应用数学

文章编号：1000-8608(2012)01-0146-04

# 多属性决策中一种模糊度量排序方法

刘学生*[1]，李晓燕[1]，于红志[1]，吴 伟[2]

（1.大连大学 信息工程学院，辽宁 大连 116622；
2.大连理工大学 工商管理学院，辽宁 大连 116024）

**摘要：**针对多属性决策的排序问题，在模糊集的基础上重新建立了一种优势关系，定义了新的优势类，利用优势度及综合优势度，基于优势度的多属性决策方法，得到一种多属性决策排序的新方法.给出了此优势关系性质及此方法的可行性.具体实例的应用和验证表明该方法在多种条件下，对多属性排序具有适应性和方便应用的特点，丰富了多属性决策中的排序方法.

**关键词：**模糊度；优势关系；优势度；多属性排序
**中图分类号：**O29 **文献标志码：**A

## 0 引 言

当今信息时代，管理科学、系统工程、计算机科学、经济、金融、信息科学都将触及多属性决策问题：管理决策，工程方案选择，优化软件，多支股票的选取，分析上市公司成败缘由等，都需要根据各个问题的相关信息做出合理的选择，这将关系到工程行动项目的成与败，投资的得与失.

一般情况下，多属性决策的数学模型如下：

设给定备选方案集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，对每一个方案具有属性集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，每一个方案 $x_i$ 关于属性 $a_j$ 都有评价值 $f(x_i,a_j)=r_{ij}$，这样就构成了一个决策形式，可用决策矩阵 $\boldsymbol{R}$ 来表示：

$$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{pmatrix}$$

多属性排序决策表述为

$\boldsymbol{R}\rightarrow\boldsymbol{D}(d_1,d_2,\cdots,d_n)\Rightarrow$ 各方案的排序

即由 $\boldsymbol{R}$ 得出决策排序向量 $\boldsymbol{D}$，$d_i$ 表示方案 $x_i$ 的排序指标，最后根据每个 $d_i$ 得到方案的排序.

本文在模糊集理论的基础上，通过建立一种新的优势关系 $R_\lambda(x_i,x_j)$ 及优势度 $R(x_i,x_j)$，得出方案 $\{x_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 的排序结果，以丰富多属性决策问题解决方法[1].

## 1 优势关系及其性质

**定义 1** 设有 $(U,A,F)$ 信息系统，$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，为对象集，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，为属性集，$F=\{f_l:U\rightarrow V_l(l\leqslant m)\}$，为信息函数，$V_l$ 为属性 $a_l$ 的值域且 $(V_l,\geqslant_l)$ 为偏序关系集.

**定义 2** 对于 $(U,A,F)$ 的信息系统，自然定义序关系

$$R^{\geqslant}(x_i,x_j)=\{(x_i,x_j)\in U^2\mid f_l(x_i)\geqslant f_l(x_j),a_l\in A\}$$

关系 $R^{\geqslant}$ 是 $U$ 上的拟序关系.对于拟序关系进行多属性系统的排序是较粗的.为了对 $R^{\geqslant}$ 进行改进，引入新的优势关系，这种关系是一种模糊关系[2].

**定义 3** 设有 $(U,A,F)$ 信息系统，定义属性占优模糊度为

$$\mu_{ij}=\frac{|\{a_l\mid f_l(x_i)\geqslant f_l(x_j)\}|}{|A|}$$

其中 $|\cdot|$ 表示集合元素的个数，这里 $|A|=m$.

显然 $0\leqslant\mu_{ij}\leqslant1$，当 $x_i$ 与 $x_j$ 进行比较时，在所有的 $a_l$ 上 $f_l(x_i)\geqslant f_l(x_j)$，即当 $|\{a_l\mid f_l(x_i)$

**收稿日期：**2010-05-11； **修回日期：**2011-11-08.
**基金项目：**国家自然科学基金资助项目(61170255).
**作者简介：**刘学生*(1954-)，男，大连理工大学2009届博士，教授，E-mail:lxsdalian@126.com.

