

小木球在固液两相流中上升规律研究及 Magnus 力测量

李维仲*, 姜远新

(大连理工大学 海洋能源利用及节能教育部重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 提出了一种可视化实验和计算机图像处理技术, 目的是研究小木球在静止液体中自由上升的规律和测量 Magnus 力的大小. 实验结果表明, 不同小木球在开始上升后的很短时间内, 水平方向和竖直方向的速度分量都会达到一个稳定的最大值, 随后以这个最大速度匀速上升. 小木球处于稳定上升阶段时所受 Magnus 力的大小是在对小木球的竖直方向和水平方向速度分量的大小及小木球自旋角速度大小测量之后通过计算得到的.

关键词: 理论分析; 照相法; Magnus 力; 自旋角速度

中图分类号: TV142 **文献标志码:** A

0 引言

固液两相流通常是指固体颗粒和液体颗粒混合在一起共同流动^[1], 其在自然界和工业上都广泛存在, 例如夹带泥沙的江、河及海水, 工业中广泛使用的水力输送, 矿浆、纸浆、胶浆等的流动等. 此外, 污水处理与排放中的污水管内的流体流动也属于固液两相流范畴. 因此, 对固液两相流的研究意义重大. 而对于运动中的固体颗粒进行受力分析研究是固液两相流研究领域的一个重要分支^[2].

随着计算机技术的迅速发展, 目前, 已经有研究者采用数值模拟方法分析了方管内固液两相流特性^[3]、大颗粒流化床颗粒受力^[4]等问题, 但是, 数值模拟方法也有其局限性和弊端, 由于依赖于数学模型的采用, 模拟结果与实验结果存在一定的偏差. 实验方面, 随着现代科技的进步, 流体可视化技术得到了飞速发展, 这就为测量固液两相流的速度场带来了生机, 并且为颗粒在运动中的受力分析研究奠定了基础. 根据实验原理和手段的不同, 实验方法主要包括以下几种: 第一种是根据光纤信号通过计算获得固体颗粒速度的光纤测定法^[5]. 第二种是利用粒子图像测速技术(PIV)对固液两相流场的速度场进行非接触式的瞬时测量^[6], 它在示踪粒子流动显示的基础上, 吸收了光学技术、图像处理等技术. PIV 测量技术不仅能显

示流场的物理形态, 而且能够提供全流场流动的瞬时信息. 第三种方法就是高速摄影技术, 它是以极大的时间分辨率对颗粒相运动进行拍摄并记录的过程. 通过分析颗粒相在不同图片上运动状态从而得到其运动参数.

在固液两相流的测量实验中, 颗粒的速度测量无疑是实验的一个难点, 本文利用高速摄影方法, 采用多个不同的小木球模拟大颗粒在静止稳态流场中上升的两相流运动过程, 并对运动过程进行研究和分析, 以获得小木球在静止液体中上升的运动轨迹; 再通过计算机图像处理技术对轨迹图像进行处理, 从而获得小木球在上升过程中的速度值, 然后通过计算, 得到不同的小木球在静止流体中所受 Magnus 力的大小.

1 理论分析和数学建模

1.1 Magnus 力

固体颗粒在流场中以一定的角速度 ω 旋转时, 会产生一个与相对速度 $(\mathbf{v}_c - \mathbf{v}_p)$ 互相垂直、由逆流侧指向顺流侧方向的升力, 这个力就是 Magnus 力, 其表达式如下:

$$F_M = \pi r_p^3 \rho_f \omega (\mathbf{v}_c - \mathbf{v}_p) \quad (1)$$

式中: \mathbf{v}_c 为球心处测量的流体速度; ω 为球形颗粒旋转的角速度; ρ_f 为流体密度; r_p 为颗粒半径; \mathbf{v}_p

为颗粒速度.

由 Magnus 力计算公式可知, Magnus 力大小与颗粒半径、液体密度、颗粒自旋角速度以及颗粒运动速度有关. 对于在液体中上升的颗粒而言, 只要求出颗粒的运动速度以及已知颗粒的自旋角速度就能获得颗粒所受 Magnus 力的大小. 所以本文重点在于颗粒运动速度及自旋角速度的测量.

