

关于折叠超立方体的反馈数

徐喜荣^{*1}, 曹楠², 吉日木图³, 董学智¹, 王保才¹, 王磊¹

- (1. 大连理工大学 计算机科学与技术学院, 辽宁 大连 116024;
2. 中国科学技术大学 数学系, 安徽 合肥 230026;
3. 内蒙古民族大学 数学学院, 内蒙古 通辽 028043)

摘要: 研究了一类重要的互连网络拓扑结构折叠超立方体网络 Q_{ln} 的反馈数. 设 F 为 Q_{ln} 的反馈集, 通过构造剩余子图 $G[V(Q_{ln}) - F]$ 的极大无圈子图得到极小反馈集, 从而得到反馈数的上界, 用此方法研究折叠超立方体网络 Q_{ln} 的反馈数问题. 根据 n 维折叠超立方体网络的性质, 提出一种新的方法构造无圈子图, 改进了已有的 n 维折叠超立方体网络的反馈数的上界. 结果表明, 当 n 为奇数时构造的 Q_{ln+2} 的无圈导出子图的整体连通性能与已有结论中构造的 Q_n 中无圈导出子图 $R \cup Q_{ln}$ 是一致的.

关键词: 折叠超立方体; 无圈子图; 超立方体; 最小反馈点集; 反馈数
中图分类号: O157.9; TP302 **文献标志码:** A

0 引言

对简单图(有向或无向) $G = (V, E)$, F 是顶点集合 $V(G)$ 的子集, 如果从顶点集合 V 中删除子集 F 后, 剩余顶点的导出子图不含(有向或者无向)圈, 则称 F 是 G 的反馈点集. 点数最小的子集 F 称为最小反馈点集.

图的最小反馈点集问题来源于实际问题. 例如, 在互联网中, 终端电脑作为节点, 终端之间的连线作为边, 则可以用图来建立互联网的数学模型, 网络中的某些性质可以用图论的参数来刻画. 如果网络中某些节点发生故障, 则极易使网络陷入瘫痪状态, 为了避免此情况的发生, 网络设计中允许存在一些回路. 由于不同的网段之间是以网桥相互连接, 广播消息通过网桥从一个网段传播到下一个网段. 若网络中存在回路, 则广播消息会在网桥环网中一直传递下去, 形成“广播风暴”. 为了避免形成网络中的“广播风暴”, 则需要尽可能少地关闭一些网桥, 使剩余的网络不再含有回路. 用图论术语来说, 就是要确定该网络对应图的一个最小反馈点集.

在操作系统和超级计算机的分布式计算中经常出现死锁问题. 操作系统中的死锁可以用状态图来描述. 若状态图中包含回路, 则系统中的进程将出现资源互相等待的状态, 极易产生死锁问题. 一个著名的解决死锁问题的方法是在对应的状态图中放弃尽可能少的进程, 等价于在状态图中找到尽可能少的点, 去掉这些点后, 剩余的状态图中不包含回路, 去掉最少的顶点的集合就是状态图的一个最小反馈点集. 给定一个光纤网络, 安装尽可能少的波长转换器, 使得网络中的每一条路由所需要的波长数等于网络的拥塞界(用于安装波长转换器的顶点集合被称为充分集), 拥塞界就是网络中经过任一条边的路的最大数目. 此问题也等价于在所对应的有向图中求图的最小反馈点集问题.

因为确定一般网络(或图)的最小反馈点集问题属 NP 问题^[1], 所以现阶段还不能对这一问题给出令人满意的结论. 大多数的工作是在多项式时间内解决某些特殊图的反馈数问题, 以及确定特殊图的最小反馈数的上下界.

文献[2]证明了一般图 $G = (V, E)$ 的反馈数的下界为

收稿日期: 2008-03-04; 修回日期: 2011-08-04.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671191; 61170303; 60973014); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(2008014111073); 大连理工大学基本科研业务费专项资金资助项目.

