文章编号：1000-8608(2011)03-0412-05

贝叶斯定理构建水库汛限水位动态控制推理模式及其风险

王本德*，周惠成，李　敏，王国利，刁艳芳

（大连理工大学 水利工程学院，辽宁 大连　116024）

摘要： 针对现行的汛限水位动态控制推理模式的建模假定合理性证明及风险率计算不完备性问题，以南水北调受水区的白龟山水库资料为例，应用贝叶斯定理证明了现行推理模式的建模假定是成立的，依据完备条件下风险构建新的推理模式较现行的模式结构合理，逻辑性与可操作性强.这一研究成果既有理论意义又有实用价值，可达到既保证防洪安全，又增加洪水资源量的双赢目的，有助于进一步推广应用汛限水位动态控制方法.

关键词： 贝叶斯定理；降雨预报；水库汛限水位动态控制推理模式；风险分析

中图分类号： TV62　　**文献标志码：** A

0　引　言

文献[1、2]中提出的利用降雨预报信息动态控制汛限水位的推理模式，简称推理模式，已在碧流河、蔺窝、白龟山、桓仁、于桥、丹江口、大伙房水库等编制或应用，取得了既安全，又充分利用洪水资源的效果.

推理模式依据降雨预报实际值的统计分布律，令设计标准洪水暴雨事件为 E，且假定“事件 E 在无雨预报的漏报条件下发生的概率趋于零，属不可能事件；在大暴雨预报条件下发生的概率极高，属于可能事件”.基于上述假定，在汛限水位动态控制域内，相应建立的推理模式是：若无雨或小雨预报，则水位控制在上限；若中雨预报，则将水位控制在中线；若有大雨或暴雨预报，则库水位控制在下限或低于原设计汛限水位.

推理模式仅计算单一条件风险，如“无雨”预报发生漏报 $x \geqslant 0.1$ 事件条件下发生设计标准暴雨洪水事件 E 的概率计算公式：$p(E, x \geqslant 0.1) = p(x \geqslant 0.1) \times p(E) < p(E)$（$p(E)$ 为设计暴雨洪水频率）.

不难看出，推理模式推广应用尚存在两个主要问题：之一是基于降雨预报水平构建的推理模式所做的假定尚需证明；之二是推理模式风险分析中，仅给出单一条件风险计算式是不完备的，事件 E 的发生应以无雨至暴雨以上 5 个量级降雨互斥完备事件之一发生为条件，并需在各种设计频率暴雨实际发生信息不完全条件下估计相应的概率.这两个问题是构建合理、安全推理模式的关键，深入研究它们既有理论意义又有实用价值.

目前看，贝叶斯定理是在不完全信息下，对部分未知的状态用主观概率估计，然后用其公式对发生概率进行修正确定的常用方法.为此本文尝试应用该定理，期望研究成果能证明原推理模式假定的合理性，给出新的风险计算方法，进而构建有理论依据的新推理模式，为进一步推广应用汛限水位动态控制方法，安全利用洪水资源作贡献.

1　贝叶斯定理概述

英国数学家贝叶斯（Thomas Bayes）于 1763 年提出贝叶斯定理，目前已形成一整套理论与方法，在自然科学及国民经济的许多领域中有着广泛应用.其基本原理是：

要采取的行动所取决的某种自然状态是客观的且未知的，但有可能通过判断和采样获得有关

收稿日期： 2009-05-20；　**修回日期：** 2011-04-09.
基金项目： “十一五”国家科技支撑计划资助项目(2006BAB04A07)；水利部公益性行业科研专项资助项目(200701015).
作者简介： 王本德*(1938-)，男，教授，博士生导师，E-mail：wangbd@dlut.edu.cn.

自然状态的信息.初始信息称先验信息,在采样基础上可获得新信息,并可对先验信息进行修正,使得决策依据的信息更接近于实际.它打破了经典统计学派的局限性,为一系列信息综合推断和决策分析过程奠定了基础.

