应用数学

文章编号：1000-8608(2011)06-0927-06

Lévy过程驱动金融市场中最优资产组合复制策略

王　岩*，冯敬海，冯恩民

（大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024）

摘要： 用白噪声分析的方法研究了Lévy过程驱动的金融市场.在Gauss白噪声和纯跳Lévy白噪声复合的Lévy白噪声框架下，给出了Clark-Haussmann-Ocone定理.应用此定理，分别在完全信息和部分信息下，用Malliavin导数表示了给定欧式期权的方差最小复制策略的具体形式，进一步用具体函数刻画了市场固有风险.分析结果表明，研究结果更贴近现实中一般的金融市场.

关键词： Lévy过程；Malliavin导数；方差最小复制策略；Clark-Haussmann-Ocone定理

中图分类号： O211.67　　**文献标志码：** A

0 引　言

计算欧式期权的对冲策略，即找到一个资产组合，使资产组合复制的财富过程能够模拟期权的价值.因此找到满足一定条件的最优资产组合是金融研究中的一类重要问题.文献[1]论述了最优资产组合可以通过期权价格的鞅表示定理——Clark-Haussmann-Ocone(CHO)定理得到.

近年来，随着白噪声分析理论的发展，它在金融中的应用也受到了广泛的关注.白噪声分析是由Hida[2]首创的无穷维随机分析，是一种无穷维的Schwartz型分布理论.Aase等[3]将CHO定理分别推广到Gauss白噪声分析和Poisson白噪声分析框架下，用于研究布朗运动和Poisson过程驱动的金融市场，用Malliavin导数表示欧式期权的最优复制策略.布朗运动驱动的金融市场和Poisson过程驱动的金融市场是两个经典的分别存在着连续型和跳跃型随机因素的市场.

文献[3]的思想和结果随后被推广到更一般的随机过程驱动的金融市场，如文献[4、5].随着在理论和应用方面的蓬勃发展，Lévy过程已经成为概率论的最热门分支之一.用Lévy过程建立金融市场模型，尤其在描述股票的价格方面，更为贴切[6~9].Lévy过程可以分解为时间变量、布朗运动和纯跳Lévy过程的线性组合[10]，因此布朗运动和Poisson过程都是Lévy过程的特例.Løkka等[11]首次构建纯跳Lévy白噪声分析框架，并应用于随机微分方程的求解.文献[12]在文献[11]的框架下，求解纯跳Lévy白噪声驱动的随机薛定谔方程.Løkka[13]利用白噪声分析理论推导了纯跳Lévy过程的CHO定理，用于研究Lévy过程驱动的金融市场的对冲问题.随后，Di Nunno等[14]进一步构建了纯跳Lévy过程的白噪声分析框架，引入Malliavin导数，将CHO定理推广到纯跳Lévy过程的白噪声分析框架下，用于求解纯跳Lévy过程驱动的金融市场中欧式期权的最优复制策略.

本文研究由布朗运动和纯跳Lévy过程复合的Lévy过程驱动的金融市场.此市场既有连续波动的性质，又复合了如金融危机等重大金融事件所造成的不规则跳跃式波动，更切近现实中一般的市场，是文献[3、14]中模型的一般化和复杂化.Lévy白噪声可视为Lévy过程的广义时间导数，因此本文研究的Lévy白噪声是Gauss白噪声和纯跳Lévy白噪声的复合.文献[15]构建了

收稿日期： 2009-12-16；　**修回日期：** 2011-09-01.

作者简介： 王　岩*(1978-)，女，博士，E-mail：wymath@163.com；冯恩民(1939-)，男，教授，博士生导师.

相应的 Lévy 白噪声分析框架，本文将 CHO 定理推广到 Lévy 白噪声分析框架下，用 Malliavin 导数表示市场中的方差最小资产组合，并研究 Lévy 过程驱动的金融市场的固有风险.

1 Lévy 白噪声分析框架下的 Clark-Haussmann-Ocone 定理

令 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为完备的概率空间，$\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 为其上的滤子. Lévy 过程 $\eta(t)=\eta(t,\omega):[0,\infty)\times\Omega\to\mathbf{R}$ 为一个平稳独立增量过程，$\eta(0)=0$，且满足 $E[\eta^2(t)]<\infty$，对 $t\geqslant 0$ 都成立. 令 $\Delta\eta(t)$ 表示 η 在 t 时刻的跳跃，令 $\eta^{(i)}(t)=\sum\limits_{0\leqslant s\leqslant t}(\Delta\eta(s))^i$. 假设 $\eta^{(1)}(t)=\eta(t)$，则变换后的 $\eta^{(i)}(t)$ 也为一个 Lévy 过程[16].

定义 1 称 $\eta^{(i)}(t)$ 为幂跳过程. 令 $E[\eta^{(i)}(t)]=t\int_{\mathbf{R}_0}x^i\nu(\mathrm{d}x):=\kappa_i t$，则称 $X_t^i=\eta^{(i)}(t)-\kappa_i t$ 为补偿幂跳过程，$\mathbf{R}_0:=\mathbf{R}-\{0\}$.

