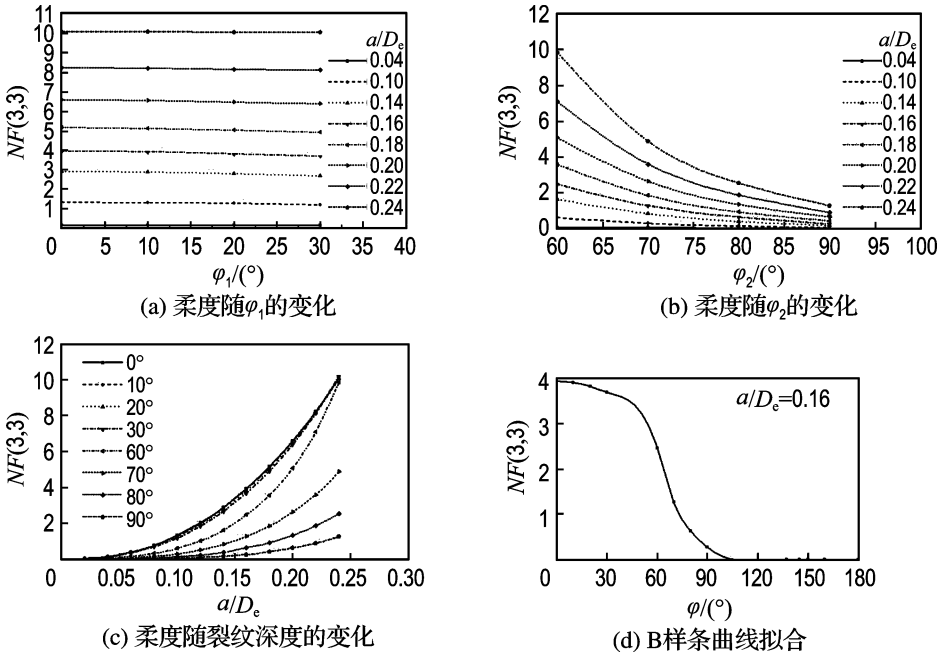
表 2　临界角 φ_{cr}、闭合角 φ_{cl} 随量纲一化裂纹深度 a/D_e 的变化

Tab. 2　Values of the critical angle φ_{cr} and the close angle φ_{cl} vs. the dimensionless cracked depth a/D_e

a/D_e	φ_{cr}/(°)	φ_{cl}/(°)	a/D_e	φ_{cr}/(°)	φ_{cl}/(°)
0.02	73.739	106.260	0.14	46.054	133.946
0.04	66.926	113.074	0.16	42.843	137.157
0.06	61.642	118.358	0.18	39.792	140.208
0.08	57.140	122.860	0.20	36.869	141.131
0.10	53.130	126.870	0.22	34.055	145.945
0.12	49.464	130.536	0.24	31.332	148.668

根据应力强度因子的限制使用条件可知，φ_1 组应利用式(9)求解；φ_2 组应利用式(13)求解；φ_3 组的局部柔度均为 $0.0°\leqslant\varphi\leqslant180°$ 范围内其余角度的局部柔度系数通过 B 样条曲线拟合获得. 根据上述条件利用本文数值积分程序求解，其计算结果如图 4 所示.

从图 4 可以看出：(1)量纲一化柔度系数 NF 随着裂纹深度的增加而逐渐增大；(2)量纲一化柔度系数 NF 随着方向角 φ 的增大而逐渐减小；(3)通过 B 样条拟合曲线可以方便求得截面任意位置的裂纹附加局部柔度.



(a) 柔度随φ_1的变化 (b) 柔度随φ_2的变化

(c) 柔度随裂纹深度的变化 (d) B样条曲线拟合

图 4 量纲一化局部柔度系数 $NF(3,3)$随各参量变化

Fig. 4 Variations of dimensionless compliance coefficient $NF(3,3)$ with parameters

3 局部柔度系数的试验验证

在文献[12]中，Naniwadekar 等采用静力和动力两种试验方法，针对低碳钢裂纹管模型的附加局部柔度进行了研究. 文中针对不同的裂纹位置、裂纹方向以及不同的裂纹深度，共 84 种工况进行了讨论，动力测试与静力测试的结果基本一致. 采用文献[12]中的试验模型和动力测试方法，验证本文的计算理论与计算方法是否正确. 在弯矩荷载 p_3 的作用下，动力试验获得的等效附加刚度 K_t 与局部柔度系数 c_{33} 有如下关系式[1]：

$$c_{33} = 1/K_t \tag{15}$$

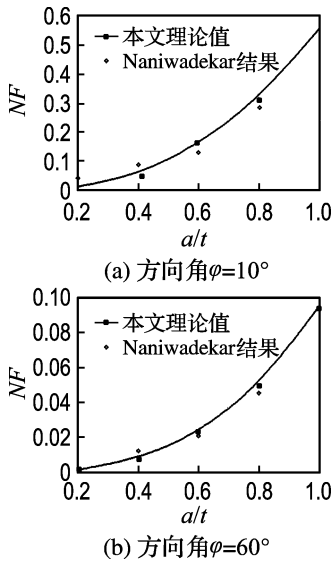
试验模型参数为 $D_e=0.037\ 8$ m；$D_i=0.027\ 8$ m；$\rho=7\ 860$ kg/m^3；$E=173.8$ GPa；$a/t=0.2,0.4,0.6,0.8$；$\varphi=0°,10°,20°,30°,45°,50°,60°$.