作者简介: 徐喜荣*(1967-), 女, 博士, 讲师, E-mail: xirongxu@dlut.edu.cn.

$$f(G) \geq \left\lceil \frac{|E| - |V| + 1}{\Delta - 1} \right\rceil$$

其中 $\Delta = \Delta(G)$ 为图 G 的最大度. 这个下界给出了一般图 $G = (V, E)$ 的反馈数与图的最大度的关系.

大网络的构造通常是利用小网络的笛卡儿乘积方法构造而得到^[3]. 由笛卡儿乘积方法构造出来的网络保留小网络的诸多优点, 比如正则性、Euler 性、Hamilton 性、点可迁性等性质. 超立方体网络是一类著名的互连网络拓扑结构. n 维超立方体 (n -dimensional hypercube), 记为 Q_n , 是由 n 个 K_2 的笛卡儿乘积 $K_2 \times K_2 \times \dots \times K_2$ 构造而得.

对于超立方体以及超立方体的变形网络(如交叉立方体、局部扭立方体、增广立方体)的最小反馈点集问题的结论目前还比较少, Focardi 等^[4] 给出了超立方体 Q_n 的反馈数的渐进界为 $2^{n-1} \left(1 - \frac{c}{n-1} \right)$ ($c \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$). 王彦辉等^[5] 给出了折叠超立方体 Q_{fn} 的反馈数的渐进界为 $f(n) = c \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 2, c \in \left[\frac{n-1}{n}, 1 \right]$). Smith 等^[6] 研究了有向图的反馈点集问题; 文献[7~9]对网格图和置换图的反馈点集问题进行了研究. 文献[10~13]给出了 Directed split-stars、Kautz digraphs、

Shuffle-based interconnection networks 等著名的网络拓扑结构图的反馈数的较好的上界. Xu 等^[14~16] 对与线图相关的网络拓扑结构图, 如 de Bruijn 有向图和 de Bruijn 无向图的反馈数进行了研究, 得到了较好的反馈数的渐进界.

本文通过构造剩余子图 $G[V(Q_{fn}) - F]$ 的极大无圈子图得到极小反馈点集, 从而得到反馈数的上界的方法, 来研究折叠超立方体网络 Q_{fn} 的反馈数问题.

1 定义和引理

n 维折叠超立方体网络 Q_{fn} 的概念是 El-Amawy 等^[17] 提出的. Q_{fn} 的顶点集合为

$$V(Q_{fn}) = \{x_n x_{n-1} \dots x_1 \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

顶点 $x = x_n x_{n-1} \dots x_1$ 与 $y = y_n y_{n-1} \dots y_1$ 有边相连当且仅当 $y = y_n y_{n-1} \dots y_1 = x_n x_{n-1} \dots x_{i+1} \bar{x}_i x_{i-1} \dots x_1, 1 \leq i \leq n$ (此时 (x, y) 称为正常边) 或者 $y = y_n y_{n-1} \dots y_1 = \bar{x}_n \bar{x}_{n-1} \dots \bar{x}_1$ (此时 (x, y) 称为补边), 顶点 y 称为顶点 x 的补点.

由此可见, n 维折叠超立方体网络是超立方体变形网络, 其通过在 n 维超立方体网络 Q_n 中添加 2^{n-1} 条补边构造生成, 如图 1 所示.

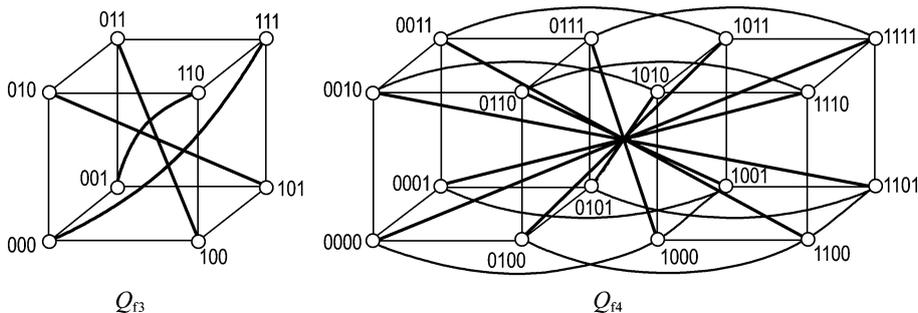


图 1 折叠超立方体 Q_{13} 和 Q_{14}
Fig. 1 Folded hypercube Q_{13} and Q_{14}

由于 Q_{fn} 具有下述优良的性质, 被认为是替代超立方体 Q_n 的挑战性网络结构.

