文章编号：1000-8608(2011)04-0621-04

基于 Black-Scholes 模型的期权定价新方法

沈玉波，张待见，宋立新*

（大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024）

摘要： 考虑到实际金融市场的不完备性以及收益率分布的厚尾性，基于经典 Black-Scholes 模型并运用函数的下凸性，期权定价公式 $H(a)=E[(X-a)^2]$ 被推广为 $H_k(a)=E[(X-a)^{2k}]$. 通过 DJSH（道琼斯上海）指数收益率的 GARCH 模型，并使用随机模拟的方法对这两个公式进行定价比较. 结果表明这种方法有效提高了定价，从而降低了风险.

关键词： Black-Scholes 公式；GARCH 模型；Girsanov 定理

中图分类号： O212.9　　**文献标志码：** A

0 引　言

次贷危机的蝴蝶效应引发全球经济的动荡不堪. 为了应付金融危机，全球性大规模联手救市展开，降息成为全球救市最直接的手段. 尽管金融危机最主要的原因不是金融衍生品的定价不足，但是若整个金融市场的衍生品定价提高，则会对金融危机有所缓解，特别是应对全球金融风暴这样的突发高风险事件.

为了期权卖出者将来不再因为突发高风险事件而破产，用新的定价方法来提高价格是有必要采取的手段，为此本文延续 Black-Scholes 模型简单易操作且结果精确的优点，并且考虑到金融风险分布的厚尾特性，引入 $H_k(a)=E[(X-a)^{2k}]$ $(k\geqslant 1)$ 来放大高风险突发事件在定价中的作用.

1 经典 Black-Scholes 模型

经典 Black-Scholes 模型的主要假设有[1~4]

(1)标的资产的价格服从对数正态分布，μ 和 σ 为常数；

(2)标的资产允许卖空；

(3)不存在无风险套利机会；

(4)资产交易是连续的；

(5)没有交易费用或税收，所有资产高度可分；

(6)资产在有效期内无红利支付；

(7)无风险利率 r 为常数，且对所有到期日都相同.

在以上假设下，完备的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$ 上，资产价格 S_t 模型定义如下：

$$\mathrm{d}S_t=S_t(\mu(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}W_t),\ \mathrm{d}B_t=B_t r(t)\mathrm{d}t,$$

$$S_t^*=B_t^{-1}S_t,\ \mathrm{d}S_t^*=S_t^*\sigma(t)\mathrm{d}\hat{W}_t$$

基于资产价格 S_t 的欧式看涨期权定价公式如下：

$$C_t=E_Q(\mathrm{e}^{-r(T-t)}(S_T-K)_+\mid\mathscr{F}_t)=S_t\Phi(d_1)-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2)\tag{1}$$

其中 $d_1=\dfrac{\ln(S_t/K)+(T-t)(r+\sigma^2/2)}{\sqrt{T-t}\sigma}$，$d_2=d_1-\sqrt{T-t}\sigma$. W_t 是测度 $\boldsymbol{P}$ 下的标准布朗运动；$(\mathscr{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是关于 W_t 的自然滤子；$\boldsymbol{Q}$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的等价鞅测度，$\hat{W}_t$ 是测度 $\boldsymbol{Q}$ 下的标准布朗运动；$\mu(t)$ 是资产 S_t 的平均收益率，$\sigma(t)$ 是波动率，$r(t)$ 是无风险收益率，B_t 是无风险资产账户，S_t^* 是折现资产价格；C_t 表示欧式看涨期权的价格，T 表示欧式看涨期权的执行时刻，K 表示欧式看涨期权的执行价格，$\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布函数.

同样欧式看跌期权定价公式如下：

$$P_t=E_Q(\mathrm{e}^{-r(T-t)}(K-S_T)_+\mid\mathscr{F}_t)=-S_t\Phi(-d_1)+K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(-d_2)\tag{2}$$

下面给出一个很重要的定理，主要用于计算

收稿日期：2009-06-04；　修回日期：2011-05-05.
作者简介：沈玉波(1969-)，女，副教授；宋立新*(1966-)，男，教授，博士生导师，E-mail: lxsong@dlut.edu.cn.