可选取一列实数 $a_{i,j}$，使得 $Y^{(i)}(t)=X_t^{(i)}+a_{i,i-1}X_t^{(i-1)}+\cdots+a_{i,1}X_t^{(1)}$ 为强正交鞅[16]. 根据 Lévy-Itô 分解定理[10]，Lévy 过程 $\eta(t)$ 可以分解为

$$\eta(t)=at+\sigma B(t)+\int_0^t\int_{\mathbf{R}_0}z\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)$$

其中 $a\in\mathbf{R},\sigma\in\mathbf{R}$，$B(t)$ 为布朗运动，$\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)=N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)-\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}t$ 为补偿 Poisson 随机测度，$N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)$ 为 $\eta(t)$ 的 Poisson 随机测度，$\nu(\mathrm{d}z)$ 为 $\eta(t)$ 的 Lévy 测度，$B(t)$ 与 $\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)$ 独立.

通常定义 $\eta_{\mathrm{p}}(t)=\int_0^t\int_{\mathbf{R}_0}z\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)$ 为纯跳 Lévy 过程. 文献[14]构建了纯跳 Lévy 过程的白噪声分析框架，用于研究纯跳 Lévy 过程驱动的金融市场. 本文考虑由布朗运动和纯跳 Lévy 过程复合的 Lévy 过程驱动的金融市场. 令 Lévy 过程 $\eta(t)$ 具有如下形式：

$$\eta(t)=\sigma B(t)+\int_0^t\int_{\mathbf{R}_0}z\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)\qquad(1)$$

此市场既有连续型的随机因素，又复合了如金融危机等重大金融事件所造成的不规则跳跃式波动.

Lévy 白噪声可视为 Lévy 过程的广义时间导数，本文研究的 Lévy 白噪声是 Gauss 白噪声和纯跳 Lévy 白噪声的复合. 文献[15]构建了 Lévy 白噪声分析框架.

令 $S(\mathbf{R}^d)$ 为 $\mathbf{R}^d$ 上的 C^∞ 全体速降函数所组成的 Schwartz 空间，$S'(\mathbf{R}^d)$ 为 $S(\mathbf{R}^d)$ 的对偶空间，μ_{G} 是定义在 $S'(\mathbf{R}^d)$ 空间上的 Gauss 白噪声测度. 令 $\widetilde{S}(\boldsymbol{X})$ 为 $S(\mathbf{R}^{d+1})$ 的商空间，$\boldsymbol{X}=\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}_0$，$\widetilde{S}'(\boldsymbol{X})$ 为 $\widetilde{S}(\boldsymbol{X})$ 的对偶空间，μ_{p} 是定义在 $\widetilde{S}'(\boldsymbol{X})$ 上的纯跳 Lévy 白噪声测度. 因为本文研究的 Lévy 白噪声的噪声源是二维的——Gauss 白噪声和纯跳 Lévy 白噪声，故令空间 $\Omega=S'(\mathbf{R}^d)\times S'(\boldsymbol{X})$，$\theta=\mu_{\mathrm{G}}\times\mu_{\mathrm{p}}$.

定义 2 令 $\mathscr{B}(\Omega)$ 为 Borel σ 代数，定义 $(\Omega,\mathscr{B}(\Omega),\theta)$ 为 Lévy 白噪声空间，$\theta=\mu_{\mathrm{G}}\times\mu_{\mathrm{p}}$ 为 Lévy 白噪声测度.

引理 1[15] 令 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$ 为多维数组，有限个 α_i 非 0，且 $\alpha_i\in\mathbf{N}_0:=\mathbf{N}\cap\{0\}$，$J:=(\mathbf{N}_0^{\mathbf{N}})_{\mathrm{c}}$ 表示多维数组 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$ 的集合. 令 $\{H_\alpha(\omega)\}_{\alpha\in J}$ 和 $\{K_\beta(\omega)\}_{\beta\in J}$ 分别为平方可积的白噪声泛函空间 $L^2(\mu_{\mathrm{G}})$ 和 $L^2(\mu_{\mathrm{p}})$ 中的混沌分解基. 则对平方可积的 Lévy 白噪声泛函 $f\in L^2(\theta)$，存在着空间 $L^2(\theta)$ 中的一组混沌分解基 $\{M_{\boldsymbol{\gamma}}\}_{\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{T}}$，使得 $f(\omega_1,\omega_2)=\sum\limits_{\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{T}}C_{\boldsymbol{\gamma}}M_{\boldsymbol{\gamma}}(\omega_1,\omega_2)$，其中 $M_{\boldsymbol{\gamma}}(\omega_1,\omega_2)=H_\alpha(\omega_1)K_\beta(\omega_2)$，$\boldsymbol{T}=J\times J$，$\alpha,\beta\in J$，$\boldsymbol{\gamma}=(\alpha\quad\beta)\in\boldsymbol{T}$，$\omega_1\in S'(\mathbf{R}^d)$，$\omega_2\in\widetilde{S}'(\boldsymbol{X})$，$C_{\boldsymbol{\gamma}}=(a_\alpha,b_\beta)$，且有 $\|f\|_{L^2(\theta)}^2=\sum\limits_{\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{T}}C_{\boldsymbol{\gamma}}^2\boldsymbol{\gamma}!$.