- (1) Q_{fn} 有 2^n 个顶点, $(n+1)2^{n-1}$ 条边, 且是 $n+1$ 正则图;
- (2) Q_{fn} 直径为 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$;
- (3) Q_{fn} 的连通度为 $n+1$;
- (4) Q_{fn} 是点可迁图和边可迁图, 因而是 Cayley 图;

(5) 当 n 为奇数时 Q_{fn} 是二部分图, 当 n 为偶数时, Q_{fn} 是非二部分图.

定义 1 给定 n 维折叠超立方体 Q_{fn} 的顶点 $x = x_n x_{n-1} \dots x_1 \in V(Q_{fn})$, 若 $(\sum_{i=1}^n x_i) \bmod 2 = 0$, 则称 x 为偶顶点; 若 $(\sum_{i=1}^n x_i) \bmod 2 = 1$, 则称 x 为奇顶点.

设 $Q_{lon} = \left\{ x \in V(Q_{ln}) \mid \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \bmod 2 = 1 \right\}$

为折叠超立方体 Q_{ln} 中所有奇顶点构成的集合,

$Q_{fen} = \left\{ x \in V(Q_{ln}) \mid \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \bmod 2 = 0 \right\}$ 为折叠

超立方体 Q_{ln} 中所有偶顶点构成的集合, 则 Q_{lon} 和 Q_{fen} 是 Q_{ln} 的顶点集合的一个划分, 故 $V(Q_{ln}) = Q_{lon} \cup Q_{fen}$.

定义 2 给定超立方体 Q_n 的两个顶点 x 和 y , 设 $x = x_n x_{n-1} \cdots x_1, y = y_n y_{n-1} \cdots y_1$, 称

$D_H(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ 为两个顶点 x 和 y 之间的 Hamming 距离.

定义 3 设 S 为超立方体 Q_n 顶点子集, 若对于任意顶点 $x, y \in S$, 均有 $D_H(x, y)$ 大于 k (k 为自然数), 则称 S 为超立方体 Q_n 的 k 分离集.

引理 1^[4] 对任何整数 $n \geq 2$, 超立方体 Q_n 中含有一个 4 分离集. 设这个 4 分离点集合为 R , R 至少由 $2^{n-2}/(n-1)$ 个偶顶点组成, 则 R 和 Q_n 中所有的奇顶点的并导出的子图不含圈.

定义 4 对于点集 Q 每个元素后面加上数串 b 形成的点集记为 Q^b .

例如 R^0 为二进制编码点集合 R 的基础上后面加 0 形成的点集合, Q_n^{00} 为二进制编码点集合 Q_n 的基础上后面加 00 的点集合.

Q_{lon}^0 为 Q_n^0 中所有奇顶点的集合, Q_{fen}^0 为 Q_n^0 偶顶点集合. 显然 R^0, Q_n^0, Q_n^1 中的顶点的长度是 $n+1$.

2 折叠超立方体的反馈数的上界

由于当 n 为奇数时, n 维折叠超立方体 Q_{ln} 是二部分图, 然而当 n 为偶数时 n 维折叠超立方体 Q_{ln} 是非二部分图, 下面分别讨论折叠超立方体的反馈数的上界.

2.1 折叠超立方体的阶为奇数的情况

定理 1 当 n 为奇数时, 折叠超立方体 Q_{ln+2} 中由顶点子集合 $R^{00} \cup Q_{lon}^{01} \cup Q_{lon}^{10} \cup Q_{lon}^{11} \cup Q_{lon}^{00}$ 导出的子图不含圈.