$\geqslant f_l(x_j)\}|=m$ 时，$\mu_{ij}=1$；当在所有 $a_l$ 上都有 $f_l(x_i)\leqslant f_l(x_j)$ 时，即 $|\{a_l \mid f_l(x_i)\geqslant f_l(x_j)\}|=0$ 时，$\mu_{ij}=0$.

**定义 4**　设有 $(U,A,F)$ 信息系统，$\mu_{ij}$ 为属性占优模糊度，

$$R_\lambda(x_i,x_j)=\{(x_i,x_j)\mid \mu_{ij}\geqslant\lambda\}$$

则称 $R_\lambda(x_i,x_j)$ 为 $x_i$ 与 $x_j$ 关于 $\lambda$ 的优势关系.

事实上 $R_\lambda(x_i,x_j)$ 是关于 $x_i$ 与 $x_j$ 中优势判定的一个阈值，通常 $0.5\leqslant\lambda\leqslant 1$[3]. 由此可在所有对象 $U$ 中进行两两比较，得如下结果：

优势类

$$[x_i]=\{x_j\mid (x_i,x_j)\in R_\lambda(x_i,x_j)\}$$

优势度

$$R(x_i,x_j)=\frac{|[x_i]\cup[x_j]^c|}{n}$$

综合优势度

$$R(x_i)=\sum_{j=1}^{n}R(x_i,x_j)$$

**定理 1**　$R_\lambda(x_i,x_j)$ 满足下列性质：

(1) 自反性. $(x_i,x_i)\in R_\lambda(x_i,x_i)$，$i=1,2,\cdots,n$.

(2) 弱传递性. 若 $(x_i,x_k)\in R_1(x_i,x_k)$，$(x_k,x_j)\in R_\lambda(x_k,x_j)$，则有 $(x_i,x_j)\in R_\lambda(x_i,x_j)$；或若 $(x_i,x_k)\in R_\lambda(x_i,x_k)$，$(x_k,x_j)\in R_1(x_k,x_j)$，则有 $(x_i,x_j)\in R_\lambda(x_i,x_j)$，其中 $\lambda\in[0.5,1]$.

**证明**　(1) 显然有 $\mu_{ii}=1$，所以对任意 $\lambda\in[0.5,1]$ 都有 $(x_i,x_i)\in R_\lambda(x_i,x_i)$.

(2) 对任意给定的 $\lambda\in[0.5,1]$ 有 $\mu_{kj}\geqslant\lambda$，即存在 $\{l_{i_1},\cdots,l_{i_p}\}\in A$，使 $p/m=\lambda$，也就是存在 $f_{l_{i_t}}(x_k)\geqslant f_{l_{i_t}}(x_j)$，$t\in\{1,2,\cdots,p\}$，由 $(x_i,x_k)\in R_1(x_i,x_k)$，当然有 $f_{l_{i_t}}(x_i)\geqslant f_{l_{i_t}}(x_k)$，由此推得 $f_{l_{i_t}}(x_i)\geqslant f_{l_{i_t}}(x_k)\geqslant f_{l_{i_t}}(x_j)$，即 $\mu_{ij}\geqslant\lambda$ 成立，也就是 $(x_i,x_j)\in R_\lambda(x_i,x_j)$. 同样可证当 $(x_i,x_k)\in R_\lambda(x_i,x_k)$，而 $(x_k,x_j)\in R_1(x_k,x_j)$ 时，有 $(x_i,x_j)\in R_\lambda(x_i,x_j)$.

**定理 2**　如果 $(x_i,x_j)\in R_1(x_i,x_j)$，则有 $R(x_i)\geqslant R(x_j)$.

**证明**　当 $(x_i,x_j)\in R_1(x_i,x_j)$ 时，有 $\mu_{ij}=1$，即对任意的 $a_l\in A$，都有 $f_l(x_i)\geqslant f_l(x_j)$. 又

$$R(x_i)=\sum_{j=1}^{n}R(x_i,x_k)$$

$$R(x_j)=\sum_{j=1}^{n}R(x_j,x_k)$$

对于任意的 $x_k\neq x_j\neq x_i$，

$$R(x_i,x_k)=\frac{|[x_i]\cup[x_k]^c|}{n}$$

$$R(x_j,x_k)=\frac{|[x_j]\cup[x_k]^c|}{n}$$

这时 $[x_i]=\{x_s\mid (x_i,x_s)\in R_\lambda(x_i,x_s)\}$，$[x_j]=\{x_s\mid (x_j,x_s)\in R_\lambda(x_j,x_s)\}$.

