第51卷第3期
2011年5月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 51, No. 3
May 2011

文章编号：1000-8608(2011)03-0453-05

基于贴近度的模糊非线性信贷优化问题研究

于兆吉*1， 胡祥培1， 毛 强2

（1.大连理工大学 管理与经济学部，辽宁 大连 116024；
2.东北大学 管理学院，辽宁 沈阳 110819）

摘要： 构建了信用多属性评价模糊向量，分析了模糊包含度与贴近度的关系，提出了一种包含度的计算公式，并诱导出模糊贴近度的计算公式，弥补了传统贴近度计算公式的不足.进而建立了基于模糊贴近度的信用评价函数.在此基础上，针对信贷问题，建立了模糊非线性优化模型，给出了求解模型的内点算法，并分析了其收敛性.算例结果表明基于贴近度的模糊非线性规划适于求解诸如信贷优化等复杂问题.

关键词： 贴近度；模糊；信用评价；非线性；优化模型

中图分类号： O224 **文献标志码：** A

0 引 言

模糊模式识别分为个体识别和群体识别，在信用等级识别中，由于考虑多个评价属性，在进行模式识别时，被识别的对象不是论域中一个确定元素，而是论域中的一个模糊子集，所涉及的不是元素对集合的隶属关系，而是两个模糊子集间的贴近度，此时必须采用群体识别方法，即模糊贴近度方法.贴近度是对两个模糊子集接近程度的一种度量，目前关于模糊贴近度的定义很多[1,2]，其运用应视具体情况而定.

模糊贴近度与包含度是模糊集理论中两个非常基本和重要的概念.模糊贴近度反映了两个模糊子集的贴近程度；而模糊包含度反映了一个模糊子集包含于另一个模糊子集的程度.这两个概念密不可分，两者的相互关系引起许多学者的研究兴趣.文献[3]给出了贴近度的一般化定义，文献[4]给出了包含度的公理化定义，文献[5]对贴近度与包含度概念进行了初步总结，文献[6]讨论了6个包含度公式.本文在这些研究工作的基础上提出一种包含度计算公式，并由其诱导出一种新型贴近度计算公式.

模糊优化方法已被用于工业过程的控制等方面并取得很大成功[7]，目前在经济管理中也逐渐得到重视[8、9].然而，非线性模糊规划在信用风险控制方面的研究却较为缺乏.本文运用诱导出的新型贴近度计算公式，进行信用评价，进一步研究求解信贷模糊非线性规划的一种内点算法，并分析该算法的收敛性.

1 贴近度的计算

1.1 模糊向量的构建

设论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，即有 n 个信用评价属性.设各企业信用评价属性向量组成的集合 $\boldsymbol{Y}=\{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_m\}$，$m$ 为企业的个数.其中 $\boldsymbol{y}_i=(y_{i1}\quad y_{i2}\quad\cdots\quad y_{in})$，$i=1,2,\cdots,m$.对其进行标准化后，得到 $\boldsymbol{r}_i=(r_{i1}\quad r_{i2}\quad\cdots\quad r_{in})$.其中 r_{ij} 的计算如式(1)所示，Φ_1 为信用评价正指标或属性组成的集合，Φ_2 为信用评价逆指标或属性组成的集合，Φ_3 为信用评价趋近指标或属性组成的集合，y_j^* 为信用评价指标或属性 j 的最理想值.

$$r_{ij}=\begin{cases}\dfrac{y_{ij}-\min\limits_i\{y_{ij}\}}{\max\limits_i\{y_{ij}\}-\min\limits_i\{y_{ij}\}}; & j\in\Phi_1\\[2ex] \dfrac{\max\limits_i\{y_{ij}\}-y_{ij}}{\max\limits_i\{y_{ij}\}-\min\limits_i\{y_{ij}\}}; & j\in\Phi_2\\[2ex] \dfrac{|y_j^*|-|y_{ij}-y_j^*|}{|y_j^*|}; & j\in\Phi_3\end{cases}\tag{1}$$

收稿日期： 2009-03-04； **修回日期：** 2011-04-04.
基金项目： 国家杰出青年科学基金资助项目(70725004)；辽宁省自然科学基金资助项目(20092049).
作者简介： 于兆吉*(1975-)，男，博士，副教授，E-mail：3043136@163.com；胡祥培(1962-)，男，教授，博士生导师.