证明 因为 n 为奇数, $n+2$ 也为奇数, 故 Q_{ln+2} 是二部分图. 又因为 Q_{ln+2} 中的奇顶点集合 Q_{lon+2} 及偶顶点集合 Q_{fen+2} 各为一半且各自为 Q_{ln+2} 的独立集, 所以任意两个偶顶点之间没有边关联, 任意两个奇顶点之间也没有边关联.

因为 $R^{00} \cup Q_{lon}^{01} \cup Q_{lon}^{10} \cup Q_{lon}^{11}$ 之间都是偶顶点, 所以 $R^{00} \cup Q_{lon}^{01} \cup Q_{lon}^{10} \cup Q_{lon}^{11}$ 集合内部任意两

个顶点之间没有边相关联.

因为 Q_{lon}^{00} 内都为奇顶点且是独立集, 所以 Q_{lon}^{00} 内部任意两个顶点之间均没有边关联.

现在讨论 Q_{lon}^{00} 与 $R^{00}, Q_{fen}^{01}, Q_{fen}^{10}, Q_{fen}^{11}$ 之间的关系.

(1) R^{00}, Q_{lon}^{00} 的关系

由引理 1 知 $R^{00} \cup Q_{lon}^{00}$ 导出的子图不含圈, 且最后一位都为 00, 所以 $R^{00} \cup Q_{lon}^{00}$ 导出的子图的边均为正常边.

(2) Q_{lon}^{00} 与 Q_{fen}^{01} 以及 Q_{lon}^{00} 与 Q_{fen}^{10} 的关系

由定义 4 可知 Q_{lon}^{00} 是由 Q_{lon} 后加 00 组成的集合, 而 Q_{fen}^{01} 是由 Q_{fen} 后加 01 组成的集合, 所以 $Q_{lon}^{00} \cup Q_{fen}^{01}$ 之间有正常边, 且为一一对应的, 没有补边.

同理 $Q_{lon}^{00} \cup Q_{fen}^{10}$ 之间有正常边, 且为一一对应的, 没有补边.

换句话说对于任意一个属于 Q_{lon} 的字串 $\alpha \in Q_{lon}$, 有 $\alpha^{00} \in Q_{lon}^{00}, \alpha^{01} \in Q_{fen}^{01}, \alpha^{10} \in Q_{fen}^{10}$, 则 α^{00} 与 α^{01}, α^{10} 两个顶点相关联, 均为正常边, 故不含圈.

(3) $Q_{lon}^{00}, Q_{fen}^{11}$ 的关系

由于 $Q_{lon}^{00} \cup Q_{fen}^{11}$ 后两位分别为 00 和 11, 各自不相同, $Q_{lon}^{00} \cup Q_{fen}^{11}$ 不含正常边. 对于任意一点 $\alpha \in Q_{lon}^{00}$, 其补点 $\bar{\alpha}$ 必然在 Q_{fen}^{11} 中.

同理, 对于任意一点 $\alpha \in Q_{fen}^{11}$, 其补点 $\bar{\alpha}$ 必然在 Q_{lon}^{00} 中, 则 Q_{lon}^{00} 与 Q_{fen}^{11} 构成了一个双射函数. 即 $Q_{lon}^{00} \cup Q_{fen}^{11}$ 之间有 2^n 条补边包含且只包含一个 $Q_{lon}^{00} \cup Q_{fen}^{11}$ 中的点.

(4) $R^{00} \cup Q_{lon}^{01} \cup Q_{lon}^{10} \cup Q_{lon}^{11} \cup Q_{lon}^{00}$ 导出的子图

该导出子图中, 子集 $Q_{lon}^{01} \cup Q_{lon}^{10} \cup Q_{lon}^{11}$ 中的点的度数均为 1 且 $R^{00} \cup Q_{lon}^{00}$ 不含圈, 综上所述, $R^{00} \cup Q_{lon}^{01} \cup Q_{lon}^{10} \cup Q_{lon}^{11} \cup Q_{lon}^{00}$ 导出的子图不含圈.