当 $x_s\in[x_j]$ 时，即 $\mu_{js}\geqslant\lambda$，即存在 $\{a_{l_{i_1}},\cdots,a_{l_{i_p}}\}\in A$ 使 $p/m=\lambda$，也就是存在 $f_{l_t}(x_j)\geqslant f_{l_t}(x_s)$，$t\in\{1,2,\cdots,p\}$.

由于 $(x_i,x_j)\in R_1(x_i,x_j)$，即对任意的 $a_l\in A$ 都有 $f_l(x_i)\geqslant f_l(x_j)$，当然有 $f_{l_t}(x_i)\geqslant f_{l_t}(x_j)\geqslant f_{l_t}(x_s)$，所以有 $x_s\in[x_i]$. 即 $R(x_i,x_k)\geqslant R(x_j,x_k)$. 因此有 $R(x_i)\geqslant R(x_j)$.

## 2　实例分析

表 1 为全国 31 个地区可持续发展能力的信息表，其中的等级是数字离散后的结果.

可持续发展能力信息系统的排序步骤如下：

(1) 计算属性占优模糊度

$$\mu_{ij}=\frac{|\{a_l\mid f_l(x_i)\geqslant f_l(x_j)\}|}{|A|}$$

如

$$\mu_{11}=\frac{|\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}|}{|A|}=\frac{5}{5}=1$$

$$\mu_{12}=\frac{|\{a_1,a_2,a_4,a_5\}|}{|A|}=\frac{4}{5}$$

$$\vdots$$

$$\mu_{1,31}=\frac{|\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}|}{|A|}=\frac{5}{5}=1$$

(2) 根据优势关系 $R_\lambda(x_i,x_j)=\{(x_i,x_j)\mid \mu_{ij}\geqslant\lambda\}$，本例选取 $\lambda=0.51$，及优势类 $[x_i]=\{x_j\mid (x_i,x_j)\in R_\lambda(x_i,x_j)\}$，计算各对象的优势类，如：

$$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18},x_{19},x_{20},x_{21},x_{22},x_{23},x_{24},x_{25},x_{26},x_{27},x_{28},x_{29},x_{30},x_{31}\}$$

(3) 利用公式 $R(x_i,x_j)=|[x_i]\cup[x_j]^c|/n$ 计算优势度，如：

$$R(x_1,x_1)=\frac{|[x_1]\cup[x_1]^c|}{n}=\frac{31}{31}=1$$

$$R(x_1,x_2)=\frac{|[x_1]\cup[x_2]^c|}{n}=\frac{31}{31}=1$$

$$\vdots$$

$$R(x_1,x_{31})=\frac{|[x_1]\cup[x_{31}]^c|}{n}=\frac{31}{31}=1$$

表1 全国各地区可持续发展能力有序分类

Tab. 1 The ordered categories of the power with sustainable development in the countrywide