为了定义 $f\in L^2(\theta)$ 在 t 点对于 Gauss 型随机元素 $\omega_1\in S'(\mathbf{R}^d)$ 和纯跳 Lévy 型随机元素 $\omega_2\in\widetilde{S}'(\boldsymbol{X})$ 的 Malliavin 导数，首先给出分布空间 $(\mathscr{G})_{\mu_{\mathrm{G}}}^*$ 和 $(\mathscr{G})_{\mu_{\mathrm{p}}}^*$ 的定义，Malliavin 导数定义在此随机分布空间上.

定义 3 令 $q\in\mathbf{Z}$，对平方可积的 Gauss 白噪声泛函 $g=\sum\limits_{\alpha\in J}a_\alpha H_\alpha(\omega_1)$，定义范数 $\|g\|_{\mathscr{G}_{-q}^{\mathrm{G}}}^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\sum\limits_{\|\alpha\|=n}a_\alpha^2\alpha!\Big)\mathrm{e}^{-2qn}$，$\|\alpha\|=\sum\limits_i\alpha_i$，令 $(\mathscr{G})_{-q,\mu_{\mathrm{G}}}=\{f:\|f\|_{\mathscr{G}_{-q}^{\mathrm{G}}}^2<\infty\}$，定义随机分布空间为 $(\mathscr{G})_{\mu_{\mathrm{G}}}^*=\bigcup\limits_{q\in\mathbf{N}}(\mathscr{G})_{-q,\mu_{\mathrm{G}}}$，并在 $(\mathscr{G})_{\mu_{\mathrm{G}}}^*$ 上配备归纳极限拓扑. 另一方面，令 $q\in\mathbf{Z}$，对平方可积的纯跳 Lévy 白噪声泛函 $h=\sum\limits_{\beta\in J}b_\beta K_\beta(\omega_2)$，定义范数 $\|h\|_{\mathscr{G}_{-q}^{\mathrm{P}}}^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\sum\limits_{\|\beta\|=n}b_\beta^2\mid K_\beta\mid_{L^2(\nu)}^2\Big)\mathrm{e}^{-2qn}$，令 $(\mathscr{G})_{-q,\mu_{\mathrm{p}}}=\{f:$

$\|f\|_{\mathscr{G}_{-q}^{\mathrm{p}}}^2 < \infty\}$，定义随机分布空间为 $(\mathscr{G})_{\mu_{\mathrm{p}}}^* = \bigcup_{q\in\mathbf{N}} (\mathscr{G})_{-q,\mu_{\mathrm{p}}}$，并在 $(\mathscr{G})_{\mu_{\mathrm{p}}}^*$ 上配备归纳极限拓扑.

根据定义 3，存在着包含关系 $L^2(\theta) \subset (\mathscr{G})_{\mu_{\mathrm{G}}}^* \times (\mathscr{G})_{\mu_{\mathrm{p}}}^*$.

定义 4　对 Lévy 白噪声泛函 $f(\omega) = f(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\gamma\in\boldsymbol{T}} C_\gamma M_\gamma(\omega_1,\omega_2) \in (\mathscr{G})_{\mu_{\mathrm{G}}}^* \times (\mathscr{G})_{\mu_{\mathrm{p}}}^*$，定义在 t 点关于 ω_1 的 Malliavin 导数为

$$\mathrm{D}_t^{\mathrm{G}} f(\omega) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\omega_1} = \sum_{(\zeta\ \beta)\in\boldsymbol{T}} \Big(\sum_i a_{\zeta+\varepsilon^i}(\zeta_i + 1)\xi_i(t), b_\beta \Big) H_\zeta(\omega_1) K_\beta(\omega_2) \tag{2}$$

定义在 t 点关于 ω_2 的 Malliavin 导数为

$$\mathrm{D}_t^{\mathrm{p},m} f(\omega) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\omega_2} = \sum_{(\alpha\ \zeta)\in\boldsymbol{T}} \Big(a_\alpha, \sum_i b_{\zeta+\varepsilon^{l(i,m)}}(\zeta_{l(i,m)} + 1)\xi_i(t) \Big) H_\alpha(\omega_1) K_\zeta(\omega_2) \tag{3}$$

这里 $\xi_i(t)$ 为 Hermite 函数，$\boldsymbol{\varepsilon}^i = (0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0)$，$l(i,m) = m + (i+m-2)(i+m-1)/2$.

下面给出 $L^2(\theta)$ 上的 CHO 定理，此定理的证明是文献[3]中定理 3.11 和文献[14]中定理 4.12 的平行推广，在此不再重复.

