第52卷第2期 大连理工大学学报 Vol.52, No.2
2012年3月 Journal of Dalian University of Technology Mar. 2012

应用数学

文章编号：1000-8608(2012)02-0304-05

n维凸模糊集与n维模糊数

商有光[*1,2]， 张 成[3]， 夏尊铨[1]

（1.大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024；
2.中央财经大学 金融学院，北京 100081；
3.大连大学 信息工程学院，辽宁 大连 116622）

摘要： 在n维模糊集理论的基础上，给出了n维凸模糊集的定义，利用凸模糊集的有关性质研究了n维凸模糊集的有关性质.在此研究基础上，又给出了n维(闭)模糊数的概念，根据模糊数的有关性质得到了n维(闭)模糊数相应的运算性质和表示定理，为建立基于n维模糊集的凸分析理论奠定了基础.

关键词： n维模糊集；n维凸模糊集；n维模糊数

中图分类号： O221.1 **文献标志码：** A

0 引 言

向量空间上凸模糊子集概念首先由Zadeh在其模糊集的开创性论文中给出[1]，其后许多学者针对模糊集的代数性质及拓扑性质等进行了深入的研究[2~9]. 文献[10]又将凸性的理论引入到直觉模糊集的理论中. 在文献[8]的基础上，文献[11]给出了三维凸模糊子集的概念，并刻画了各种(α,β)-三维凸模糊子集.

在上述学者研究工作的基础上，本文在文献[12]给出的n维模糊集截集的基础上，利用凸模糊集的有关性质，得到n维凸模糊集的有关性质，推广以上学者的有关工作. 并进一步给出n维模糊数的概念及其运算，研究其性质，以期为以后的模糊决策研究打下基础.

1 n维模糊集

记$L_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid 0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant 1\}$. 在$L_n$上的运算定义如下：

(1) $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant(b_1,b_2,\cdots,b_n)\Leftrightarrow a_i\leqslant b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$.

$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\prec(b_1,b_2,\cdots,b_n)\Leftrightarrow a_i<b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$.

$(a_1,a_2,\cdots,a_n)<(b_1,b_2,\cdots,b_n)\Leftrightarrow a_i\leqslant b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，且对某个$i$，有$a_i<b_i$.

(2) 设$a_t=(a_1^t,a_2^t,\cdots,a_n^t)\in L_n\ (t\in T)$，则$\bigvee_{t\in T}a_t\triangleq(\bigvee_{t\in T}a_1^t,\bigvee_{t\in T}a_2^t,\cdots,\bigvee_{t\in T}a_n^t)$，$\bigwedge_{t\in T}a_t\triangleq(\bigwedge_{t\in T}a_1^t,\bigwedge_{t\in T}a_2^t,\cdots,\bigwedge_{t\in T}a_n^t)$

(3) 设$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in L_n$，则$a^c\triangleq(1-a_n,1-a_{n-1},\cdots,1-a_1)$.

(4) $\bar{1}=(1,1,\cdots,1)$，$\bar{0}=(0,0,\cdots,0)$，则$(L_n;\vee,\wedge,c,\bar{1},\bar{0})$形成一个De Morgan代数.

定义1[12] 设$\mathbf{X}$是一个集合，令

$$\mathbf{L}_n^{\mathbf{X}}=\{\mathbf{A}\mid \mathbf{A}:\mathbf{X}\to L_n\text{ 是一个映射}\}$$

则称$\mathbf{A}\in\mathbf{L}_n^{\mathbf{X}}$是$\mathbf{X}$上的一个$n$维模糊集，将其记作$\mathbf{A}(\boldsymbol{x})=(A^1(\boldsymbol{x})\quad A^2(\boldsymbol{x})\quad\cdots\quad A^n(\boldsymbol{x}))$；$\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbf{X}$

根据L_n中运算的定义，不难知道$\mathbf{L}_n^{\mathbf{X}}$形成一个De Morgan代数. 在文献[1]中，定义

$$(n+1)^{\mathbf{X}}=\left\{\mathbf{A}\mid\mathbf{A}:\mathbf{X}\to\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1\right\}\text{ 是一个映射}\right\}$$

将$(n+1)^{\mathbf{X}}$中的元素称为$\mathbf{X}$上的$n+1$-值模糊集.