令 $r_j^* = \max\{r_{1j}, r_{2j}, \cdots, r_{mj}\}, j = 1,2\cdots,n$. 可得由各信用评价属性的理想数值组成的向量 $\boldsymbol{R}^* = (\boldsymbol{r}_1^* \quad \boldsymbol{r}_2^* \quad \cdots \quad \boldsymbol{r}_n^*)$. 对于任一企业 i 的信用评价属性向量 $\boldsymbol{r}_i = (r_{i1} \quad r_{i2} \quad \cdots \quad r_{in})$,可计算出它与各信用评价属性的理想值的相对隶属度如下式:

$$\widetilde{A}_{ij}(r_{ij}) = 1 - \frac{|r_{ij} - r_j^*|}{r_j^*} = \frac{r_{ij}}{r_j^*} = a_{ij};$$
$$i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n \qquad (2)$$

由此可得各企业的信用模糊向量,$\widetilde{\boldsymbol{A}}_1 = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$,$\widetilde{\boldsymbol{A}}_2 = (a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n})$,$\cdots$,$\widetilde{\boldsymbol{A}}_m = (a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn})$.

1.2 贴近度公式的诱导

设 U 是论域,用 $\boldsymbol{F}(U)$ 表示 U 上的全体模糊集之集,用 $\boldsymbol{P}(U)$ 表示 U 上的全体分明集之集. 对 $\widetilde{\boldsymbol{A}} \in \boldsymbol{F}(U)$ 和 $u \in U$,$\widetilde{\boldsymbol{A}}(u)$ 称为 u 隶属于 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的程度. 用 $\widetilde{\boldsymbol{A}}^c$ 表示 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的补集,即 $\widetilde{\boldsymbol{A}}^c(u) = 1 - \widetilde{\boldsymbol{A}}(u)$. 贴近度的公理化定义如下:

定义 1[3] 实函数 $s: \boldsymbol{F}(U) \times \boldsymbol{F}(U) \to [0,1]$ 叫 $\boldsymbol{F}(U)$ 上的贴近度,若 s 满足以下 4 条:

(i) $\forall \widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}} \in \boldsymbol{F}(U)$, $s(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}) = s(\widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{A}})$;

(ii) $\forall \boldsymbol{D} \in \boldsymbol{P}(U)$, $s(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}^c) = 0$;

(iii) $\forall \widetilde{\boldsymbol{C}} \in \boldsymbol{F}(U)$, $s(\widetilde{\boldsymbol{C}}, \widetilde{\boldsymbol{C}}) = 1$;

(iv) $\forall \widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{C}} \in \boldsymbol{F}(U)$,若 $\widetilde{\boldsymbol{A}} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{B}} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{C}}$ 则 $s(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}) \geqslant s(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{C}})$, $s(\widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{C}}) \geqslant s(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{C}})$

关于贴近度具体计算公式有多种表达方式,文献[1]根据模糊数学运算法则,给出贴近度计算公式如式(3)所示. 其中 $\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}} \in \boldsymbol{F}(U)$,其隶属函数分别为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}(u)$、$\widetilde{\boldsymbol{B}}(u)$. $\widetilde{\boldsymbol{A}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{B}} = \bigvee_{u \in U} (\widetilde{\boldsymbol{A}}(u) \wedge \widetilde{\boldsymbol{B}}(u))$ 称为内积,$\widetilde{\boldsymbol{A}} \odot \widetilde{\boldsymbol{B}} = \bigwedge_{u \in U} (\widetilde{\boldsymbol{A}}(u) \vee \widetilde{\boldsymbol{B}}(u))$ 称为外积.

$$s(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}) = (\widetilde{\boldsymbol{A}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{B}}) \wedge (1 - \widetilde{\boldsymbol{A}} \odot \widetilde{\boldsymbol{B}}) \qquad (3)$$

由式(3)计算出的贴近度在考虑单属性时,满足贴近度定义的 4 个条件,但对于诸如信用评价问题中涉及多个评价属性的模糊向量的贴近度的计算会出现不满足条件(iii)的情况. 例如 $\widetilde{\boldsymbol{A}} = (0.2 \quad 0.4 \quad 0.5)$,$s(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{A}}) = 0.5$. 显然,不满足条件(iii),这与实际也极为不符,因此需对该贴近度定义进行改进,才可用于信用评价.