定理 1　($L^2(\theta)$ 上的 CHO 定理) 令 λ 表示 $\mathbf{R}$ 上的 Lebesgue 测度，$f \in L^2(\theta)$ 为 $\mathscr{F}_T$ 可测的，则有 $(t,\omega) \to E[\mathrm{D}_t^{\mathrm{G}} F \mid \mathscr{F}_t](\omega) + E[\mathrm{D}_t^{\mathrm{p}} F \mid \mathscr{F}_t](\omega) \in L^2(\lambda \otimes \theta)$，并且

$$F(\omega) = E[F] + \int_0^T E[\mathrm{D}_t^{\mathrm{G}} F \mid \mathscr{F}_t]\mathrm{d}B(t) + \sum_{m\geqslant 1} \int_0^T E[\mathrm{D}_t^{\mathrm{p},m} F \mid \mathscr{F}_t]\mathrm{d}Y^{(m)}(t) \tag{4}$$

这里 E 为广义期望，$\mathrm{D}_t^{\mathrm{G}} F$ 表示 F 在 t 点关于 ω_1 的 Malliavin 导数，$\mathrm{D}_t^{\mathrm{p},m} F$ 表示 F 在 t 点关于 ω_2 的 Malliavin 导数，$Y^{(m)}(t)$ 是 Lévy 过程 $\eta(t)$ 的正交幂跳过程，$Y^{(1)}(t) = \eta(t)$，且当 $m \neq n$ 时，$Y^{(m)}(t)$ 和 $Y^{(n)}(t)$ 是正交的.

2　Lévy 过程驱动的金融市场模型

本文研究由一种无风险资产 $S_0(t)$ 和 K ($K < \infty$) 种风险资产 $S_1(t), \cdots, S_K(t)$ 组成的金融市场，交割日期为 T. 市场是由 Lévy 过程驱动的，即风险资产由 Lévy 过程来刻画. 为了简化计算，可以将标的资产的价值表示为

$$S_0(t) = 1;\ 0 \leqslant t \leqslant T \tag{5}$$

$$\mathrm{d}S_j(t) = \mathrm{d}\eta_j(t);\ j = 1,2,\cdots,K,\ 0 \leqslant t \leqslant T \tag{6}$$

其中 $\eta_j(t) = \sigma_j B_j(t) + \int_0^t \int_{\mathbf{R}_0} z\widetilde{N}_j(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)$.

本文讨论如何选择资产组合复制欧式期权 $F \in L^2(\theta)$ 的价值，θ 为 Lévy 白噪声测度. 在金融模型中有一个信息滤子流 $\{\mathscr{F}_t\}$，刻画在每个时间点投资者所能获取的信息总量. 通常假设这个信息滤子流与风险资产价格过程生成的信息相一致，即假设资产组合过程是信息滤子流 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应的，称 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ 所承载的信息为完全信息. 对于投资者来说，通常在决策时所获取的信息是不完全的，即存在着一族子 σ- 代数 $\{\mathscr{H}_t\}_{t\in[0,T]}$ 表示在 t 时刻可以获取的信息集，对于 $t \in [0,T]$，有 $\mathscr{H}_t \subset \mathscr{F}_t$. 称 $\{\mathscr{H}_t\}_{t\in[0,T]}$ 所承载的信息为部分信息.

例 1　$\varphi(t) \in \mathscr{H}_t = \mathscr{F}_{(t-\delta)^+}$，$\delta > 0$ 为常数，表示信息流存在着 δ 时间的延迟，即投资者要在 $t-\delta$ 这一时刻，参照 $\mathscr{F}_{(t-\delta)^+}$ 所包含的信息，决定 t 时刻的随机过程 $\varphi(t)$ 的取值.

定义 5　令 $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \cdots, \varphi_K(t))$，$0 \leqslant t \leqslant T$，表示投资在 $S_j(t)$，$j = 0,1,\cdots,K$ 上的资产份数. 如果 $\varphi(t)$ 是 $\mathscr{F}_t$ 适应的(或 $\mathscr{H}_t$ 适应的)，并且 $\sum_{j=0}^K E(\int_0^T \varphi_j^2(t)\mathrm{d}t) < \infty$，则称 $\varphi(t)$ 是 $\mathscr{F}_t$ 可行策略(或 $\mathscr{H}_t$ 可行策略)，$\mathscr{F}_t$ 可行策略(或 $\mathscr{H}_t$ 可行策略) 的集合记为 $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$(或 $\mathscr{A}_{\mathscr{H}}$)；如果存在着 $\mathscr{F}_t$ 可行策略 $\varphi(t) \in \mathscr{A}_{\mathscr{F}}$(或 $\mathscr{H}_t$ 可行策略 $\varphi(t) \in \mathscr{A}_{\mathscr{H}}$)，使得

$$F = E[F] + \sum_{j=0}^k \int_0^T \varphi_j(t)\mathrm{d}S_j(t);\quad 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant k \leqslant K$$

称欧式期权 F 为 $\mathscr{F}$ 可复制的(或 $\mathscr{H}$ 可复制的)；如果市场中的每个欧式期权 $F \in L^2(\theta)$ 都是 $\mathscr{F}$ 可复制的(或 $\mathscr{H}$ 可复制的)，则称此市场为 $\mathscr{F}$ 完全市场(或 $\mathscr{H}$ 完全市场).