收稿日期： 2010-07-01； **修回日期：** 2011-11-15.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(90818025).
作者简介： 商有光*(1966-)，男，博士生，E-mail：bjsyg@sina.com；张 成(1965-)，男，教授；夏尊铨(1937-)，男，教授，博士生导师.

根据 Zadeh 模糊集运算的定义 $(n+1)^{X}$ 也形成一个 De Morgan 代数.

定义 2[12]　设 $\mathbf{A}\in \mathbf{L}_n^X$ 为一个 n 维模糊集，$\mathbf{A}(\boldsymbol{x})=(\mathrm{A}^1(\boldsymbol{x})\quad \mathrm{A}^2(\boldsymbol{x})\quad \cdots\quad \mathrm{A}^n(\boldsymbol{x}))$，对 $\lambda\in[0,1]$，令

$$\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1; & \mathrm{A}^1(\boldsymbol{x})\geqslant\lambda\\ \dfrac{n-1}{n}; & \mathrm{A}^1(\boldsymbol{x})<\lambda\leqslant \mathrm{A}^2(\boldsymbol{x})\\ \cdots & \\ \dfrac{1}{n}; & \mathrm{A}^{n-1}(\boldsymbol{x})<\lambda\leqslant \mathrm{A}^n(\boldsymbol{x})\\ 0; & \lambda>\mathrm{A}^n(\boldsymbol{x})\end{cases}$$

则称 A_λ 为 $\mathbf{A}$ 的 λ-截集.

由此可见，$\{\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x})\mid \boldsymbol{x}\in\mathbf{X}\}\subseteq\left\{0,\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\cdots,\dfrac{n-1}{n},1\right\}$，即 $\mathrm{A}_\lambda\in(n+1)^{X}$.

本文中，$\mathbf{E}$ 表示 $\mathbf{R}$ 上的一个向量空间；$s\wedge t(s\vee t)$ 意味两个实数 s 与 t 取小(大).

设 B 是 $\mathbf{E}$ 上的一个模糊子集，若对任意 $t\in(0,1]$ 及 $z\in\mathbf{E}$，B 满足：$\boldsymbol{x}=z$ 时，$B(z)=t$；否则 $B(z)=0$，则称 B 为一个模糊点，记作 $\boldsymbol{x}_t$. 根据模糊集的扩展原理，模糊点的加法运算与数乘运算定义如下：

$$\boldsymbol{x}_s+\boldsymbol{y}_t=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})_{s\wedge t},\ k\boldsymbol{x}_s=(k\boldsymbol{x})_s$$

其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{E}$，$s,t\in(0,1]$，$k\in\mathbf{R}$.

对于一个模糊点 $\boldsymbol{x}_t$ 和一个模糊集 A，如果 $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})\geqslant t$，则称 $\boldsymbol{x}_t$ 属于 A，记为 $\boldsymbol{x}_t\in\mathrm{A}$.

模糊集 A 称作 $\mathbf{E}$ 上的凸模糊子集，如果对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{E}$ 及 $\lambda\in[0,1]$，有

$$\mathrm{A}((1-\lambda)\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y})\geqslant\mathrm{A}(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}(\boldsymbol{y})$$

设 u 为实数集 $\mathbf{R}$ 上的一个正规模糊集，即存在 $x_0\in\mathbf{R}$ 使 $u(x_0)=1$. 如果对任意的 $\alpha\in[0,1]$，u_α 为一区间，则称 u 为一个模糊数. 将模糊数的全体记成 $\mathscr{F}_0$.

2　n 维凸模糊集

定义 3　称 $\mathbf{A}\in\mathbf{L}_n^E$ 为一个 n 维凸模糊集，如果对任意的 $\lambda\in[0,1]$，A_λ 为 $\mathbf{E}$ 上的凸模糊子集.

对 $\mathbf{A}\in\mathbf{L}_n^E$，设 $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})=(\mathrm{A}^1(\boldsymbol{x})\quad \mathrm{A}^2(\boldsymbol{x})\quad\cdots\quad \mathrm{A}^n(\boldsymbol{x}))$，$\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbf{E}$.

定理 1　$\mathbf{A}\in\mathbf{L}_n^E$ 为一个 n 维凸模糊集当且仅当 $\mathrm{A}^i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为 $\mathbf{E}$ 上的凸模糊子集.