1.2 竖直方向运动微分方程

在竖直方向上, 颗粒受到的力为 Stokes 阻力、附加质量力、压差力和重力等, 如图 1 所示. 将竖直方向受力代入运动方程, 得到在竖直方向上颗粒运动微分方程为

$$m_p \frac{du_p}{dt} = -\frac{1}{2} C_D \pi r_p^2 \rho_f u_p^2 - \frac{2}{3} \pi r_p^3 \rho_f \frac{du_p}{dt} + \frac{4}{3} \pi r_p^3 g (\rho_f - \rho_p) \quad (2)$$

式中: C_D 为 Stokes 阻力系数.

求解式(2) 得到

$$u_p = g \zeta_1 \tau_v \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\zeta_2 \tau_v}\right) \right] \quad (3)$$

式中: $\tau_v = \tau_{v,0} / f(Re)$, 为速度弛豫时间, $\tau_{v,0} = \rho_p d^2 / 18\mu = 2\rho_p r_p^2 / 9\mu$; $\zeta_1 = \frac{\rho_f}{\rho_p} - 1$; $\zeta_2 = 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_f}{\rho_p}$.

从方程解的形式可以看出, 颗粒竖直方向的上升速度 u_p 随时间 t 的增加逐渐增大, 最终会达到最大.

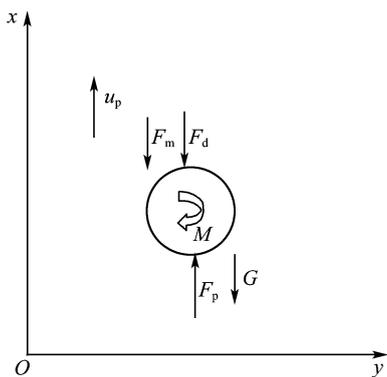


图 1 颗粒竖直方向受力

Fig. 1 Vertical forces of the particle

1.3 水平方向运动微分方程

图 2 给出了颗粒在水平方向的受力情况. 在水平方向上, 颗粒受到的作用力包括升力、附加质量力、Stokes 阻力、Saffman 力、Magnus 力^[7]等. 本文中由于固体颗粒的运动范围远离固体边界, Saffman 力和升力可以忽略不计. 颗粒在水平方

向上受到的作用力仅为附加阻力、Magnus 力和附加质量力.

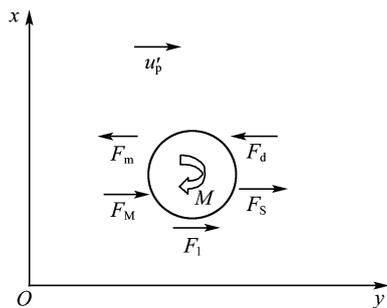


图 2 颗粒水平方向受力

Fig. 2 Horizontal forces of the particle

图 3 给出了 Magnus 力方向与颗粒运动方向的关系, 将 Magnus 力沿水平方向和竖直方向进行分解, 则 Magnus 力的水平方向的分量可以表示为

$$F'_M = F_M \cos \theta = \pi r_p^3 \rho_f \omega (v_c - v_p) \cos \theta$$

其中 $(v_c - v_p) \cos \theta$ 为球形颗粒在流体中运动竖直方向的相对速度分量 u_p , 将水平方向受力代入运动微分方程得

$$m_p \frac{du'_p}{dt} = -\frac{1}{2} C_D \pi r_p^2 \rho_f u_p'^2 - \frac{2}{3} \pi r_p^3 \rho_f \frac{du'_p}{dt} + \pi r_p^3 \rho_f \omega u_p \quad (4)$$

式中: u'_p 为颗粒水平方向速度分量; ω 为颗粒自旋角速度.

求解式(4) 得到

$$u'_p = W - \left(W + \frac{W}{\zeta_2 \tau_v} t \right) \exp\left(-\frac{t}{\zeta_2 \tau_v}\right) = W \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau_v} \right) \exp\left(-\frac{t}{\zeta_2 \tau_v}\right) \right] \quad (5)$$

其中 $W = \frac{3}{4} \zeta_1 (\zeta_1 + 1) \omega g \tau_v^2$.