文献[3]给出了 Hamming 贴近度的离散形式的定义,如式(4)所示. 该定义符合贴近度的公理化定义,但该定义没有考虑到各个不同属性对于评价两个模糊向量贴近度的权重.

$$\sigma_{\mathrm{H}}(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |\widetilde{\boldsymbol{A}}(u_j) - \widetilde{\boldsymbol{B}}(u_j)| \qquad (4)$$

在模糊理论中,贴近度与包含度之间具有相互诱导的关系[5],同时考虑到包含度对涉及多属性的模糊向量评价的适应性,在此,借助包含度的思想诱导出贴近度的计算公式. 模糊包含度的公理化定义如下:

定义 2[4] 实函数 $c: \boldsymbol{F}(U) \times \boldsymbol{F}(U) \to [0,1]$ 叫 $\boldsymbol{F}(U)$ 的包含度,若 c 满足以下 3 条:

(i) $\forall \widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}} \in \boldsymbol{F}(U)$,若 $\widetilde{\boldsymbol{A}} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{B}}$,则 $c(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}) = 1$;

(ii) $c([1],[0]) = 0$;

(iii) $\forall \widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{C}} \in \boldsymbol{F}(U)$,若 $\widetilde{\boldsymbol{A}} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{B}} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{C}}$,则 $c(\widetilde{\boldsymbol{C}}, \widetilde{\boldsymbol{A}}) \leqslant c(\widetilde{\boldsymbol{C}}, \widetilde{\boldsymbol{B}})$, $c(\widetilde{\boldsymbol{C}}, \widetilde{\boldsymbol{A}}) \leqslant c(\widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{A}})$

这里[1]表示模糊集满足 $\forall u \in U, [1](u) \equiv 1$;[0]表示模糊集满足 $\forall u \in U, [0](u) \equiv 0$.

定理 1 式(5)符合包含度计算的公理化公式:

$$c(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left[\frac{\widetilde{\boldsymbol{A}}(u_j) \wedge \widetilde{\boldsymbol{B}}(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{A}}(u_j)} \vee \frac{\widetilde{\boldsymbol{A}}^c(u_j) \wedge \widetilde{\boldsymbol{B}}^c(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{B}}^c(u_j)} \right] \qquad (5)$$

其中 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$,并规定 $\frac{0}{0} = 1$.

证明 (i) $\forall \widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}} \in \boldsymbol{F}(U)$,若 $\widetilde{\boldsymbol{A}} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{B}}$,则有 $\widetilde{\boldsymbol{A}}(u_j) \leqslant \widetilde{\boldsymbol{B}}(u_j)$,$\widetilde{\boldsymbol{A}}^c(u_j) \geqslant \widetilde{\boldsymbol{B}}^c(u_j)$,代入式(5)有

$$c(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left[\frac{\widetilde{\boldsymbol{A}}(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{A}}(u_j)} \vee \frac{\widetilde{\boldsymbol{B}}^c(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{B}}^c(u_j)} \right] = 1;$$

(ii) 将 0([1],[0]) 代入式(5)可得.

(iii) 因为 $\forall \widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{C}} \in \boldsymbol{F}(U)$,且 $\widetilde{\boldsymbol{A}} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{B}} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{C}}$,所以有 $\widetilde{\boldsymbol{A}}(u_j) \leqslant \widetilde{\boldsymbol{B}}(u_j)$,$\widetilde{\boldsymbol{B}}(u_j) \leqslant \widetilde{\boldsymbol{C}}(u_j)$,$\widetilde{\boldsymbol{A}}^c(u_j) \geqslant \widetilde{\boldsymbol{B}}^c(u_j)$,$\widetilde{\boldsymbol{B}}^c(u_j) \geqslant \widetilde{\boldsymbol{C}}^c(u_j)$,