过程中的测度变换.

定理 1(Girsanov Theorem)[5]　在完备的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$上,假设

$$Z_T(\boldsymbol{X})\triangleq \mathrm{e}^{\int_0^T \boldsymbol{X}_t^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t-\frac{1}{2}\int_0^T \boldsymbol{X}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_t\mathrm{d}t} \tag{3}$$

在测度$\boldsymbol{P}$下是一个鞅,$\boldsymbol{W}_t$是$(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$上的一个$D$维布朗运动,$\boldsymbol{X}_t$是$D$维可测适应过程且

$$P\left(\int_0^T |X_{it}|^2\mathrm{d}t<+\infty\right)=1;$$
$$1\leqslant i\leqslant D,\ 0\leqslant T<+\infty$$

定义测度$\boldsymbol{Q}$使得

$$Q(A)=E(I_A Z_T(\boldsymbol{X}));\ A\in\mathscr{F}_T$$

其中I_A为A的示性函数.定义一个过程

$$\hat{\boldsymbol{W}}_t=(\hat{W}_{1t}\quad \hat{W}_{2t}\quad\cdots\quad \hat{W}_{Dt});\ 0\leqslant t<+\infty$$
$$\hat{W}_{it}=W_{it}-\int_0^t X_{is}\mathrm{d}s;\ 1\leqslant i\leqslant D,\ 0\leqslant t<+\infty$$

则对每一个固定的$T\in[0,+\infty)$,$\boldsymbol{W}_t$是$(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{Q})$上一个$D$维布朗运动.

2　基于经典 Black-Scholes 模型的新定价方法

2.1　新方法的提出及证明

下面从数学的角度来分析一下经典的 Black-Scholes 模型定价公式,以欧式看涨期权为例,用X代表$(S_T-K)_+$,$E[(S_T-K)_+]$事实上就是函数

$$H(a)=E[(X-a)^2] \tag{4}$$

的极小值点.将式(4)一般化,利用

$$H_k(a)=E[(X-a)^{2k}] \tag{5}$$

的最小值点a_k作为期权的定价,由下凸函数的性质可以肯定这样的定价要比原定价高,但尚需通过股票指数 DJSH(道琼斯上海)收益率的 GARCH 模型随机模拟,分别应用两个公式进行定价比较.

下面仍给市场以经典模型的假设,资产价格服从对数正态过程,分析$H_k(a)=E[(X-a)^{2k}]$$(k=1,2,\cdots)$的函数性态,有

(1)$H(a)=E[|X-a|]$时,最小值点α是X的中位数,此时尾部对α没有影响;

(2)$H_1(a)=E[(X-a)^2]$时,最小值点β是EX,尾部对β产生影响;

(3)$H_k(a)=E[(X-a)^{2k}]$,$a\geqslant 0$,$k=1,2,\cdots$时,假设$EX^{2k}<+\infty$,由控制收敛定理[6,7]可推得$H_k(a)=E[(X-a)^{2k}]$关于a可导,由

$$H_k(0)=EX^{2k}>0,\ H_k(+\infty)=+\infty,$$
$$H_k'(0)=-2kEX^{2k-1}<0,\ H_k''(a)>0$$

可知$H_k(a)=E[(X-a)^{2k}]$在正半轴上有唯一的最小值点a_k.换个角度来说a_k为方程$H_k'(a)=-2kE[(X-a)^{2k-1}]=0$的实根,即$E[(X-a)^{2k-1}]=0$的实根.

由以上判断可知:正半轴上根是唯一的,当$a<0$时,$H_k'(a)=-2kE[(X-a)^{2k-1}]<0$恒成立,所以方程无负实根.综上$H_k'(a)=0$有唯一的正实根$a_k$.这样就可以用$a_k$作为期权的定价.