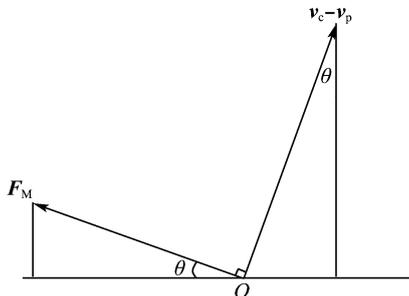


图 3 Magnus 力方向与颗粒运动方向关系
Fig. 3 The relationship between the orientation of Magnus force and particle moving direction

由式(5)可知: 颗粒的水平方向速度分量会随时间 t 的增加而增大, 并且最终达到一个极大值 W .

2 实验系统及研究方法

2.1 实验系统及装置

本实验的主要设备有高速摄影仪、图像采集用计算机以及可视化实验台。实验系统装置图如图 4 所示。由有机玻璃组成的实验容器的大小为 300 mm×300 mm×2 000 mm。容器的下端被固定在钢结构底座上；实验中采用的液体从位于容器上侧的进水口注入。容器下部有一个通径为 32 mm，用来保证固体颗粒能从容器底部静止上浮的球阀。此外，在容器下面还设置了一个用来排放实验液体的放水口。实验过程中，高速摄影仪的拍摄速度为 62~3 200 f/s，最大分辨率为 1 024×768。

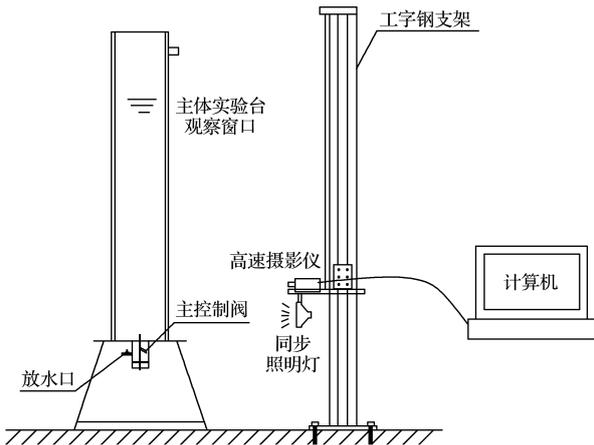


图 4 实验装置示意图

Fig. 4 Sketch of the test equipment

实验采用的液体为 20 °C 的水，固体颗粒采用 4 个不同直径、密度的小木球，如表 1 所示。

表 1 小木球的密度和直径

Tab. 1 Density and diameter of the wooden ball

编号	直径/cm	密度/(kg·m ⁻³)
A 球	2.74	766.3
B 球	2.50	662.8
C 球	2.48	446.0
D 球	2.42	594.6

2.2 研究方法

实验方法是通过采用高速摄影仪多次($n > 5$)测量记录小木球在水中运动状况，然后运用软件对所得小木球运动轨迹进行线性化处理，分别计算得到小木球在不同时刻的竖直和水平速度以及小木球自旋角速度，然后计算小木球在水中上升稳定阶段所受 Magnus 力的大小。

在拍摄小木球运动轨迹之前，采用其中一个直径为 25.0 mm 的小木球进行线性标定(见图 5)，并通过与标定小木球的比较以及在主体实验台中放入的刻度尺判断所拍摄图片中小木球尺寸及上升高度。