证明　“$\Leftarrow$”对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{E}$ 及 $\alpha\in[0,1]$，有

$$\mathrm{A}_\lambda((1-\alpha)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y})\geqslant\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{y})$$

若 $\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{y})=1$，有 $\mathrm{A}^1(\boldsymbol{x})\geqslant\lambda$，$\mathrm{A}^1(\boldsymbol{y})\geqslant\lambda$. 根据 A^1 为 $\mathbf{E}$ 上的凸模糊子集，故有

$$\mathrm{A}^1((1-\alpha)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y})\geqslant\mathrm{A}^1(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}^1(\boldsymbol{y})\geqslant\lambda$$

因此 $\mathrm{A}_\lambda((1-\alpha)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y})=1$.

若 $\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{y})=\dfrac{n-1}{n}$，则有 $\mathrm{A}^2(\boldsymbol{x})\geqslant\lambda$，$\mathrm{A}^2(\boldsymbol{y})\geqslant\lambda$. 由 A^2 为 $\mathbf{E}$ 上的凸模糊子集，有

$$\mathrm{A}^2((1-\alpha)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y})\geqslant\mathrm{A}^2(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}^2(\boldsymbol{y})\geqslant\lambda$$

于是

$$\mathrm{A}_\lambda((1-\alpha)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y})\geqslant\frac{n-1}{n}=\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{y})$$

依此类推，若 $\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{y})=\dfrac{1}{n}$，则 $\mathrm{A}^n(\boldsymbol{x})\geqslant\lambda$，$\mathrm{A}^n(\boldsymbol{y})\geqslant\lambda$. 由 A^n 为 $\mathbf{E}$ 上的凸模糊子集，有

$$\mathrm{A}^n((1-\alpha)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y})\geqslant\mathrm{A}^n(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}^n(\boldsymbol{y})\geqslant\lambda$$

于是

$$\mathrm{A}_\lambda((1-\alpha)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y})\geqslant\frac{1}{n}=\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{y})$$

因此对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{E}$ 及 $\alpha\in[0,1]$，有 $\mathrm{A}_\lambda((1-\alpha)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y})\geqslant\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{y})$.

“$\Rightarrow$”如果存在 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，使得 A^i 不是 $\mathbf{E}$ 上的凸模糊子集，则存在 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{E}$ 及 $\alpha\in[0,1]$，使得 $\mathrm{A}^i((1-\alpha)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y})<\mathrm{A}^i(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}^i(\boldsymbol{y})$. 于是存在 $\lambda\in(0,1)$，使得

$$\mathrm{A}^i((1-\alpha)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y})<\lambda<\mathrm{A}^i(\boldsymbol{x})\wedge\mathbf{A}^i(\boldsymbol{y})$$

若 $\mathrm{A}^i(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}^i(\boldsymbol{y})>\lambda$，则 $\mathrm{A}^i(\boldsymbol{x})>\lambda$，$\mathrm{A}^i(\boldsymbol{y})>\lambda$. 故

$$\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x})\geqslant\frac{n-i+1}{n},\ \mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{y})\geqslant\frac{n-i+1}{n}$$

由 $\mathbf{A}$ 为一个 n 维凸模糊集，故

$$\mathrm{A}_\lambda((1-\alpha)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y})\geqslant\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{y})\geqslant\frac{n-i+1}{n}$$

这说明 $\mathrm{A}^i((1-\alpha)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y})\geqslant\lambda$. 矛盾.

显然当 $n=1$ 时，n 维凸模糊集便是文献[2]的凸模糊集；当 $n=2$ 时，便可得到区间值凸模糊子集与直觉凸模糊子集；当 $n=3$ 时，就是 3 维凸模糊子集；当 $n=4$ 时，便可得到区间值直觉凸模糊子集，由此可见，对上述的 n 维凸模糊集研究具

有一般的意义.

定理 2　设 $\mathbf{A}\in \mathbf{L}_n^{\mathbf{E}}$,则 $\mathbf{A}$ 为 $\mathbf{E}$ 的 n 维凸模糊集的充要条件为

对任意 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_p\in\mathbf{E}$ 和 $a_1,a_2,\cdots,a_p\in[0,1]$, $\sum_{i=1}^{p}a_i=1$,有

$$\mathrm{A}_\lambda\Big(\sum_{i=1}^{p}a_i\boldsymbol{x}_i\Big)\geqslant\min\{\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x}_1),\cdots,\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x}_p)\}$$

证明　充分性显然.