资产价格服从模型仍是

$$\mathrm{d}S_t=S_t(\mu(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}W_t)$$

利用定理 1 进行测度变换得到折现价格过程满足

$$\mathrm{d}S_t^*=S_t^*\sigma(t)\mathrm{d}\hat{W}_t$$

其中$\hat{W}_t$在测度$\boldsymbol{Q}$下为标准布朗运动,S_t^*在$\boldsymbol{Q}$下为鞅.

对于$\mathrm{d}S_t^*=S_t^*\sigma\mathrm{d}\hat{W}_t$,由伊藤定理得

$$\ln\frac{S_T^*}{S_t^*}\sim N\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t),\sigma^2(T-t)\right)$$

按上面的思路构造函数并计算:

$$H_k(a)=E[\mathrm{e}^{-r(T-t)}((S_T-K)_+-a)^{2k}]=$$
$$\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[\int_{-d_2}^{+\infty}(\mathrm{e}^{r(T-t)}S_t\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T-t}\hat{y}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}-K-a)^{2k}\Phi(\hat{y})\mathrm{d}\hat{y}+\int_{-\infty}^{-d_2}a^{2k}\Phi(\hat{y})\mathrm{d}\hat{y}\right]$$

其中$d_2=\dfrac{\ln(S_t/K)+r(T-t)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$.

这样就可以得到其导数的表达式,但是比较复杂,下面具体就$k=2$时进行分析.$H_2(a)$的导数为三次多项式,由三次方程的公式解可得卡尔丹公式$x^3+px+q=0$的解为

$$\begin{cases}x_1=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}\\ x_2=u\omega+v\omega^2\\ x_3=u\omega^2+v\omega\end{cases}$$

其中$u=-\dfrac{1}{2}q+\sqrt{\dfrac{1}{4}q^2+\dfrac{1}{27}p^3}$,$v=-\dfrac{1}{2}q-\sqrt{\dfrac{1}{4}q^2+\dfrac{1}{27}p^3}$,$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.有了这个公式,对于$x^3+a_0x^2+b_0x+c_0=0$就可以通过$x=y-\dfrac{1}{3}a_0$进行变换,卡尔丹公式中方程系数对应有

$$\begin{cases} p = b_0 - \dfrac{a_0^2}{3} \\ q = \dfrac{a_0^3 - 3a_0 b_0 + 9c_0}{9} \end{cases} \tag{6}$$

当 $k=2$ 时，

$$\begin{aligned} H_2'(a) = & E[\mathrm{e}^{-r(T-t)}((S_T-K)_+ - a)^4]' = \\ & -4E[\mathrm{e}^{-r(T-t)}((S_T-K)_+ - a)^3] = \\ & -4\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Big[\int_{-d_2}^{+\infty}(\mathrm{e}^{r(T-t)}S_t\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T-t}\hat{y}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} - \\ & K-a)^3\Phi(\hat{y})\mathrm{d}\,\hat{y} - \int_{-\infty}^{-d_2}a^3\Phi(\hat{y})\mathrm{d}\,\hat{y}\Big] \end{aligned}$$

令 $\Delta = K + a$ 整理上式得

$$\begin{aligned} H_2'(a) = & -4\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Big[\int_{-d_2}^{+\infty}(\mathrm{e}^{r(T-t)}S_t\mathrm{e}^{\sigma\hat{y}\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} - \\ & \Delta)^3\Phi(\hat{y})\mathrm{d}\,\hat{y} + \int_{-\infty}^{-d_2}(K-\Delta)^3\Phi(\hat{y})\mathrm{d}\,\hat{y}\Big] = \\ & -4\mathrm{e}^{-r(T-t)}(\Delta^3 + a_0\Delta^2 + b_0\Delta + c_0) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 = & -3[S_t\mathrm{e}^{r(T-t)}\Phi(d_2+\sigma\sqrt{T-t}) + \\ & K\Phi(-d_2)] \\ b_0 = & -3[S_t^2\mathrm{e}^{(2r+\sigma^2)(T-t)}\Phi(d_2+2\sigma\sqrt{T-t}) + \\ & K^2\Phi(-d_2)] \\ c_0 = & -[S_t^3\mathrm{e}^{3(r+\sigma^3)(T-t)}\Phi(d_2+3\sigma\sqrt{T-t}) + \\ & K^3\Phi(-d_2)] \end{aligned}$$