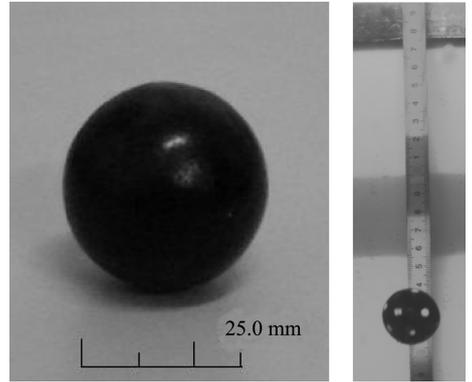


图 5 进行线性标定的小木球及刻度尺

Fig. 5 Linear calibrated wooden ball and measuring scale

3 实验结果和分析

3.1 竖直速度分量的确定

利用高速摄影仪记录小木球上升所需的时间，可以计算出小木球在上升阶段时各段(10 cm)的平均速度。结果如图 6 所示。

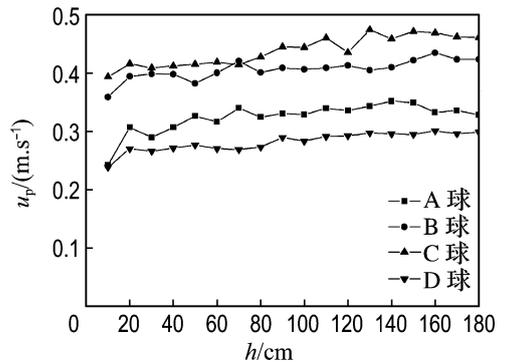


图 6 小木球的竖直速度分量

Fig. 6 The vertical velocity component of wooden ball

从图 6 中可以看出，正如前文理论分析的那样，小木球上升到一定高度后，速度基本稳定不变。

3.2 水平速度分量的确定

图 7 为小木球上升过程图像的处理效果图。图 7(b)为不同小木球在稳定阶段时的上升图像，可以看出，小球在上升一定高度后，水平方向运动呈左右均匀摆动。从图 7(c)可以看出，小木球在

水平方向的运动为匀速圆周运动. 小木球从点 A 经过 0.88 s 后运动到点 B, 在水平方向上角度改变 180°. 小木球的初始半径是 13.60 cm, 根据小球不同时刻的位置, 确定小木球在水平方向的实际运动半径为 39.4 cm, 通过计算得到小木球水

平方向的实际运动半径为 7.02 cm, 则小木球的线速度 $v = \frac{\pi}{0.88} \times 7.02 \times 10^{-2} = 0.251 \text{ m/s}$. 同理, 采用同样方法计算得出其他各个小木球达到稳定上升时的平均水平速度(如表 2 所示).

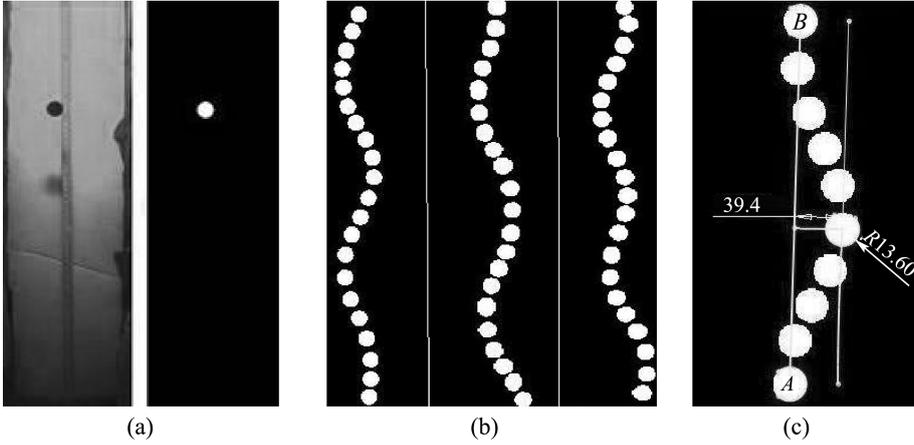


图 7 小木球运动轨迹图像处理过程

Fig. 7 Image processing of wooden ball's trajectory

表 2 小木球水平速度、自旋角速度及 Magnus 力

Tab. 2 Horizontal velocity, spinning angle velocity and Magnus force of the wooden ball

编号	水平速度/ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	角速度/ ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)	实验测量 F_M/N
A 球	0.340	3.474	0.013 3
B 球	0.345	3.520	0.011 2
C 球	0.140	3.860	0.010 9
D 球	0.251	4.020	0.008 4

由图 8 可以看出, 小木球在上升一定高度后, 水平速度基本稳定, 这与前面分析小球上升一定高度后水平方向可视为匀速圆周运动的结论相吻合.

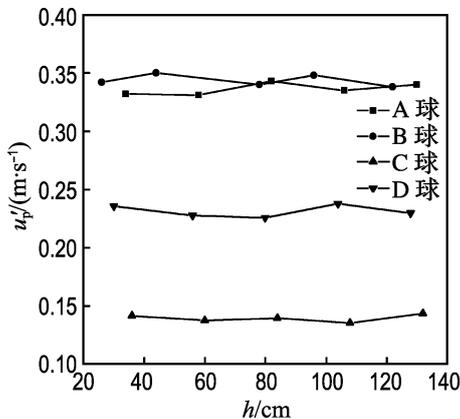


图 8 小木球水平速度测量值

Fig. 8 Measured values of the horizontal velocity of wooden ball

3.3 小木球自旋角速度 ω 的测量

在实验前期准备中, 对小木球进行点的标记. 实验中利用高速摄影仪记录不同时刻标记点的位置, 然后按照图 9 示意的的方法, 计算得到小木球的自旋角速度 ω (见表 2).