Lévy 过程驱动的市场一般来说不是 $\mathscr{F}$ 完全市场(或 $\mathscr{H}$ 完全市场). 一方面，Lévy 过程跳跃的高度是难以获知的；另一方面，资产组合的选择限制在 $S_1(t), \cdots, S_k(t)$ 上，$k \leqslant K$. 当欧式期权不能用资产组合 $\mathscr{F}$ 完全复制(或 $\mathscr{H}$ 完全复制) 时，投资者希望找到“最保险” 的复制策略，即文献[14]提出的方差最小复制策略.

定义 6 对于平方可积的欧式期权 $F \in L^2(\theta)$，若存在着 $\varphi(t) \in A_{\mathscr{H}}$（或 $\varphi(t) \in A_{\mathscr{F}}$）使

$$E\Big[(F-E[F]-\sum_{j=0}^{k}\int_0^T \varphi_j^*(t)\mathrm{d}\eta_j(t))^2\Big]=\inf_{\varphi\in A_{\mathscr{H}}(\text{或}\varphi\in A_{\mathscr{F}})} E\Big[(F-E[F]-\sum_{j=0}^{k}\int_0^T \varphi_j(t)\mathrm{d}\eta_j(t))^2\Big] \tag{7}$$

则称 $\varphi(t)$ 为 F 的 $\mathscr{H}$（或 $\mathscr{F}$）方差最小复制策略.

3 方差最小复制策略及市场固有风险

本章用 Malliavin 导数表示欧式期权 F 的方差最小复制策略，主要理论依据是 $L^2(\theta)$ 上的 CHO 定理.

定理 2 在 Lévy 过程所驱动的市场式(5)、(6)中，欧式期权 $F \in L^2(\theta)$ 的 $\mathscr{F}$ 方差最小复制策略 $\psi(t)=(\psi_0(t),\psi_1(t),\cdots,\psi_k(t))$ 表示为

$$\psi_j(t)=\frac{\sigma_j E[\mathrm{D}^{\mathrm{G}}_{t,j}F \mid \mathscr{F}_t](\omega)+\kappa_j^2 E[\mathrm{D}^{\mathrm{p},1}_{t,j}F \mid \mathscr{F}_t](\omega)}{\sigma_j^2+\kappa_j^2} \tag{8}$$

其中 $\kappa_j^2=E[\eta_j^2(1)]$，$j=1,2,\cdots,k$，$k\leqslant K$.

证明 给定平方可积 Lévy 白噪声泛函 $F \in L^2(\theta)$，根据 $L^2(\theta)$ 上的 CHO 定理，F 具有如下分解：

$$F=E[F]+\sum_{j=1}^{K}\int_0^T E[\mathrm{D}^{\mathrm{G}}_{t,j}F \mid \mathscr{F}_t]\mathrm{d}B_j(t)+\sum_{j=1}^{K}\sum_{m\geqslant 1}\int_0^T E[\mathrm{D}^{\mathrm{p},m}_{t,j}F \mid \mathscr{F}_t]\mathrm{d}Y_j^{(m)}(t) \tag{9}$$

其中 $B_j(t)$ 为布朗运动，$Y_j^{(m)}(t)$ 是 Lévy 过程 $\eta_j(t)$ 的正交幂跳过程.

令 $\psi(t)$ 为 F 的 $\mathscr{F}$ 方差最小复制策略. 因为 $Y_j^{(1)}(t)=\eta_j(t)$[1]，所以由 $\psi(t)$ 复制的价值为

$$\widehat{F}=E[F]+\sum_{j=0}^{k}\int_0^T \psi_j(t)\mathrm{dS}_j(t)=E[F]+\sum_{j=1}^{k}\int_0^T \psi_j(t)\sigma_j\mathrm{d}B_j(t)+\sum_{j=1}^{k}\int_0^T \psi_j(t)\mathrm{dY}_j^{(1)}(t) \tag{10}$$

由于 $L^2(\mathscr{F}_T,\pi)$ 是 Hilbert 空间，根据方差最小复制策略的定义 6，即找到 $\varphi^*(t)$，使得

$$E[(F-\widehat{F})\Xi]=0 \tag{11}$$

对于任意的具有下列形式的 $\Xi \in L^2(\mathscr{F}_T,\theta)$ 都成立，这里

$$\Xi=\sum_{j=0}^{k}\int_0^T \varepsilon_j(t)\mathrm{dS}_j(t)=\sum_{j=1}^{k}\int_0^T \varepsilon_j(t)\sigma_j\mathrm{d}B_j(t)+\sum_{j=1}^{k}\int_0^T \varepsilon_j(t)\mathrm{dY}_j^{(1)}(t) \tag{12}$$