| 地区 | 次序级别 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 生存支持系统 | 发展支持系统 | 环境支持系统 | 社会支持系统 | 智力支持系统 |
| 北京 | 15 | 14 | 8 | 15 | 15 |
| 天津 | 10 | 13 | 9 | 13 | 13 |
| 河北 | 9 | 6 | 4 | 9 | 8 |
| 山西 | 1 | 3 | 12 | 9 | 7 |
| 内蒙古 | 8 | 4 | 3 | 7 | 6 |
| 辽宁 | 9 | 8 | 6 | 12 | 9 |
| 吉林 | 13 | 6 | 7 | 10 | 9 |
| 黑龙江 | 12 | 6 | 11 | 10 | 9 |
| 上海 | 14 | 15 | 12 | 14 | 14 |
| 江苏 | 11 | 12 | 10 | 10 | 12 |
| 浙江 | 12 | 10 | 13 | 11 | 12 |
| 安徽 | 7 | 4 | 9 | 5 | 6 |
| 福建 | 11 | 8 | 13 | 8 | 11 |
| 江西 | 10 | 5 | 11 | 7 | 5 |
| 山东 | 11 | 11 | 7 | 9 | 10 |
| 河南 | 10 | 5 | 8 | 9 | 6 |
| 湖北 | 8 | 5 | 9 | 7 | 11 |
| 湖南 | 9 | 5 | 13 | 7 | 8 |
| 广东 | 10 | 13 | 9 | 10 | 13 |
| 广西 | 9 | 4 | 9 | 5 | 5 |
| 海南 | 10 | 6 | 14 | 6 | 4 |
| 重庆 | 7 | 4 | 5 | 6 | 9 |
| 四川 | 8 | 3 | 9 | 6 | 5 |
| 贵州 | 4 | 1 | 12 | 2 | 2 |
| 云南 | 7 | 4 | 13 | 3 | 2 |
| 西藏 | 4 | 3 | 15 | 1 | 1 |
| 陕西 | 7 | 4 | 6 | 7 | 9 |
| 甘肃 | 3 | 2 | 6 | 4 | 6 |
| 青海 | 2 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| 宁夏 | 4 | 1 | 1 | 6 | 3 |
| 新疆 | 7 | 4 | 4 | 8 | 5 |

(4) 计算综合优势度 $R(x_i)=\sum_{j=1}^{n}R(x_i,x_j)$，如：

$$R(x_1)=\sum_{j=1}^{n}R(x_1,x_j)=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{31}=31=\frac{961}{31}$$

依次可得

$$R(x_2)=\sum_{j=1}^{n}R(x_2,x_j)=\frac{956}{31}$$

$$R(x_3)=\sum_{j=1}^{n}R(x_3,x_j)=\frac{884}{31}$$

$$R(x_4)=\sum_{j=1}^{n}R(x_4,x_j)=\frac{747}{31}$$

$$R(x_5)=\sum_{j=1}^{n}R(x_5,x_j)=\frac{766}{31}$$

$$R(x_6)=\sum_{j=1}^{n}R(x_6,x_j)=\frac{915}{31}$$

$$R(x_7)=\sum_{j=1}^{n}R(x_7,x_j)=\frac{913}{31}$$

$$R(x_8)=\sum_{j=1}^{n}R(x_8,x_j)=\frac{927}{31}$$

$$R(x_9)=\sum_{j=1}^{n}R(x_9,x_j)=\frac{959}{31}$$

$$R(x_{10})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{10},x_j)=\frac{947}{31}$$

$$R(x_{11})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{11},x_j)=\frac{954}{31}$$

$$R(x_{12})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{12},x_j)=\frac{768}{31}$$

$$R(x_{13})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{13},x_j)=\frac{933}{31}$$

$$R(x_{14})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{14},x_j)=\frac{850}{31}$$

$$R(x_{15})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{15},x_j)=\frac{902}{31}$$

$$R(x_{16})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{16},x_j)=\frac{884}{31}$$

$$R(x_{17})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{17},x_j)=\frac{856}{31}$$

$$R(x_{18})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{18},x_j)=\frac{853}{31}$$

$$R(x_{19})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{19},x_j)=\frac{952}{31}$$

$$R(x_{20})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{20},x_j)=\frac{768}{31}$$

$$R(x_{21})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{21},x_j)=\frac{884}{31}$$

$$R(x_{22})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{22},x_j)=\frac{789}{31}$$

$$R(x_{23})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{23},x_j)=\frac{695}{31}$$

$$R(x_{24})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{24},x_j)=\frac{500}{31}$$

$$R(x_{25})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{25},x_j)=\frac{684}{31}$$

$$R(x_{26})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{26},x_j)=\frac{622}{31}$$

$$R(x_{27})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{27},x_j)=\frac{789}{31}$$