必要性:由定义知,当 $p=2$ 时,结论成立.假设当 $p=k$ 时,结论成立,即

$$\mathrm{A}_\lambda\Big(\sum_{i=1}^{k}a_i\boldsymbol{x}_i\Big)\geqslant\min\{\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x}_1),\cdots,\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x}_k)\}$$

当 $p=k+1$ 时,不妨设 $a_{k+1}\neq 1$,则

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_\lambda\Big(\sum_{i=1}^{k+1}a_i\boldsymbol{x}_i\Big)&=\mathrm{A}_\lambda\Big(\sum_{i=1}^{k}a_i\boldsymbol{x}_i+a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}\Big)=\\&\mathrm{A}_\lambda\Big((1-a_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{1-a_{k+1}}\boldsymbol{x}_i+a_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}\Big)\geqslant\\&\mathrm{A}_\lambda\Big(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{1-a_{k+1}}\boldsymbol{x}_i\Big)\wedge\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x}_{k+1})\geqslant\\&\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x}_1)\wedge\cdots\wedge\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x}_k)\wedge\mathrm{A}_\lambda(\boldsymbol{x}_{k+1}).\end{aligned}$$

即 $p=k+1$ 时结论成立.故结论成立.

定理 3　设 $\mathbf{A}\in \mathbf{L}_n^{\mathbf{E}}$,则 $\mathbf{A}$ 为 $\mathbf{E}$ 的 n 维凸模糊集的充要条件为

对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{E}$, $s,t\in(0,1]$ 及 $\lambda\in[0,1]$,有 $[((1-\lambda)\boldsymbol{x}_s+\lambda\boldsymbol{y}_t)\in\mathbf{A}]\geqslant[\boldsymbol{x}_s\in\mathbf{A}]\wedge[\boldsymbol{y}_t\in\mathbf{A}]$.

其中 $[\boldsymbol{x}_a\in\mathbf{A}]$ 表示 $\boldsymbol{x}_a$ 属于 $\mathbf{A}$ 的程度,定义为 $[\boldsymbol{x}_a\in\mathbf{A}]\triangleq\mathrm{A}_a(\boldsymbol{x})(a\in[0,1])$.

证明　充分性:由 $[((1-\lambda)\boldsymbol{x}_s+\lambda\boldsymbol{y}_t)\in\mathbf{A}]\geqslant[\boldsymbol{x}_s\in\mathbf{A}]\wedge[\boldsymbol{y}_t\in\mathbf{A}]$,知

$$\mathrm{A}_{s\wedge t}((1-\lambda)\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y})\geqslant\mathrm{A}_s(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}_t(\boldsymbol{y})$$

取 $s=t$ 即知 $\mathbf{A}$ 为 $\mathbf{E}$ 的 n 维凸模糊集.

必要性:令 $c=[\boldsymbol{x}_s\in\mathbf{A}]\wedge[\boldsymbol{y}_t\in\mathbf{A}]=\mathrm{A}_s(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}_t(\boldsymbol{y})$.

当 $c=1$ 时,有 $\mathrm{A}^1(\boldsymbol{x})\geqslant s$, $\mathrm{A}^1(\boldsymbol{y})\geqslant t$.由定理1知 A^1 是凸模糊集,从而

$$\mathrm{A}^1((1-\lambda)\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y})\geqslant\mathrm{A}^1(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}^1(\boldsymbol{y})\geqslant s\wedge t$$

故 $\mathrm{A}_{s\wedge t}((1-\lambda)\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y})=1$,从而

$$[((1-\lambda)\boldsymbol{x}_s+\lambda\boldsymbol{y}_t)\in\mathbf{A}]=1$$

故 $[((1-\lambda)\boldsymbol{x}_s+\lambda\boldsymbol{y}_t)\in\mathbf{A}]\geqslant[\boldsymbol{x}_s\in\mathbf{A}]\wedge[\boldsymbol{y}_t\in\mathbf{A}]$.