其中 $\varepsilon_j \in A_{\mathscr{F}}$. 将式(9)、(10)和(12)代入式(11)，可得

$$E\Big\{\Big[\sum_{j=1}^{k}\int_0^T (E[\mathrm{D}^{\mathrm{G}}_{t,j}F \mid \mathscr{F}_t]-\psi_j(t)\sigma_j)\mathrm{d}B_j(t)+\sum_{j=1}^{k}\int_0^T (E[\mathrm{D}^{\mathrm{p},1}_{t,j}F \mid \mathscr{F}_t]-\psi_j(t))\mathrm{dY}_j^{(1)}(t)+\sum_{j=k+1}^{K}\int_0^T E[\mathrm{D}^{\mathrm{G}}_{t,j}F \mid \mathscr{F}_t]\mathrm{d}B_j(t)+\sum_{j=k+1}^{K}\int_0^T E[\mathrm{D}^{\mathrm{p},1}_{t,j}F \mid \mathscr{F}_t]\mathrm{dY}_j^{(1)}(t)+\sum_{j=1}^{K}\sum_{m\geqslant 2}\int_0^T E[\mathrm{D}^{\mathrm{p},m}_{t,j}F \mid \mathscr{F}_t]\mathrm{dY}_j^{(m)}(t)\Big]\times\Big[\sum_{j=1}^{k}\int_0^T \varepsilon_j(t)\sigma_j\mathrm{d}B_j(t)+\sum_{j=1}^{k}\int_0^T \varepsilon_j(t)\mathrm{dY}_j^{(1)}(t)\Big]\Big\}=0$$

根据 $Y^{(m)}(t)$ 的正交性[16]，上式写为

$$\sum_{j=1}^{k}E\Big[\int_0^T (E[\mathrm{D}^{\mathrm{G}}_{t,j}F \mid \mathscr{F}_t]-\psi_j(t)\sigma_j)\varepsilon_j(t)\sigma_j\mathrm{d}t\Big]+\sum_{j=1}^{k}E\Big[\int_0^T (E[\mathrm{D}^{\mathrm{p},1}_{t,j}F \mid \mathscr{F}_t]-\psi_j(t))\varepsilon_j(t)\kappa_j^2\mathrm{d}t\Big]=0 \tag{13}$$

其中 $\kappa_j^2=E[(\eta_j(t))^2]$，$j=1,2,\cdots,k$，化简式(13)得

$$\sum_{j=1}^{k}E\Big[\int_0^T [\varepsilon_j(t)(E[\mathrm{D}^{\mathrm{G}}_{t,j}F \mid \mathscr{F}_t]\sigma_j+E[\mathrm{D}^{\mathrm{p},1}_{t,j}F \mid \mathscr{F}_t]\kappa_j^2)]\mathrm{d}t\Big]=\sum_{j=1}^{k}E\Big[\int_0^T \psi_j(t)\varepsilon_j(t)(\sigma_j^2+\kappa_j^2)\mathrm{d}t\Big] \tag{14}$$

由 $\varepsilon_j \in \mathscr{A}_{\mathscr{F}}$ 的任意性，根据式(14)，可得式(8)，定理得证.

由定理 2 和条件数学期望的性质，可直接得到部分信息的 $\mathscr{H}$ 方差最小复制策略.

推论 1 在 Lévy 过程所驱动的市场式(5)、(6)中，欧式期权 $F \in L^2(\theta)$ 的 $\mathscr{H}$ 方差最小复制策略为

$$\psi_j(t)=\frac{\sigma_j E[\mathrm{D}^{\mathrm{G}}_{t,j}F \mid \mathscr{H}_t](\omega)+\kappa_j^2 E[\mathrm{D}^{\mathrm{p},1}_{t,j}F \mid \mathscr{H}_t](\omega)}{\sigma_j^2+\kappa_j^2}$$

在 Lévy 过程驱动的金融市场中，当投资者对 $F \in L^2(\theta)$ 选择复制策略时，由于跳跃过程和资产选择的限制不能实现对欧式期权 F 完全复制.

这是市场本身所存在的不可规避的风险，称之为市场固有风险. 市场固有风险不包括信息缺失所带来的风险.

定义 7　令 $\hat{F}$ 表示 $\mathcal{F}$ 方差最小复制策略 $\varphi(t)=(\varphi_0(t),\varphi_1(t),\cdots,\varphi_k(t)),0\leqslant t\leqslant T,k\leqslant K$ 所复制的价值，称 $F-\hat{F}$ 为市场固有风险，表示为 $\Lambda=F-\hat{F}$.