定理 2 对任意 $n \geq 4$ 的奇数, Q_{ln} 的反馈数的上界为 $f(n) \leq 2^{n-1}(1 - 1/8(n-3))$.

证明 由定理 1 可知, $R^{00} \cup Q_{lon}^{01} \cup Q_{lon}^{10} \cup Q_{lon}^{11} \cup Q_{lon}^{00}$ 在 $n+2$ 维折叠超立方体 Q_{ln+2} 导出的子图不含圈, 因此

$$\begin{aligned} & |R^{00} \cup Q_{lon}^{00} \cup Q_{lon}^{01} \cup Q_{lon}^{10} \cup Q_{lon}^{11}| = \\ & |R^{00}| + |Q_{lon}^{00}| + |Q_{lon}^{01}| + |Q_{lon}^{10}| + |Q_{lon}^{11}| = \\ & |R| + 4 \times 2^{n-1} \geq 2^{n-2}/(n-1) + 2^{n+1} \end{aligned}$$

所以 $n+2$ 维折叠超立方体 Q_{ln+2} 的反馈数的上界为

$$f(n+2) \leq |Q_{fn+2}| - |R^{00} \cup Q_{fon}^{00} \cup Q_{fen}^{01} \cup Q_{fen}^{10} \cup Q_{fen}^{11}| \leq 2^{n+2} - (2^{n-2}/(n-1) + 2^{n+1}) = 2^{n+1}(1 - 1/8(n-1))$$

即 n 维折叠超立方体 Q_{fn} 的反馈数的上界为 $f(n) \leq 2^{n-1}(1 - 1/8(n-3))$.

□

2.2 折叠超立方体的阶为偶数的情况

定理 3 当 n 为奇数时, Q_{fn+3} 是偶阶的, 由 Q_{fn+3} 中的点 $R^{000} \cup Q_{fon+3}$ 导出的子图不含圈.

证明 分正常边和补边两种情况进行讨论.

(1) $R^{000} \cup Q_{fon+3}$ 的补边

当 n 为奇数时, $n+3$ 是偶数, 一个点和其补点是同奇偶的, 所以 R^{000} 和 Q_{fon+3} 之间没有补边. R^{000} 后三位均为 000, 故其内部点之间没有补边.

又因为 Q_{fon+3} 为 Q_{fn+3} 的全部奇顶点, 所以由定义可知 Q_{fon+3} 内部有 2^{n+1} 条补边. 将 Q_{fon+3} 按照后三位进行子集合分解可以得到 8 个子集的并集如下:

$$Q_{fon+3} = Q_{fon}^{000} \cup Q_{fon}^{001} \cup Q_{fon}^{010} \cup Q_{fon}^{011} \cup Q_{fon}^{100} \cup Q_{fon}^{101} \cup Q_{fon}^{110} \cup Q_{fon}^{111}$$

于是 Q_{fon}^{000} 的补点在 Q_{fon}^{111} 中, 则 Q_{fon}^{000} 与 Q_{fon}^{111} 之间有 2^{n-1} 条补边, 且 Q_{fon}^{000} 中的点与 Q_{fon}^{111} 中的补点是一一对应的.

同理 Q_{fon}^{001} 与 Q_{fon}^{110} 、 Q_{fon}^{010} 与 Q_{fon}^{101} 、 Q_{fon}^{011} 与 Q_{fon}^{100} 之间具有相同的性质.

(2) $R^{000} \cup Q_{fon+3}$ 的正常边

因为折叠超立方体中正常边的两条边不能同奇偶, 显然 R^{000} 内部没有正常边, Q_{fon+3} 内部也不包含正常边. 所以只需计算 R^{000} 和 Q_{fon+3} 之间的正常边即可.

由引理 1 可得, $R^{000} \cup Q_{fon}^{000}$ 构成一个无圈子图.