该定理表述了给定事件 E 发生时事件 e_i 的发生概率与给定事件 e_i 发生时事件 E 的发生概率二者之间的关系[3],即

$$p(e_i \mid E) = \frac{p(e_i)p(E \mid e_i)}{p(E)} = \frac{p(e_i)p(E \mid e_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(e_i)p(E \mid e_i)} \quad (1)$$

式中:$e_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为互斥事件,$I = e_1 + \cdots + e_i + \cdots + e_n$ 为其样本空间,事件 e_i 发生概率为 $p(e_i)$,称先验概率;E 为运行中的某一事件,以事件 $e_1,\cdots,e_i,\cdots,e_n$ 之一的发生为条件,故 $p(E \mid e_i)$ 为条件概率,E 和 e_i 同时发生的概率为 $p(e_i)p(E \mid e_i)$;$p(E)$ 为全概率,即 $\sum_{i=1}^{n} p(e_i)p(E \mid e_i)$;$p(e_i \mid E)$ 为后验概率.

可见,贝叶斯定理是在已知条件概率密度函数 $p(E \mid e_i)$ 和先验概率 $p(e_i)$ 的条件下,利用式(1)转换为后验概率 $p(e_i \mid E)$.

2　利用贝叶斯定理拟解决的命题与实例

2.1　拟解决的命题

针对引言中的两个关键问题,拟利用贝叶斯定理解决如下命题:

汛期利用降雨预报信息动态控制水库汛限水位时,若已知某设计标准暴雨量事件 E 的发生是以不同量级 e_i 降雨预报之一的发生为条件,且又知事件 e_i 的先验概率 $p(e_i)$ 和条件概率 $p(E \mid e_i)$,求事件 E 发生于各级降雨预报的后验概率 $p(e_i \mid E)$,并与单一条件风险比较,构建汛限水位动态控制新推理模式;利用其最高或最低概率证明现行推理模式假定成立与否.

此命题中的各级降雨预报事件 e_i,即无雨、小雨、中雨、大雨、暴雨以上的 5 个量级是互斥的,其样本空间 $I = e_1 + \cdots + e_i + \cdots + e_n$ 是完备的,基于气象部门若干年作业预报实践,因样本容量较大,在频率替代概率的假定条件下,即可求出先验概率 $p(e_i)$.

命题中"某量级设计暴雨量"事件 E,是以不同量级 e_i 降雨预报漏报之一发生为条件,是客观的.可据资料分析出不同量级降雨预报的实际降雨分布,进而求得条件概率 $p(E \mid e_i)$ 和全概率 $p(E)$.

2.2　求解上述命题的实例

为便于与文献[1、2]提出的现行推理模式的风险分析方法比较,仍以当时选用的白龟山水库为实例,求解上述命题.

(1)互斥事件及其先验概率

仍以当时选用的 1997～2002 年平顶山市气象台汛期 702 d 的未来 24 h 降雨预报与水库实际的 24 h 流域平均降雨资料进行分析.尊重气象部门习惯,互斥事件 e_i 分 5 级(见表 1).互斥且完备事件 e_i 发生的先验概率 $p(e_i)$,可根据发生频次利用古典概率 $p(e_i) = M/N$ 计算.

表 1　互斥事件 e_i 先验概率

Tab.1　The prior probabilities of exclusive events e_i

e_i	预报等级	预报值域/mm	频次(M)	$p(e_i)$
e_1	无雨	<0.1	404	0.575 5
e_2	小雨	0.1～10	229	0.326 2
e_3	中雨	10.1～25	10	0.014 2
e_4	大雨	25.1～50	19	0.027 1
e_5	暴雨以上	>50	40	0.057 0
Σ			702(N)	1.000 0

(2)"某量级设计暴雨量"事件 E 及其条件概率

白龟山水库依据降雨预报信息动态控制汛限水位时,发生"某量级设计暴雨量"事件 E_j,是根据水库上游淹没允许、下游城市防洪标准及大坝设计防洪标准确定的.该水库具有一日主暴雨量控制洪峰与洪量特点,不同频率设计暴雨量见表 2.水库大坝校核、设计洪水频率分别是 0.05%、1%;下游城市防洪标准与上游淹没允许标准分别是 2%、5%.