定理 3　在 Lévy 过程驱动的金融市场式(5)、(6)中，系统的固有风险为

$$\begin{aligned}\Lambda=&\sum_{j=k+1}^{K}\int_0^T E[\mathrm{D}_{t,j}^{\mathrm{G}}F\mid\mathcal{F}_t]\mathrm{d}B_j(t)+\\&\sum_{j=1}^{k}\int_0^T\{\kappa_j^2[E[\mathrm{D}_{t,j}^{\mathrm{G}}F\mid\mathcal{F}_t](\omega)-\\&\sigma_jE[\mathrm{D}_{t,j}^{\mathrm{p};1}F\mid\mathcal{F}_t](\omega)]/(\sigma_j^2+\kappa_j^2)\}\mathrm{d}B_j(t)+\\&\sum_{j=1}^{k}\int_0^T\{[\sigma_j^2E[\mathrm{D}_{t,j}^{\mathrm{G}}F\mid\mathcal{F}_t](\omega)-\\&\kappa_j^2E[\mathrm{D}_{t,j}^{\mathrm{p};1}F\mid\mathcal{F}_t](\omega)]/(\sigma_j^2+\kappa_j^2)\}\mathrm{d}\eta_j(t)+\\&\sum_{j=1}^{K}\sum_{m\geqslant 2}\int_0^T E[\mathrm{D}_{t,j}^{\mathrm{p};m}F\mid\mathcal{F}_t]\mathrm{d}Y_j^{(m)}(t)+\\&\sum_{j=k}^{K}\int_0^T E[\mathrm{D}_{t,j}^{\mathrm{p};1}F\mid\mathcal{F}_t]\mathrm{d}\eta_j(t)\end{aligned}\tag{15}$$

其中 $\kappa_j^2=E[\eta_j^2(1)],j=1,2,\cdots,k,k\leqslant K$；$Y_j^{(m)}(t)$ 是 Lévy 过程 $\eta_j(t)$ 的正交幂跳过程.

证明　给定平方可积 Lévy 白噪声泛函 $F\in L^2(\theta)$，根据 $L^2(\theta)$ 上的 CHO 定理，F 具有分解

$$F(\omega)=E[F]+\sum_{j=1}^{K}\int_0^T E[\mathrm{D}_{t,j}^{\mathrm{G}}F\mid\mathcal{F}_t]\mathrm{d}B_j(t)+\sum_{j=1}^{K}\sum_{m\geqslant 1}\int_0^T E[\mathrm{D}_{t,j}^{\mathrm{p};m}F\mid\mathcal{F}_t]\mathrm{d}Y_j^{(m)}(t)$$

令 $\hat{F}$ 表示 $\mathcal{F}$ 方差最小复制策略 $\varphi(t)=(\varphi_0(t),\varphi_1(t),\cdots,\varphi_k(t)),0\leqslant t\leqslant T,k\leqslant K$ 所复制的价值，则

$$\begin{aligned}\hat{F}=&E[F]+\sum_{j=1}^{k}\int_0^T\varphi_j(t)\sigma_j\mathrm{d}B_j(t)+\\&\sum_{j=1}^{k}\int_0^T\varphi_j(t)\mathrm{d}Y_j^{(1)}(t)=\\&E[F]+\sum_{j=1}^{k}\int_0^T\{[\sigma_jE[\mathrm{D}_{t,j}^{\mathrm{G}}F\mid\mathcal{F}_t](\omega)+\\&\kappa_j^2E[\mathrm{D}_{t,j}^{\mathrm{p};1}F\mid\mathcal{F}_t](\omega)]/(\sigma_j^2+\kappa_j^2)\}\sigma_j\mathrm{d}B_j(t)+\\&\sum_{j=1}^{k}\int_0^T\{[\sigma_jE[\mathrm{D}_{t,j}^{\mathrm{G}}F\mid\mathcal{F}_t](\omega)+\\&\kappa_j^2E[\mathrm{D}_{t,j}^{\mathrm{p};1}F\mid\mathcal{F}_t](\omega)]/(\sigma_j^2+\kappa_j^2)\}\mathrm{d}Y_j^{(1)}(t)\end{aligned}$$

将 F 和 $\hat{F}$ 代入固有风险 $\Lambda=F-\hat{F}$ 的定义，可得到式(15)，证毕.

推论 2　如果金融市场由补偿 Poisson 过程 $\widetilde{N}(t)$ 驱动，即 $\tilde{\eta}(t)=\widetilde{N}(t)$，且 $k=K$，则有 $\Lambda=0$.

证明　当 $\tilde{\eta}(t)=\widetilde{N}(t)$ 时，对给定平方可积 Lévy 白噪声泛函 $F\in L^2(\mu_{\mathrm{p}})$，根据 $L^2(\mu_{\mathrm{p}})$ 上的 CHO 定理，F 具有分解 $F(\omega)=E[F]+\sum_{j=1}^{K}\int_0^T E[\mathrm{D}_{t,j}^{\mathrm{p};1}F\mid\mathcal{F}_t]\mathrm{d}Y_j^{(1)}(t)$. 令 $\hat{F}$ 表示 $\mathcal{F}$ 方差最小复制策略 $\varphi(t)=(\varphi_0(t),\varphi_1(t),\cdots,\varphi_k(t)),0\leqslant t\leqslant T,k\leqslant K$ 所复制的价值，则

$$\hat{F}=E[F]+\sum_{j=1}^{k}\int_0^T\varphi_j(t)\mathrm{d}\widetilde{N}(t)=E[F]+\sum_{j=1}^{k}\int_0^T E[\mathrm{D}_{t,j}^{\mathrm{p};1}F\mid\mathcal{F}_t](\omega)\mathrm{d}Y_j^{(1)}(t)$$

将 F 和 $\hat{F}$ 代入固有风险 $\Lambda=F-\hat{F}$ 的定义，可得 $\Lambda=0$，那么 Lévy 过程驱动的金融市场是完全市场.