$$R(x_{28})=\sum_{j=1}^{n}R(x_{28},x_j)=\frac{561}{31}$$

$$R(x_{29}) = \sum_{j=1}^{n} R(x_{29}, x_j) = \frac{471}{31}$$

$$R(x_{30}) = \sum_{j=1}^{n} R(x_{30}, x_j) = \frac{538}{31}$$

$$R(x_{31}) = \sum_{j=1}^{n} R(x_{31}, x_j) = \frac{768}{31}$$

得 $x_1, x_2, \cdots, x_{31}$ 的排序结果：

$R(x_1) > R(x_9) > R(x_2) > R(x_{11}) > R(x_{19}) > R(x_{10}) > R(x_{13}) > R(x_8) > R(x_6) > R(x_7) > R(x_{15}) > R(x_3) = R(x_{16}) = R(x_{21}) > R(x_{17}) > R(x_{18}) > R(x_{14}) > R(x_{22}) = R(x_{27}) > R(x_{12}) = R(x_{20}) = R(x_{31}) > R(x_5) > R(x_4) > R(x_{23}) > R(x_{25}) > R(x_{26}) > R(x_{28}) > R(x_{30}) > R(x_{24}) > R(x_{29})$

排序结果体现了数据分类的特点，与按加权平均的排序结果相比，既体现了前中后大类排序段的一致性，又兼顾了简单计算的要求.

由于粗的分类原因，有的地区排序重叠，这种排序适合于粗的大类排序，它避免了属性权重的确定，在属性权重难以求得的情况下，是一个非常好的排序方法.

## 3　结　语

本文在属性占优模糊度的基础上，定义了新的优势关系及优势类，从而得到一种多属性决策排序的新方法. 此法计算简单易于操作，容易掌握，其特点是突出了多个属性的整体性，各属性平行参与排序过程，避免了属性权重的确定，使结果更具客观性，减少了主观随意性. 但就其结果而言，有排序重叠，知此方法有区分度不够明晰的缺点，这也是本方法以后需要改进的地方. 对于方案中总体属性值对比区分不大、综合评价极为相近的方案排序可采用其他方法[4~6].

## 参考文献：

[1] LIU Xue-sheng, WU Wei, HU Juan. A method of fuzzy multiple attribute decision making based on rough sets [J]. **International Journal of Innovative Computing Information and Control**, 2008, **4**(8):2005-2010

[2] LIU Xue-sheng, WU Wei. A superiority degree based method for solving multi-attribute decision making problem [J]. **International Journal of Intelligent Information Management Systems and Technologies**, 2007, **3**(2):83-90

[3] 刘学生，吴　伟，邹开其. 区间数排序的粗糙集方法[J]. 大连理工大学学报，2008，**48**(1)：143-146
(LIU Xue-sheng, WU Wei, ZOU Kai-qi. Rough sets ranking methodology for interval numbers [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2008, **48**(1):143-146)

[4] SLOWINSKI R, SEFANOWSKI J, GRECO S, *et al*. Rough set based processing of inconsistent information decision analysis [J]. **Control and Cybernetics**, 2000, **29**(1):379-404

[5] 何亚群，胡寿松. 基于粗糙集的空军航材供应点的偏好选址[J]. 系统工程理论与实践，2003，**23**(7)：95-99

[6] XU Z S. On compatibility of interval fuzzy preference relations [J]. **Fuzzy Optimization and Dicision Making**, 2004, **3**(3):225-233

# Fuzzy sets ranking methodology for multiattribute decision

LIU Xue-sheng*1, LI Xiao-yan1, YU Hong-zhi1, WU Wei2

(1. College of Information and Engineering, Dalian University, Dalian 116622, China;
2. School of Business Administration, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract**: In order to solve the ranking problem of multiattribute decision, a superiority relationship was constructed and new superiority class was defined in a fuzzy set. With dominance index and comprehensive dominance index, a new solution to solve the sortord of multiattribute decision was gained on the basis of the multiattribute decision method of dominance. The properties of the superiority relation and the feasibility of this method were given. The application and verification of this method to the specific cases show that the method makes the ranking of multiattribute decision more practical and convenient, and enrich the ranking methods of multiattribute decision.

**Key words**: fuzzy degree; superiority relationship; dominant degree; multiattribute ranking