$$c(\widetilde{\boldsymbol{C}}, \widetilde{\boldsymbol{A}}) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left[\frac{\widetilde{\boldsymbol{C}}(u_j) \wedge \widetilde{\boldsymbol{A}}(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{C}}(u_j)} \vee \frac{\widetilde{\boldsymbol{C}}^c(u_j) \wedge \widetilde{\boldsymbol{A}}^c(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{A}}^c(u_j)} \right] \leqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n} w_j \left[\frac{\widetilde{\boldsymbol{C}}(u_j) \wedge \widetilde{\boldsymbol{B}}(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{C}}(u_j)} \vee \frac{\widetilde{\boldsymbol{C}}^c(u_j) \wedge \widetilde{\boldsymbol{A}}^c(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{A}}^c(u_j)} \right] =$$
$$\sum_{j=1}^{n} w_j \left[\frac{\widetilde{\boldsymbol{C}}(u_j) \wedge \widetilde{\boldsymbol{B}}(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{C}}(u_j)} \vee \frac{\widetilde{\boldsymbol{C}}^c(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{A}}^c(u_j)} \right] \leqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n} w_j \left[\frac{\widetilde{\boldsymbol{C}}(u_j) \wedge \widetilde{\boldsymbol{B}}(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{C}}(u_j)} \vee \frac{\widetilde{\boldsymbol{C}}^c(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{B}}^c(u_j)} \right] =$$
$$\sum_{j=1}^{n} w_j \left[\frac{\widetilde{\boldsymbol{C}}(u_j) \wedge \widetilde{\boldsymbol{B}}(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{C}}(u_j)} \vee \frac{\widetilde{\boldsymbol{C}}^c(u_j) \wedge \widetilde{\boldsymbol{B}}^c(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{B}}^c(u_j)} \right] =$$

$c(\widetilde{\boldsymbol{C}}, \widetilde{\boldsymbol{B}})$,即 $c(\widetilde{\boldsymbol{C}}, \widetilde{\boldsymbol{A}}) \leqslant c(\widetilde{\boldsymbol{C}}, \widetilde{\boldsymbol{B}})$.

同理可证 $c(\widetilde{\boldsymbol{C}}, \widetilde{\boldsymbol{A}}) \leqslant c(\widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{A}})$. 证毕.

定理2　设 c 是 $\boldsymbol{F}(u)$ 上的包含度，则

(1) $s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}})=\sqrt{c(\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}})\cdot c(\widetilde{\boldsymbol{B}},\widetilde{\boldsymbol{A}})}$ 是贴近度；

(2) 若 $\widetilde{\boldsymbol{A}}\subseteq\widetilde{\boldsymbol{B}}$，$s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}})=\sqrt{c(\widetilde{\boldsymbol{B}},\widetilde{\boldsymbol{A}})}$ 是贴近度.

证明　(1) $s[c]$ 满足定义1中条件(i)～(iii)是显然的.

根据包含度的公理化定义，若 $\widetilde{\boldsymbol{A}}\subseteq\widetilde{\boldsymbol{B}}\subseteq\widetilde{\boldsymbol{C}}$，则 $c(\widetilde{\boldsymbol{C}},\widetilde{\boldsymbol{A}})\leqslant c(\widetilde{\boldsymbol{C}},\widetilde{\boldsymbol{B}})$，$c(\widetilde{\boldsymbol{C}},\widetilde{\boldsymbol{A}})\leqslant c(\widetilde{\boldsymbol{B}},\widetilde{\boldsymbol{A}})$，$c(\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}})=1$，$c(\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{C}})=1$. 于是 $s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}})=\sqrt{c(\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}})\cdot c(\widetilde{\boldsymbol{B}},\widetilde{\boldsymbol{A}})}=\sqrt{c(\widetilde{\boldsymbol{B}},\widetilde{\boldsymbol{A}})}\geqslant\sqrt{c(\widetilde{\boldsymbol{C}},\widetilde{\boldsymbol{A}})}=\sqrt{c(\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{C}})\cdot c(\widetilde{\boldsymbol{C}},\widetilde{\boldsymbol{A}})}=s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{C}})$.

同理可证 $s[c](\widetilde{\boldsymbol{B}},\widetilde{\boldsymbol{C}})\geqslant s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{C}})$，因此 $s[c]$ 满足定义1中条件(iv).

(2) 若 $\widetilde{\boldsymbol{A}}\subseteq\widetilde{\boldsymbol{B}}$，有 $c(\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}})=1$，$s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}})=\sqrt{c(\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}})\cdot c(\widetilde{\boldsymbol{B}},\widetilde{\boldsymbol{A}})}=\sqrt{c(\widetilde{\boldsymbol{B}},\widetilde{\boldsymbol{A}})}$. 证毕.