表2 不同设计频率洪水暴雨量

Tab. 2 Storm rainfall of each design flood frequency

E_j	频率/%	暴雨量/mm
E_4	0.05	647
E_3	1	408
E_2	2	351
E_1	5	278

注:假定流域平均蓄水量达饱和状态,暴雨量等于净雨量

根据水库流域汛期降雨预报和实际的6 a资料,引用"柯尔莫哥洛夫准则"进行统计检验,证明降雨预报的实际降雨分布规律符合P-Ⅲ型分布[4],其概率密度函数为

$$f(x)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(x-a_0)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta(x-a_0)} \qquad (2)$$

式中:$\Gamma(\alpha)$为α的伽玛函数;α、β、a_0为3个参数.

上述的统计参数采用适线法确定,结果列入表3.

表3 降雨预报不同量级的实际降雨分布参数

Tab. 3 The actual rainfall distribution parameters of each order of rainfall forecasting

值域/mm	α	β	a_0	$\Gamma(\alpha)$
<0.1	0.097 656	0.088 778	0	9.750 6
0.1~10	0.102 400	0.037 647	0.68	9.282 2
10.1~25	0.160 000	0.013 333	3.00	5.811 3
25.1~50	0.284 444	0.012 698	5.60	3.164 6
>50	0.444 444	0.016 244	13.84	1.992 8

依据表3之参数,用式(2)的概率分布函数编程计算事件$E_j(j=1,2,3,4)$发生的条件概率,结果见表4.

(3) 后验概率$p(e_i \mid E_j)$的计算

将表1和表4相应的数据代入贝叶斯式(1)即可算出事件$E_j(j=1,2,3,4)$发生条件下各量级降雨预报事件e_i出现的概率(后验概率),结果见表5.

表4 事件E_j发生的条件概率$p(E_j \mid e_i)$

Tab. 4 Conditional probabilities $p(E_j \mid e_i)$ when event E_j happened

e_i/mm	$p(E_j \mid e_i)$			
	E_1/278 mm	E_2/351 mm	E_3/408 mm	E_4/647 mm
<0.1	$1.049\,52\times10^{-13}$	$3.524\,85\times10^{-15}$	$7.294\,42\times10^{-19}$	$2.959\,25\times10^{-28}$
0.1~10	$3.553\,14\times10^{-7}$	$7.950\,45\times10^{-8}$	$1.927\,87\times10^{-9}$	$1.605\,75\times10^{-13}$
10.1~25	$1.239\,91\times10^{-3}$	$6.924\,97\times10^{-4}$	$1.659\,45\times10^{-4}$	$4.811\,97\times10^{-6}$
25.1~50	$5.882\,94\times10^{-3}$	$3.619\,26\times10^{-3}$	$1.099\,01\times10^{-3}$	$5.683\,89\times10^{-5}$
>50	$3.302\,37\times10^{-2}$	$2.318\,90\times10^{-2}$	$9.730\,59\times10^{-3}$	$1.097\,66\times10^{-3}$

表5 事件E_j发生条件下事件e_i后验概率

Tab. 5 Posterior probability of event e_i when event E_j happened

e_i/mm	$p(e_i \mid E_j)$				行号
	E_1	E_2	E_3	E_4	
<0.1	$2.933\,89\times10^{-11}$	$1.419\,40\times10^{-12}$	$7.156\,87\times10^{-16}$	$2.654\,71\times10^{-24}$	①
0.1~10	$5.630\,14\times10^{-5}$	$1.814\,72\times10^{-5}$	$1.072\,17\times10^{-6}$	$8.165\,23\times10^{-10}$	②
10.1~25	$8.579\,47\times10^{-3}$	$6.902\,41\times10^{-3}$	$4.030\,09\times10^{-3}$	$1.068\,51\times10^{-3}$	③
25.1~50	$7.734\,27\times10^{-2}$	$6.854\,20\times10^{-2}$	$5.071\,16\times10^{-2}$	$2.398\,02\times10^{-2}$	④
>50	0.914 021	0.924 537	0.945 257	0.974 951	⑤
Σ	1	1	1	1	