由此，当所有的 K 个风险资产都用来组成复制策略时，Lévy 过程的特例 $\tilde{\eta}(t)=\widetilde{N}(t)$ 所驱动的市场是完全的.

□

4　结　语

本文研究由布朗运动和纯跳 Lévy 过程复合的 Lévy 过程驱动的金融市场. 此市场既有连续波动的性质，又复合了如金融危机等重大金融事件所造成的不规则跳跃式波动. 白噪声分析的方法应用于金融市场在文献[3]和[14]中都有所研究，文献[3]用 Gauss 白噪声分析研究布朗运动驱动的金融市场，而文献[14]用纯跳 Lévy 白噪声分析研究纯跳 Lévy 过程驱动的金融市场. 本文的模型是文献[3]和[14]中模型的复合. 在 Gauss 白噪声和纯跳 Lévy 白噪声复合的 Lévy 白噪声框架下，应用 CHO 定理，用 Malliavin 导数具体表示了欧式期权的方差最小复制策略和市场固有风险. 因此，本文的结果包含了文献[3]和[14]的结果，而且更贴近现实中一般的金融市场.

参考文献：

[1] KARATZAS I, OCONE D. A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios [J]. **Stochastics and Stochastic Reports**,

1991, **34**(2):187-220

[2] HIDA Takeyuki. White noise analysis and its applications [J]. **North-Holland Mathematical Studies**, 1982, **74**:43-48

[3] AASE K, ØKSENDAL B, PRIVAULT N, *et al*. White noise generalizations of Clark-Haussmann- Ocone theorem with application to mathematical finance [J]. **Finance and Stochastics**, 2000, **4**(4):465-496

[4] ELLIOTT R, VAN DER HORK J. A general fractional white noise theory and applications to finance [J]. **Mathematical Finance**, 2003, **13**(2):301-330

[5] HU Y, ØKSENDAL B. Fractional white noise calculus and applications to finance [J]. **Infinite Dimensional Analysis Quantum Probability Related Topics**, 2003, **6**(1):1-32

[6] EBERLEIN E, KELLER U. Hyperbolic distributions in finance [J]. **Bernoulli**, 1995, **1**(3):281-299

[7] BARNDORFF-NIELSEN E. Processes of normal inverse Gaussian type [J]. **Finance and Stochastics**, 1998, **2**(1):41-68

[8] SCHOUTENS W. **Lévy Processes in Finance** [M]. Hoboken:Wiley Blackwell, 2003

[9] CONT R, TANKOV P. **Financial Modeling with Jump Processes** [M]. London:Chapman & Hall/CRC Press, 2003

[10] APPLEBAUM D. **Lévy Processes and Stochastic Calculus** [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004

[11] LØKKA A, ØKSENDAL B, PROSKE F. Stochastic partial differential equations driven by Lévy space-time white noise [J]. **The Annals of Applied Probability**, 2004, **14**(3):1506-1528

[12] 冯敬海,王 岩,冯恩民. 由纯跳 Lévy 白噪声驱动的随机薛定谔方程[J]. 大连理工大学学报, 2008, **48**(5):769-774
(FENG Jing-hai, WANG Yan, FENG En-min. Stochastic Schrödinger equation driven by pure jump Lévy white noise [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2008, **48**(5):769-774)

[13] LØKKA A. Martingale representation of functionals of Lévy processes [J]. **Stochastic Analysis and Applications**, 2004, **22**:867-892

[14] DI NUNNO G, ØKSENDAL B, PROSKE F. White noise analysis for Lévy processes [J]. **Journal of Functional Analysis**, 2004, **206**(1):109-148

[15] 冯敬海,王 岩,冯恩民. 复合白噪声驱动的输运方程 [J]. 应用概率统计, 2009, **25**(6):597-610

[16] NUALART D, SCHOUTENS W. Chaotic and predictable representations for Lévy processes [J]. **Stochastic Processes and Their Applications**, 2000, **90**(1):109-122

Optimal asset allocation replicating portfolio in financial market driven by Lévy processes

WANG Yan*, FENG Jing-hai, FENG En-min

(School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The financial market driven by Lévy processes is studied by white noise approach. The Clark-Haussmann-Ocone theorem is given under the framework of Lévy white noise, which is combined by Gaussian white noise and pure jump Lévy white noise. Applying the theorem, the minimal variance replicating portfolio for an European option is represented by Malliavin derivatives under full information and partial information. Furthermore, the explicit function is derived to describe the systematic risk. The analytical results show that the results are more appropriate for a general financial market in the real world.

Key words: Lévy processes; Malliavin derivative; minimal variance replicating portfolio; Clark-Haussmann-Ocone theorem