根据定理1与2，诱导出的贴近度公式为

$$s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}})=\left\{\left\{\sum_{j=1}^{n}w_j\left[\frac{\widetilde{\boldsymbol{A}}(u_j)\wedge\widetilde{\boldsymbol{B}}(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{A}}(u_j)}\vee\frac{\widetilde{\boldsymbol{A}}^{c}(u_j)\wedge\widetilde{\boldsymbol{B}}^{c}(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{B}}^{c}(u_j)}\right]\right\}\times\left\{\sum_{j=1}^{n}w_j\left[\frac{\widetilde{\boldsymbol{B}}(u_j)\wedge\widetilde{\boldsymbol{A}}(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{B}}(u_j)}\vee\frac{\widetilde{\boldsymbol{B}}^{c}(u_j)\wedge\widetilde{\boldsymbol{A}}^{c}(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{A}}^{c}(u_j)}\right]\right\}\right\}^{1/2}\tag{6}$$

当满足 $\widetilde{\boldsymbol{A}}\subseteq\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 时，诱导出的贴近度公式可简化为

$$s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}})=\left\{\sum_{j=1}^{n}w_j\left[\frac{\widetilde{\boldsymbol{B}}(u_j)\wedge\widetilde{\boldsymbol{A}}(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{B}}(u_j)}\vee\frac{\widetilde{\boldsymbol{B}}^{c}(u_j)\wedge\widetilde{\boldsymbol{A}}^{c}(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{A}}^{c}(u_j)}\right]\right\}^{1/2}=\left\{\sum_{j=1}^{n}w_j\left[\frac{\widetilde{\boldsymbol{A}}(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{B}}(u_j)}\vee\frac{\widetilde{\boldsymbol{B}}^{c}(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{A}}^{c}(u_j)}\right]\right\}^{1/2}\tag{7}$$

由此诱导出的两个贴近度公式既满足贴近度的公理化定义，又考虑了不同属性权重的大小，适用于诸如信用多属性评价一类问题的处理. 通过式(6)可以计算出任意两个企业间的信用贴近度，也可根据式(7)计算出每个企业的信用模糊向量与最理想的信用模糊向量之间的贴近度. 设 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$ 为企业 i 的信用模糊向量，$i=1,2,\cdots,m$，$\widetilde{\boldsymbol{B}}_v^{*}$ 为第 v 信用等级的属性模糊向量，$v=1,2,\cdots,q$，即信用等级共分为 q 个. 则可求出企业 i 关于各个信用等级的模糊向量贴近度的函数，如下式所示：

$$h(s_i)=h\{s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}}_i,\widetilde{\boldsymbol{B}}_1),s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}}_i,\widetilde{\boldsymbol{B}}_2),\cdots,s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}}_i,\widetilde{\boldsymbol{B}}_q)\}\tag{8}$$

2　模糊非线性规划模型的内点算法

基于包含度诱导出来的企业 i 关于各个信用等级的模糊向量贴近度的函数 $h(s_i)$，将为如下模糊非线性规划(模型(9))提供重要信息，特别是其中的信贷模糊约束.

考虑到银行信贷的目标与约束的实际，可建立如下模糊非线性规划模型进行优化：

$$\begin{aligned}\min\quad & f(\boldsymbol{X})\\ \text{s.t.}\quad & g_1(\boldsymbol{X})\leqslant b_1\\ & g_2(\boldsymbol{X})\ \widetilde{\leqslant}\ b_2\\ & \boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{9}$$

模型(9)中的目标函数根据实际要求可以选取收益最高、风险最低、机会损失最低等目标；其中第1个约束为信贷问题涉及到的非模糊约束，第2个约束为信贷模糊约束，函数 $h(s_i)$ 为其提供大量信息，各企业关于各个信用等级的模糊向量贴近度函数 $h(s_i)(i=1,2,\cdots,m)$ 的函数值不同，直接影响各企业对其贷款额约束条件限制的程度. 对模糊约束的隶属函数定义如下：

$$\tilde{g}_2(x_i)=\begin{cases}1; & g_2(x_i)\leqslant b_{2i}\\ 1-\dfrac{g_2(x_i)-b_{2i}}{h(s_i)b_{2i}}; & b_{2i}<g_2(x_i)\leqslant b_{2i}+h(s_i)b_{2i}\\ 0; & g_2(x_i)>b_{2i}+h(s_i)b_{2i}\end{cases}\tag{10}$$