(4)基于后验概率构建新的汛限水位动态控制推理模式及其风险

白龟山水库原设计主汛限水位102 m,汛限水位动态控制研究阶段设计的约束域为102.0~102.6 m.现行的汛限水位动态控制推理模式只分两种条件,且没有给出风险估计,不够完善,即:

a.如预报未来24 h有大雨以下量级,则汛限水位为102.3~102.6 m;

b. 如预报未来 24 h 有大雨以上量级，则汛限水位为 102.0～102.3 m.

本文应用贝叶斯公式推断的后验概率描述风险，相应构建的汛限水位动态控制新推理模式更为完备，且为决策者提供风险信息，即：

a. 如预报未来 24 h 无雨，事件 E_4～E_1 条件下无雨事件发生的后验概率（即风险率，以下同）在 $2.654\ 71\times10^{-24}$～$2.933\ 89\times10^{-11}$，则汛限水位控制为上限 102.6 m；

b. 如预报未来 24 h 小雨，事件 E_4～E_1 条件下小雨事件发生的后验概率在 $8.165\ 23\times10^{-10}$～$5.630\ 14\times10^{-5}$，则汛限水位控制为中上限 102.5 m；

c. 如预报未来 24 h 中雨，事件 E_4～E_1 条件下中雨事件发生的后验概率在 $1.068\ 51\times10^{-3}$～$8.579\ 47\times10^{-3}$，则汛限水位控制为中限 102.3 m；

d. 如预报未来 24 h 大雨，事件 E_4～E_1 条件下大雨事件发生的后验概率在 $2.398\ 02\times10^{-2}$～$7.734\ 27\times10^{-2}$，则汛限水位控制为 102.0 m（原设计汛限水位，即控制域下限）；

e. 如预报未来 24 h 暴雨以上量级，事件 E_4～E_1 条件下暴雨以上量级事件发生的后验概率在 0.914 021～0.974 951，为提高防洪效益，则汛限水位为 101.7 m（考虑预泄能力，低于原设计汛限水位 0.3 m）.

上述 5 种情况分别与表 5 的行号相对应.

(5)两种方法风险计算比较

鉴于单一条件风险式计算是白龟山水库现行方法推理模式的建模基础，而新方法构建推理模式的依据是贝叶斯推断的后验概率，所以表 6 列出两种方法概率计算比较，作为评价其安全性的依据.

表 6　两种方法概率计算比较

Tab. 6　Comparison of probabilities calculated by two methods

e_i/mm	$E_1=278$ mm, $p(E_1)=5\%$		$E_4=647$ mm, $p(E_4)=0.05\%$	
	$p(x>e_i)\times p(E_1)$	$p(e_i \mid E_1)$	$p(x>e_i)\times p(E_4)$	$p(e_i \mid E_4)$
<0.1	2.88×10^{-2}	$2.933\ 89\times10^{-11}$	2.88×10^{-4}	$2.654\ 71\times10^{-24}$
0.1～10	1.66×10^{-4}	$5.630\ 14\times10^{-5}$	1.66×10^{-6}	$8.165\ 23\times10^{-10}$
10.1～25	7.10×10^{-4}	$8.579\ 47\times10^{-3}$	7.10×10^{-6}	$1.068\ 51\times10^{-3}$
25.1～50	13.6×10^{-4}	$7.734\ 27\times10^{-2}$	13.6×10^{-6}	$2.398\ 02\times10^{-2}$
>50	28.5×10^{-4}	0.914 021	28.5×10^{-6}	0.974 951