根据本文前一部分叙述的步骤和方法求得量纲一化柔度系数 NF，然后根据式(16) 即可得到局部柔度系数：

$$c_{33} = NF/E'D_e^3 \tag{16}$$

将本文理论计算得出的裂纹附加局部柔度系数与文献[12]中的试验值进行对比，结果如图 5(a)、(b)所示.

从图 5 中可以看出，本文的裂纹附加局部柔度系数解析解与试验结果基本吻合，且随着裂纹深度系数的增加而逐渐增大. 在试验中，裂纹管中的裂纹是通过人工切割产生的，其裂纹尖端位置是相互连接的整体；而本文在进行裂纹附加局部柔度系数的理论推导时，假定了裂纹截面离散的矩形微元体是相互独立的，这可能是产生误差的主要原因.



(a) 方向角φ=10°

(b) 方向角φ=60°

图 5 局部柔度系数的理论值与试验值对比

Fig. 5 Theoretical results and experimental results of the local flexibility due to a crack

4 结 论

基于线性断裂力学理论和应变能释放率原理，推导了纯弯矩作用下裂纹与外荷载成任意角的非贯穿直裂纹管的附加局部柔度方程，扩展了裂纹管的局部柔度理论. 利用 Matlab 语言编写了局部柔

度的数值积分程序，分段求解了 0°至 180°的裂纹局部柔度系数. 由于应力强度因子使用条件的限制，$0°\leqslant\varphi\leqslant30°$、$60°\leqslant\varphi\leqslant90°$以及 $\varphi_{cl}\leqslant\varphi\leqslant180°$的局部柔度系数可以通过计算直接得到，而其余的方向角则通过 B 样条曲线拟合得到，因此，任意方向的裂纹局部柔度系数均可以方便求出. 本文的局部柔度解析解与 Naniwadekar 得到的试验结果基本吻合，验证了该局部柔度理论的正确性.

裂纹管结构附加局部柔度理论的研究工作，为裂纹管类结构的力学特性分析、裂纹识别提供了理论基础和参考. 此裂纹管局部柔度理论性强、应用范围广泛，具有一定的工程应用价值[1]. 但是，在本文的推导过程中，只研究了非贯穿直裂纹管在纯弯矩作用下因裂纹引入的附加局部柔度，而未考虑轴力、剪力和扭矩以及它们之间的耦合作用，这将有待于在未来的工作中进行深入研究.

参考文献：

[1] 胡家顺. 裂纹管结构的振动分析与裂纹识别 [D]. 大连：大连理工大学，2009

[2] 胡家顺，冯　新，周　晶. 呼吸裂纹梁非线性动力特性研究 [J]. 振动与冲击，2009，**28**(1)：76-80

[3] CHASALEVRIS A C，PAPADOPOULOS C A. Identification of multiple cracks in beams under bending [J]. **Mechanical Systems and Signal Processing**，2006，**20**(7)：1631-1673

[4] DIMAROGONAS A D. Vibration of cracked structures：a state of the art review [J]. **Engineering Fracture Mechanics**，1996，**55**(5)：831-857

[5] PAPADOPOULOS C A. The strain energy release approach for modeling cracks in rotors：a state of the art review [J]. **Mechanical Systems and Signal Processing**，2008，**22**(4)：763-789

[6] ZOU J，CHEN J，NIU J C，*et al*. Discussion on the local flexibility due to the crack in a cracked rotor system [J]. **Journal of Sound and Vibration**，2003，**262**(3)：365-369

[7] HE Yu-min，YE Jun-jie，CHEN Xue-feng，*et al*. Discussion on calculation of the local flexibility due to the crack in a pipe [J]. **Mechanical Systems and Signal Processing**，2009，**23**(3)：804-810

[8] CHASALEVRIS A C，PAPADOPOULOS C A. Coupled horizontal and vertical bending vibrations of a stationary shaft with two cracks [J]. **Journal of Sound and Vibration**，2008，**309**(3-5)：507-528

[9] DARPE A K. A novel way to detect transverse surface crack in a rotating shaft [J]. **Journal of Sound and Vibration**，2007，**305**(1-2)：151-171

[10] CHASALEVRIS A C，PAPADOPOULOS C A. A continuous model approach for cross-coupled bending vibrations of a rotor-bearing system with a transverse breathing crack [J]. **Mechanism and Machine Theory**，2009，**44**(6)：1176-1191

[11] PAPADOPOULOS C A. Some comments on the calculation of the local flexibility of cracked shafts [J]. **Journal of Sound and Vibration**，2004，**278**(4-5)：1205-1211

[12] NANIWADEKAR M R，NAIK S S，MAITI S K. On prediction of crack in different orientations in pipe using frequency based approach [J]. **Mechanical Systems and Signal Processing**，2008，**22**(3)：693-708

Analysis and study of local flexibility due to straight part-through crack under pure bending in a pipe

ZHU Tong*，LIU Duo，HU Jia-shun，ZHOU Jing

（State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering，Dalian University of Technology，Dalian 116024，China）

Abstract：The local flexibility equations of a pipe under pure bending which contains a crack at any angle are established using the strain energy release rate（SERR）theory and linear fracture mechanics. The cracked circle cross section is considered to be divided into strips of width dx which are independent of each other. The additional strain energy of each strip is calculated，and the compliance is obtained by integrating along the crack tip using Castigliano′s theorem. The adaptive Simpson quadrature method is applied to calculating the local flexibility due to crack. The experimental results provided by Naniwadekar，*et al*. are given to verify the validity of the local flexibility equations of a pipe with straight part-through crack under pure bending.

Key words：crack；damage；strain energy release rate（SERR）theory；local flexibility；any angle