在求解之前，应先对其进行处理，将模糊问题清晰化. 借鉴文献[10]中提出的方法，在约束集的 α- 截集水平下，满足对 $\forall i$，有 $\tilde{g}_2(x_i)\geqslant\alpha$，则模型(9)中的第2个约束可转换为

$$g_2(x_i)\leqslant b_{2i}+(1-\alpha)h(s_i)b_{2i};\ i=1,2,\cdots,m\tag{11}$$

针对上述模糊非线性模型，给出一种改进的内点算法，具体步骤如下：

步骤1　取 $\lambda_1>0$(这里取 $\lambda_1=1$)，允许误差 $\varepsilon>0$.

步骤2　找一可行内点 $\boldsymbol{X}^{(0)}\in\boldsymbol{R}_0$，令 $k=1$，$t=1$，$\alpha_t=1$. $\boldsymbol{R}_0=\{\boldsymbol{X}\mid g_1(\boldsymbol{X})\leqslant b_1,g_2(\boldsymbol{X})\leqslant b_2+(1-\alpha_t)h(s_i)b_2,\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0},i=1,2,\cdots,m\}$.

步骤3　构造障碍函数，如下式所示：

$$\varphi(\boldsymbol{X},\lambda_k,\alpha_t)=f(\boldsymbol{X})+\lambda_k\frac{1}{b_1-g_1(\boldsymbol{X})}+$$

$$\lambda_k\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{b_2+(1-\alpha_t)h(s_i)b_2-g_2(\boldsymbol{X})} \tag{12}$$

步骤4 以 $\boldsymbol{X}^{(k-1)}\in\boldsymbol{R}_0$ 为初始点,在 $\boldsymbol{R}_0$ 内对障碍函数进行无约束极小化,如下式所示:

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{R}_0} & \varphi(\boldsymbol{X},\lambda_k,\alpha_t)=\varphi(\boldsymbol{X}^{(k)},\lambda_k,\alpha_t)\\ & \boldsymbol{X}^{(k)}=\boldsymbol{X}(\lambda_k,\alpha_t)\in\boldsymbol{R}_0\end{cases} \tag{13}$$

步骤5 依据式(14)检验是否满足收敛准则,若满足,则以 $\boldsymbol{X}^{(k)}$ 为原问题的近似最优解,停止;否则到步骤6.

$$\lambda_k\frac{1}{b_1-g_1(\boldsymbol{X})}+\lambda_k\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{b_2+(1-\alpha_t)h(s_i)b_2-g_2(\boldsymbol{X})}\leqslant\varepsilon \tag{14}$$

步骤6 取 $\lambda_{k+1}<\lambda_k$(这里取 $\lambda_{k+1}=\lambda_k/5$),令 $k=k+1$,转向步骤3继续迭代,若仍得不到近似最优解,到步骤7.

步骤7 取 $\alpha_{t+1}=\alpha_t-\xi$(这里取 $\xi=0.25$),令 $t=t+1$,转向步骤3继续迭代.

3 算法的收敛性

非线性规划问题内点算法及其收敛性已得到了深入的研究,如文献[11]建立了相应于模型(9)中未考虑模糊约束的两种形式的内点算法,并且从理论上证明了在一般的非线性规划问题假设条件下,这两种形式分别具有局部收敛性和全局收敛性结果.文献[12]建立了一个求解模型(9)中未考虑模糊约束的内点势减算法,从理论上证明了该算法产生的序列全局收敛于模型(9)中未考虑模糊约束的KKT点.本文所提出的内点算法的收敛性证明只需将模型(9)中模糊约束替换为式(11)即可参照文献[11]证得.