因为对于任意一个 R 中的元素 $\alpha \in R$, 在 α 后加子串 000 形成 R^{000} , 而在 α 后分别加子串 001、010、100 形成 3 个点集, 分别为 Q_{fon}^{001} 、 Q_{fon}^{010} 、 Q_{fon}^{100} 的子集, 则 R^{000} 与 Q_{fon}^{001} 、 Q_{fon}^{010} 、 Q_{fon}^{100} 的子集有连边且为一一对应关系. 又因为 Q_{fon}^{000} 、 Q_{fon}^{001} 、 Q_{fon}^{010} 、 Q_{fon}^{100} 之间没有补边相关联, 即没有任何边, 所以由 $R^{000} \cup Q_{fon}^{000} \cup Q_{fon}^{001} \cup Q_{fon}^{010} \cup Q_{fon}^{100}$ 导出的子图为无圈子图.

综上, 构成的 $R^{000} \cup Q_{fon+3}$ 在 Q_{fn+3} 导出的子图为无圈子图.

□

定理 4 对任意 $n \geq 4$ 的偶数, Q_{fn} 的反馈数的上界为 $f(n) \leq 2^{n-1}(1 - 1/16(n-4))$.

证明 由定理 3 可知, $R^{000} \cup Q_{fon+3}$ 在 Q_{fn+3} 导出的子图不含圈, 故得到

$$|R^{000} \cup Q_{fon+3}| = |R^{000}| + |Q_{fon+3}| = |R| + 2^{n+2} \geq 2^{n-2}/(n-1) + 2^{n+2}$$

所以 $n+3$ 维折叠超立方体 Q_{fn+3} 的反馈数的上界为

$$f(n+3) \leq |Q_{fn+3}| - |R^{000} \cup Q_{fon+3}| \leq 2^{n+3} - (2^{n-2}/(n-1) + 2^{n+2}) = 2^{n+2}(1 - 1/16(n-1))$$

所以 n 维折叠超立方体 Q_{fn} 的反馈数的上界为

$$f(n) \leq 2^{n-1}(1 - 1/16(n-4))$$

□

3 无圈导出子图的连通性分析

定理 5 如果 n 为奇数, 则构造的 Q_{fn+2} 的无圈导出子图的连通分支个数和 Q_n 的无圈子图 $R \cup Q_{fon}$ 中连通分支个数一致.

证明 设 $H = G[R^{00} \cup Q_{fen}^{01} \cup Q_{fen}^{10} \cup Q_{fen}^{11} \cup Q_{fon}^{00}]$, 考虑无圈导出子图 H 的边的情况. 实际上, H 的边是在 $R \cup Q_{fon}$ 边的基础上增加与 $Q_{fen}^{01} \cup Q_{fen}^{10} \cup Q_{fen}^{11}$ 的点之间的边, 也即, 在 $R \cup Q_{fon}$ 基础上, 增加 $Q_{fen}^{01} \cup Q_{fen}^{10} \cup Q_{fen}^{11}$ 这些点, 并没有增加实际的连通分支.

□

定理 5 表明, 当 n 为奇数时, 构造的 Q_{fn+2} 的无圈导出子图的整体连通性能与引理 1 中构造的 Q_n 中不含圈导出子图 $R \cup Q_{fon}$ 的是一致的, 但由于阶数大了两阶, 连通性能比同类其他反馈集变得更优.

4 结 语

反馈数问题是图论和网络理论极难的问题之一, 文献中有关此研究领域的结果不多, 关键是还没有找到一个好的方法来处理这个问题. 本文所讨论的 n 维折叠超立方体在 n 为奇数和偶数时分别是二部分图和非二部分图, 根据此性质, 本文对于 n 为奇数和偶数两个大类的情况分别构造了 n 维折叠超立方体的无圈导出子图, 给出了折叠超立方体网络的反馈数的新的上界, 改进了已有的结果.