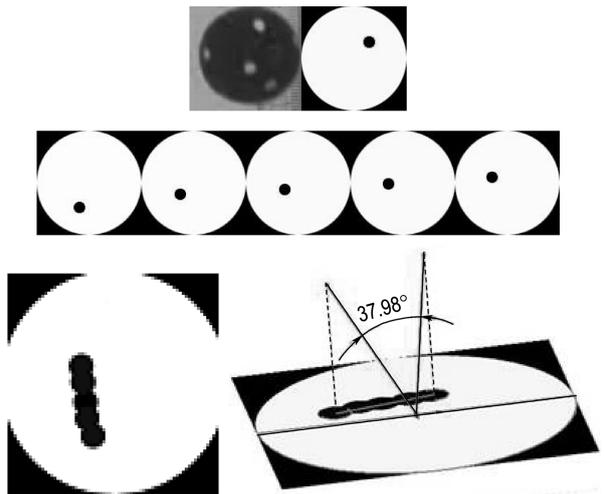


图 9 小木球自旋角速度测量

Fig. 9 Measurement of wooden ball's spinning angle velocity

3.4 计算 Magnus 力大小

由于小球在上升初期处于加速过程, 受力情况较为复杂, 本文只研究小木球上升达到稳定后

Magnus 力的大小. 分别将实验所得的水平和竖直速度大小, 以及小木球的自旋角速度 ω 等物理量代入 Magnus 力计算公式, 可以得到小木球在稳定阶段时所受 Magnus 力的大小, 其中小木球的速度由前文已求得的竖直速度和水平速度计算获得. 各个小木球稳定阶段所受 Magnus 力大小如表 2 所示.

4 结 论

(1) 不同的小木球在静止液体中开始自由上升时, 上升的轨迹均为螺旋状, 并且在短时间内, 上升速度的水平分量和竖直分量都达到最大值, 然后小木球以这个最大速度稳定上升.

(2) 不同小木球上升到稳定阶段时, 其在竖直方向的运动为匀速直线运动, 而其在水平方向的运动为匀速圆周运动.

(3) 实验得到不同小木球在稳定上升阶段的水平速度分量和竖直速度分量, 以及小木球自旋角速度之后, 通过计算, 间接确定小木球在稳定上升阶段时所受 Magnus 力的大小.

参 考 文 献:

- [1] 郭烈锦. 两相与多相流体动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2002:7-8
- [2] 倪普仁, 王光谦, 张红武. 固液两相流基本理论及其应用[M]. 北京: 北京科学出版社, 1991:9-13
- [3] GAO Hui, GUO Lie-jin, ZHANG Xi-min. Liquid-solid separation phenomena of two-phase turbulent flow in curved pipes [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2002, **45**:4995-5005
- [4] 李晓光, 徐德龙, 范海宏. 大颗粒流化床中颗粒受力的数值模拟[J]. 西安交通大学学报, 2006, **40**(7): 836-840
- [5] 王凤印, 王翠苹, 王玉东. 两相流测量技术及其进展[J]. 中国测量技术, 2004(2):34-36
- [6] 杨敏官, 刘 栋, 顾海飞, 等. 盐析液固两相流场的 PIV 测量方法[J]. 江苏大学学报(自然科学版), 2004, **28**(4):324-327
- [7] 刘大有. 二相流体动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993:26-33

Research on rising motion rule of wooden ball in solid-liquid two-phase flow and its Magnus force measurement

LI Wei-zhong*, JIANG Yuan-xin

(Key Laboratory of Ocean Energy Utilization and Energy Conservation of Ministry of Education,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The freely rising rule and Magnus force of different wooden balls rising in the static liquid were investigated using computer image processing technology and visual experiments. The results show that both the vertical and horizontal velocities of different wooden balls reach stable maximums in a short time after the wooden balls begin to rise, then the wooden balls keep rising with this maximum. The value of Magnus force is calculated by measuring the vertical and horizontal and spinning angle velocities of the wooden balls at the stable stage.

Key words: theoretical analysis; photographic method; Magnus force; spinning angle velocity