4 算 例

某银行对企业进行的信用评价有4个信用评价属性(资产负债率、流动比率、债务如期偿还率、利润率),本月共有3个企业申请贷款.运用式(1)与(2)对3个企业在4个信用评价属性下进行模糊化处理,得到3个企业的信用模糊向量分别为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_1=(1\quad 1\quad 0.85\quad 1)$,$\widetilde{\boldsymbol{A}}_2=(0\quad 0.7\quad 1\quad 0.75)$,$\widetilde{\boldsymbol{A}}_3=(0.5\quad 0\quad 0\quad 0)$.若信用等级分3级,$\widetilde{\boldsymbol{B}}_1=(1\quad 1\quad 1\quad 1)$,$\widetilde{\boldsymbol{B}}_2=(0.5\quad 0.5\quad 0.5\quad 0.5)$,$\widetilde{\boldsymbol{B}}_3=(0\quad 0\quad 0\quad 0)$,4个信用评价属性的权重分别为0.3、0.2、0.3、0.2.

由于 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_1\subseteq\widetilde{\boldsymbol{B}}_1$,采用式(6)或(7),并考虑前文规定 $\frac{0}{0}=1$,$s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}}_1,\widetilde{\boldsymbol{B}}_1)$ 计算如下:

$$s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}}_1,\widetilde{\boldsymbol{B}}_1)=\left\{\sum_{j=1}^{n}w_j\left[\frac{\widetilde{\boldsymbol{A}}_1(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{B}}_1(u_j)}\vee\frac{\widetilde{\boldsymbol{B}}_1^{c}(u_j)}{\widetilde{\boldsymbol{A}}_1^{c}(u_j)}\right]\right\}^{1/2}=\left[0.3\times\left(\frac{1}{1}\vee\frac{0}{0}\right)+0.2\times\left(\frac{1}{1}\vee\frac{0}{0}\right)+0.3\times\left(\frac{0.85}{1}\vee\frac{0}{0.15}\right)+0.2\times\left(\frac{1}{1}\vee\frac{0}{0}\right)\right]^{1/2}=0.955^{\frac{1}{2}}=0.9772$$

同理,可计算得到 $s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}}_1,\widetilde{\boldsymbol{B}}_2)=0.8062$;$s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}}_1,\widetilde{\boldsymbol{B}}_3)=0.2121$;$s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}}_2,\widetilde{\boldsymbol{B}}_1)=0.7681$;$s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}}_2,\widetilde{\boldsymbol{B}}_2)=0.7856$;$s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}}_2,\widetilde{\boldsymbol{B}}_3)=0.7483$;$s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}}_3,\widetilde{\boldsymbol{B}}_1)=0.3873$;$s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}}_3,\widetilde{\boldsymbol{B}}_2)=0.8062$;$s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}}_3,\widetilde{\boldsymbol{B}}_3)=0.9220$.

为了便于计算,令 $h(s_i)=\{0.9s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}}_i,\widetilde{\boldsymbol{B}}_1)+0.5s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}}_i,\widetilde{\boldsymbol{B}}_2)+0.1s[c](\widetilde{\boldsymbol{A}}_i,\widetilde{\boldsymbol{B}}_3)\}/(0.9+0.5+0.1)$.由此得到3个企业关于各个信用等级的模糊向量贴近度为 $h(s_1)=0.87$,$h(s_2)=0.78$,$h(s_3)=0.57$,当 $h(s_i)>0.5$ 时,假设银行可以考虑放贷.

又已知本月银行的信贷总额度为5 000万元,对信用等级模糊向量贴近度 $h(s_i)$ 区间为[0.8,1]、[0.7,0.8)、[0.5,0.6)的贷款额度一般以2 000万元为上限基本数.模糊非线性规划模型(9)清晰化后可转化为如下模型(式(15)),其目标函数由3个公司的风险与银行利息收益比值之和构成,即体现银行信贷追求的风险最小、收益最大的目标,其中0.05为银行的基本利率,由于各公司的信用等级 $h(s_i)$ 不同,实际贷款利率需用系数 $2-h(s_i)$ 调整.

$$\begin{aligned}\min\quad & f=\frac{1}{1+\exp[h(s_1)]}\Big/[0.05\times(2-h(s_1))x_1]+\frac{1}{1+\exp[h(s_2)]}\Big/[0.05\times(2-h(s_2))x_2]+\frac{1}{1+\exp[h(s_3)]}\Big/[0.05\times(2-h(s_3))x_3]\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2+x_3=5\,000\\ & x_1\leqslant 2\,000+2\,000(1-\alpha)h(s_1)\\ & x_2\leqslant 2\,000+2\,000(1-\alpha)h(s_2)\\ & x_3\leqslant 2\,000+2\,000(1-\alpha)h(s_3)\\ & x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{aligned} \tag{15}$$