参考文献:

- [1] GAREY M R, JOHNSON D S. **Computers and Intractability**[M]. San Francisco: Freeman, 1979
- [2] BEINEK L W, VANDELL R C. Decycling graphs [J]. **Journal of Graph Theory**, 1997, **25**(1):59-77
- [3] XU Jun-ming. **Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks** [M]. London: Kluwer Academic Publishers, 2001
- [4] FOCARDI R, LUCCIO F L, PELEG D. Feedback vertex set in hypercubes [J]. **Information Processing Letters**, 2000, **76**(1-2):1-5
- [5] 王彦辉,徐俊明. 折叠超立方体网络的最小反馈点集 [J]. **运筹与管理**, 2005, **14**(6):8-11
- [6] SMITH G W JR, WALFORD R B. The identification of a minimal feedback vertex set of a directed graph [J]. **IEEE Transaction on Circuits and Systems**, 1975, **CAS-11**(1):9-15
- [7] BAU S, BEINEKE L W, LIU Z. *et al.* Decycling cubes and grids [J]. **Utilitas Mathematica**, 2001, **59**:129-137
- [8] LIANG Y D. On the feedback vertex set problem in permutation graphs [J]. **Information Processing Letters**, 1994, **52**(3):123-129
- [9] LUCCIO F L. Almost exact minimum feedback vertex set in meshes and butterflies [J]. **Information Processing Letters**, 1998, **66**(2):59-64
- [10] WANG C C, LLOYD E L, SOFFA M L. Feedback vertex sets and cyclically reducible graphs [J]. **Journal of the ACM**, 1985, **32**(2):296-313
- [11] WANG Fu-hsing, HSU Cheng-ju, TSAI Jen-chih. Minimal feedback vertex sets in directed split-stars [J]. **Networks**, 2005, **45**(4):218-223
- [12] KRÁLOVIC R, RUZICKA P. Minimum feedback vertex sets in shuffle-based interconnection networks [J]. **Information Processing Letters**, 2003, **86**(4):191-196
- [13] XU Jun-ming, WU Ye-zhou, HUANG Jia, *et al.* Feedback numbers of Kautz digraphs [J]. **Discrete Mathematics**, 2007, **307**(13):1589-1599
- [14] XU Xi-rong, CAO Yong-chang, XU Jun-ming, *et al.* Feedback numbers of de Bruijn digraphs [J]. **Computer and Mathematics with Applications**, 2010, **59**(2):716-723
- [15] XU Xi-rong, YANG Yuan-sheng, MING Di. Feedback vertex set of generalized de Bruijn digraphs $GB(d, n)$ [J]. **Utilitas Mathematica**, 2009, **79**:107-124
- [16] XU Xi-rong, XU Jun-ming, CAO Yong-chang. Bounds on feedback numbers of de Bruijn graphs [J]. **Taiwanese Journal of Mathematics**, 2011, **15**(3):1101-1113
- [17] EL-AMAWY A, LATIFI S. Properties and performance of folded hypercubes [J]. **IEEE Transaction on Parallel and Distributed Systems**, 1991, **2**(1):31-42

On feedback number of folded hypercube

XU Xi-rong^{*1}, CAO Nan², Jirimutu³, DONG Xue-zhi¹, WANG Bao-cai¹, WANG Lei¹

(1. School of Computer Science and Technology, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China;

3. College of Mathematics, Inner Mongolia University for the Nationalities, Tongliao 028043, China)

Abstract: The feedback number of folded hypercube Q_{fn} , which is an important interconnection network topological structure, is researched. Defining F as a feedback vertex set of Q_{fn} , maximal acyclic subgraph of survived subgraph $G[V(Q_{fn}) - F]$ is constructed and a minimal feedback vertex set is achieved. By this approach, the upper bound of feedback number of Q_{fn} is obtained. According to the property of n -dimensional folded hypercube, a new approach to constructing acyclic subgraph is presented and the upper bound of feedback number of Q_{fn} is improved. The conclusion indicates that the connectivity of acyclic subgraph of Q_{fn+2} constructed by the approach is consistent with the one of acyclic subgraph induced by $R \cup Q_{fon}$ provided by related results when n is odd.

Key words: folded hypercube; acyclic subgraph; hypercube; minimum feedback vertex set; feedback number