令 $H_2'(a)=0$，由前面的分析知，此方程存在唯一正实根. 令 $p = b_0 - \dfrac{a_0^2}{3}$，$q = \dfrac{a_0^3 - 3a_0b_0 + 9c_0}{9}$，则方程

$$\Delta^3 + p\Delta + q = 0$$

存在唯一的正实根，即

$$\Delta_1 = \left(-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

从而看涨期权定价为

$$C_{tn} = \Delta_1 - K$$

同样对于欧式看跌期权有

$$\begin{aligned} H_k(a) = & E[\mathrm{e}^{-r(T-t)}((K-S_T)_+ - a)^{2k}] = \\ & \mathrm{e}^{-r(T-t)}\Big[\int_{-\infty}^{-d_2}(K-a-S_t\mathrm{e}^{r(T-t)} \times \\ & \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T-t}\hat{y}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)})^{2k}\Phi(\hat{y})\mathrm{d}\,\hat{y} + \\ & \int_{-d_2}^{+\infty}a^{2k}\Phi(\hat{y})\mathrm{d}\,\hat{y}\Big] \end{aligned}$$

当 $k=2$ 时，令 $\Delta = K - a$，则

$$\begin{aligned} H_2'(a) = & E[\mathrm{e}^{-r(T-t)}((K-S_T)_+ - a)^4]' = \\ & -4E[\mathrm{e}^{-r(T-t)}((K-S_T)_+ - a)^3] = \\ & -4\mathrm{e}^{r(T-t)}\Big[\int_{-\infty}^{-d_2}(\Delta - \mathrm{e}^{r(T-t)} \times \\ & S_t\mathrm{e}^{\sigma\hat{y}\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)})^3\Phi(\hat{y})\mathrm{d}\,\hat{y} + \\ & \int_{-d_2}^{+\infty}(K-\Delta)^3\Phi(\hat{y})\mathrm{d}\,\hat{y}\Big] = \\ & -4\mathrm{e}^{-r(T-t)}(\Delta^3 + a'\Delta^2 + b'\Delta + c') \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} a' = & -3[S_t\mathrm{e}^{r(T-t)}\Phi(-(d_2+\sigma\sqrt{T-t})) - \\ & K\Phi(d_2)] \\ b' = & 3[S_t{}^2\mathrm{e}^{(2r+\sigma^2)(T-t)}\Phi(-(d_2+2\sigma\sqrt{T-t})) - \\ & K^2\Phi(d_2)] \\ c' = & -[S_t{}^3\mathrm{e}^{3(r+\sigma^3)(T-t)}\Phi(-(d_2+3\sigma\sqrt{T-t})) - \\ & K^3\Phi(d_2)] \end{aligned}$$

令 $p' = b' - \dfrac{a'^2}{3}$，$q' = \dfrac{a'^3 - 3a'b' + 9c'}{9}$，则方程

$$\Delta^3 + p'\Delta + q' = 0$$

存在唯一的正实根，即

$$\Delta_2 = \left(-\frac{q'}{2} + \sqrt{\frac{q'^2}{4}+\frac{p'^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q'}{2} - \sqrt{\frac{q'^2}{4}+\frac{p'^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

从而看跌期权的定价为

$$P_{tn} = K - \Delta_2$$

2.2　新方法下看涨-看跌期权平价关系

对于两个相同有效期 $T-t$，相同敲定价格 K 的欧式看涨和看跌期权有平价公式

$$C_t - P_t = S_t - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}$$

新定价的欧式看涨-看跌期权平价关系为

$$\begin{aligned} C_{tn} - P_{tn} = & \Delta_1 - K - (K - \Delta_2) = \\ & \Delta_1 + \Delta_2 - 2K \end{aligned}$$

3　随机模拟

对于定价新公式，可以选择不同的 k，随着 k 的增大，突发事件的放大作用也增大，这正是所想要的结果. 本文以 $k=2$ 为例，采用随机模拟的方法[8]，以两年期的 DJSH 指数的欧式看涨期权为例，分别使用 Black-Scholes 公式和基于 Black-Scholes 模型的新定价公式为它定价并进行比较.