注：$p(x>e_i)$式中 e_1 取≥0.1，e_2、e_3、e_4 分别取 10、25、50；$p(x>e_5)=1$

从表 6 可见，因单一条件风险式是不完备条件下的风险计算结果，所以忽大忽小没有规律，各事件概率之和不归一，预报量级为 e_1、e_2 时，单一条件风险 $p(x>e_i)\times p(E)$ 计算的概率大于贝叶斯公式计算的后验概率，而 e_3、e_4、e_5 则相反. 另外，$p(x>e_i)$ 是降雨漏报的概率，$p(E)$ 是年最大法推求的设计暴雨洪水的频率，二者相乘的合理性缺乏论证. 而贝叶斯公式推断的后验概率，是考虑互斥完备事件的条件组合概率的权系数，计算合理、有规律且归一，可为决策者提供偏安全的信息.

3　结　论

(1)根据白龟山水库汛期预报和实际降雨资料，应用贝叶斯定理推断出：若发布无雨预报，则校核标准暴雨洪水 E_4 条件下的“无雨”事件发生的后验概率为 $2.654\ 71\times10^{-24}$，趋于零；如发布暴雨以上量级预报，则校核标准暴雨洪水 E_4 条件下的“暴雨以上量级”事件发生的后验概率为 0.974 951，接近 1. 初步证明现行的汛限水位动态控制推理模式建模的假定是成立的.

(2)贝叶斯定理推断出的后验概率，是互斥完

备事件的条件组合概率的权系数，比现行的单一条件概率计算结果有规律，符合实际，可用于描述风险.其可信度会随着时序延长、新信息的获得与先验概率修正而提高.

(3)基于贝叶斯定理推断出的后验概率构建的汛限水位动态控制推理模式比现行推理模式结构合理、逻辑性强，配合相应的风险信息为决策者提供支持，可操作性强.

(4)本文研究方法具有理论意义和实用价值，期望它能起到抛砖引玉的作用，使更多水库参与验证现行的推理模式建模假定的合理性，提出风险小、效益大、可操作性强的汛限水位动态控制新推理模式，为水利部进一步推广应用汛限水位动态控制方法作贡献.

参考文献：

[1] 王本德，周惠成，王国利. 水库汛限水位动态控制理论与方法及其应用[M]. 北京：中国水利水电出版社，2006

[2] 周惠成，王本德，王国利，等. 水库汛限水位动态控制方法研究[M]. 大连：大连理工大学出版社，2006

[3] 梅理特 F S. 工程技术常用数学[M]. 丁 仁，陈三平，译. 北京：科学出版社，1978

[4] 大连理工大学土木水利学院，河南省水利水电勘测设计研究院，河南省白龟山水库管理局. 白龟山水库汛限水位设计与运行研究技术总报告[R]. 大连：大连理工大学，2004

Inference model and its risk analysis of dynamic control of reservoir limit water level based on Bayes theorem

WANG Ben-de*, ZHOU Hui-cheng, LI Min, WANG Guo-li, DIAO Yan-fang

(School of Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Rationality testification of modeling assumptions of inference model and calculation of risk rate under incomplete conditions of dynamic control of the reservoir limit water level aren't solved. Take Baiguishan Reservoir that is in intake area of south-to-north water diversion as an example, Bayes theorem is applied to testifying that modeling assumptions of inference model of dynamic control of the reservoir limit water level is rational. And a new inference model which is established by risk rate under complete conditions is more logical and feasible than actual inference model. This result can not only ensure the safety of flood control, but also increase the utilization rate of the flood resource. Furthermore, it can provide references with promoting the use of the dynamic control of the reservoir limit water level method.

Key words: Bayes theorem; rainfall forecasting; inference model of dynamic control of reservoir limit water level; risk analysis