应用内点算法求得 $\alpha=0.75$,$f=0.008\,147$,

$x_1 = 1\ 555, x_2 = 1\ 585, x_3 = 1\ 860$. 从结果中可以看出，虽然企业 3 的信用级别并不如企业 1 与企业 2，但企业 3 贷款时，银行制定的贷款利率要高于前两个企业，在一定程度上回避了风险，同时企业 3 的信用等级达到贷款的最低信用等级要求（上文设定的 $h(s_i) > 0.5$），可以考虑适当给予企业 3 较多的贷款，由此，银行可以获得较高的收益.

5　结　论

模糊理论和方法与经典的非线性规划模型相结合，一方面能够提升复杂优化问题的模糊性描述的柔性，另一方面能够确保问题求解的精确性，两者优势互补，无论在理论上还是在实践中，都具有潜在的研究价值. 模糊贴近度与模糊包含度间具有密切关系，通过模糊包含度可以诱导出模糊贴近度. 本文提出了基于贴近度的模糊非线性规划模型，可以实现对于诸如信贷优化等复杂问题的科学化描述，其求解的内点算法的收敛性得以证明. 算例的应用结果进一步验证了本文所提出的基于贴近度的模糊非线性信贷优化模型及算法的有效性.

参考文献：

[1] 常大勇，张丽丽. 经济管理中的模糊数学方法[M]. 北京：北京经济学院出版社，1995：53-65

[2] 温熙森. 模式识别与状态监测[M]. 长沙：国防科技大学出版社，1997：55-59

[3] LIU Xue-cheng. Entropy distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations [J]. **Fuzzy Sets and Systems**, 1992, **52**(3)：305-318

[4] FAN Jiu-lun, XIE Wei-xin, PEI Ji-hong. Subsethood measures: new definitions [J]. **Fuzzy Sets and Systems**, 1999, **106**(3)：201-209

[5] 范九伦. 模糊熵理论[M]. 西安：西北大学出版社，1999：83-86

[6] 范九伦，吴成茂. 用于聚类有效性判定的包含度公式[J]. 模糊系统与数学，2002，**16**(1)：80-86

[7] 岳士弘，李　平. 一类广义模糊控制系统及其特征[J]. 应用数学学报，2003，**26**(3)：487-494

[8] 吴柏林，林玉钧. 模糊时间序列的分析与预测：以台湾地区加权指数为例[J]. 应用数学学报，2002，**25**(1)：67-76

[9] 庄新路，庄新田，黄小原. 基于 VAR 风险指标的投资组合模糊优化[J]. 数学的实践与认识，2003，**33**(3)：35-40

[10] 方述诚，汪定伟. 模糊数学与模糊优化[M]. 北京：科学出版社，1997：72-75

[11] EL-BAKRY A S, TAPA R A, TSUCHIYA T, *et al*. On the formulation and theory of the Newton interior-point method for nonlinear programming [J]. **Journal of Optimization Theory and Applications**, 1996, **89**(3)：507-541

[12] 贺素香. 非线性规划问题的一个内点势减算法的全局收敛性[J]. 浙江大学学报：理学版，2004，**31**(3)：250-252，266

Study of similarity measure-based fuzzy nonlinear optimization problem for credit loan

YU Zhao-ji*[1], HU Xiang-pei[1], MAO Qiang[2]

(1. Faculty of Management and Economics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. School of Administration, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

Abstract: The fuzzy vector of credit multi-feature evaluation was established, and the relation between fuzzy subsethood measure and similarity measure was analyzed. A calculation formula of subsethood measure was proposed, and then, the calculation formula of fuzzy similarity measure was induced so as to remedy the disadvantage of conventional ones. Furthermore, the fuzzy similarity measure-based credit evaluation function was established. On the basis of this, for the credit loan problem, the fuzzy nonlinear optimization model was established, the interior-point algorithm of the model was given, and its convergence was analyzed. The example results show that the similarity measure-based fuzzy nonlinear programming model was suitable for solving complex problems, such as credit loan optimization.

Key words: similarity measure; fuzzy; credit evaluation; nonlinear; optimization model