GARCH 模型一定程度地反映现实市场的不完备性，并且运用计量经济软件 Eviews 可以很方

便地得到，因此采用DJSH（2006～2009）的数据，用GARCH(1,1)模型对DJSH指数的对数日收益率建模．用估计好的对数日收益率的GARCH(1,1)模型模拟出DJSH指数的1 000个日价格，然后对基于该指数的两年期欧式看涨期权进行定价．

设定常用的无风险年收益率 $r=0.05$，$T=720$ d，即 2 a，选择两个执行价格 $K_1=276.00$，$K_2=278.00$，分别用式(5)和经典Black-Scholes模型进行定价，计算得到定价的平均价格和价格的标准差，为了明确比较，列成表1．

表1 定价的平均价格和价格标准差

Tab.1 Mean price and its standard deviation of option pricing

应用公式	$K_1=276.00$		$K_2=278.00$	
	平均价格	标准差	平均价格	标准差
Black-Scholes公式	27.372 201 81	1.743 521 672	25.562 526 97	1.751 301 921
新定价公式	27.818 447 18	0.620 262 322	25.818 447 18	0.623 029 379

从表1中可以看出，新公式下期权平均定价有所提高，而且标准差减少了很多，这正是期望得到的．

4 结 语

本文对Black-Scholes定价公式进行了推广得到了新定价公式．实例模拟表明：新的期权定价公式放大了突发高风险事件的作用，有效提高了定价，并且这种定价没有因为高风险突发事件增大定价的标准差，从而降低了风险．

从公式的得出过程来看，新定价公式不仅适用于基于股票的期权定价，且由于金融衍生品定价的前提和市场环境都是相似的，可以将新方法推广应用于各种金融衍生产品．

参考文献：

[1] 朱浩民．衍生性金融商品[M]．北京：中国人民大学出版社，2005

[2] 姜礼尚．金融衍生产品定价的数学模型与案例分析[M]．北京：高等教育出版社，2004

[3] HULL J C，ZAGRODNY D. **Option，Futures，and Other Derivatives** [M]. 5th ed. Beijing：Huaxia Publishing House，2000

[4] BÜHLMANN H. **Mathematical Methods in Risk Theory** [M]. New York：Springer，1970

[5] 胡必锦，朱自清．鞅分析及其应用[M]．武汉：华中科技大学出版社，1988

[6] 程士宏．测度论与概率论基础[M]．北京：北京大学出版社，2006

[7] 汪嘉冈．现代概率论基础[M]．上海：复旦大学出版社，1988

[8] 邓留宝，刘柏年，杨桂元．Matlab与金融模型分析[M]．合肥：合肥工业大学出版社，2007

A new method of option pricing based on Black-Scholes model

SHEN Yu-bo， ZHANG Dai-jian， SONG Li-xin*

(School of Mathematical Sciences，Dalian University of Technology，Dalian 116024，China)

Abstract：Actual financial markets are incompleted and distributions of yield rate are fat-tailed，so based on the classical Black-Scholes model and using downward convex property of function，option pricing formula $H(a)=E[(X-a)^2]$ is generalized to $H_k(a)=E[(X-a)^{2k}]$. With the GARCH model of DJSH rate and by using the method of stochastic simulation，effects of the two pricing formulas are compared. The results show that the new formula of option pricing effectively increases the price and reduces the risk.

Key words：Black-Scholes formula；GARCH model；Girsanov theorem