当 $c=\frac{n-1}{n}$ 时,有 $\mathrm{A}^2(\boldsymbol{x})\geqslant s$, $\mathrm{A}^2(\boldsymbol{y})\geqslant t$,由定理1知 A^2 是凸模糊集,从而

$$\mathrm{A}^2((1-\lambda)\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y})\geqslant\mathrm{A}^2(\boldsymbol{x})\wedge\mathrm{A}^2(\boldsymbol{y})\geqslant s\wedge t$$

故 $\mathrm{A}_{s\wedge t}((1-\lambda)\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y})\geqslant\frac{n-1}{n}$,从而 $[((1-\lambda)\boldsymbol{x}_s+\lambda\boldsymbol{y}_t)\in\mathbf{A}]\geqslant[\boldsymbol{x}_s\in\mathbf{A}]\wedge[\boldsymbol{y}_t\in\mathbf{A}]$.

当 c 取其他值时类似可证.

关于 n 维凸模糊集的其他性质,如两个 n 维凸模糊集的交还是 n 维凸模糊集等类似的结论这里不再给出,不难将凸模糊集的有关性质推广到 n 维凸模糊集的情形.当然也可以类似文献[11]的研究给出各种 (α,β)-n 维凸模糊子集和 (s,t)-n 维凸模糊子集,这里从略.

3　n 维模糊数

定义 4　设 $\mathbf{A}(x)=(\mathrm{A}^1(x)\quad\mathrm{A}^2(x)\quad\cdots\quad\mathrm{A}^n(x))$, $\forall x\in\mathbf{R}$,即 $\mathbf{A}$ 为实数域 $\mathbf{R}$ 上 n 维模糊集.如果对任意的 $\lambda\in[0,1]$, A_λ 为模糊数,则称 $\mathbf{A}$ 为 n 维模糊数.其全体记作 $\mathscr{F}_0^n$.

定理 4　设 $\mathbf{A}$ 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的 n 维模糊集,则 $\mathbf{A}$ 为 n 维模糊数的充要条件为 $\mathrm{A}^i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为模糊数.

证明　设 $\mathbf{A}$ 为 n 维模糊数,则由定义知对任意的 $\lambda\in[0,1]$, A_λ 为模糊数,从而 A_λ 为凸集,故由定理1知, $\mathrm{A}^i(i=1,2,\cdots,n)$ 为凸模糊集.

再由 A_λ 为模糊数知 A_λ 为正规的,从而存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使得 $\mathrm{A}_1(x_0)=1$.由定义2,有 $\mathrm{A}^1(x_0)=1$.故 $\mathrm{A}^i(x_0)=1(i=1,2,\cdots,n)$,即 A^i 为正规的,因此 $\mathrm{A}^i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为模糊数.

反之,如果 $\mathrm{A}^i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为模糊数,则 A^1 为正规的,从而存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使得 $\mathrm{A}^1(x_0)=1$.再根据 $\mathrm{A}^1(x)\leqslant\mathrm{A}^2(x)\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{A}^n(x)$ 知, $\mathrm{A}^2(x_0)=\cdots=\mathrm{A}^n(x_0)=1$.故 $\mathrm{A}_1(x_0)=1$.这说明模糊集 A_λ 是正规的.又 $\mathrm{A}^i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为凸模糊集,再由定理1知, A_λ 为凸模糊集,因此 $\mathbf{A}$ 为 n 维模糊数.

根据模糊集的 Zadeh 扩展原理,可以得到模

糊数的运算，于是便可根据模糊数的运算规定 n 维模糊数的运算.

设 $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathscr{F}_0^n$，$\mathbf{A}(x)=(A^1(x)\quad A^2(x)\quad\cdots\quad A^n(x))$，$\mathbf{B}(x)=(B^1(x)\quad B^2(x)\quad\cdots\quad B^n(x))$，则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的运算“$*$”定义为

$$(\mathbf{A}*\mathbf{B})(x):=((A^1*B^1)(x)\quad(A^2*B^2)(x)\quad\cdots\quad(A^n*B^n)(x))$$

其中 $*\in\{+,\wedge,\vee\}$.

根据模糊数的运算法则，不难得到 n 维模糊数的运算法则.

定理 5 设 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in\mathscr{F}_0^n$，则

(1) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$；

(2) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$；

(3) $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}$；

(4) $\mathbf{A}\vee\mathbf{B}=\mathbf{B}\vee\mathbf{A}$，$\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}=\mathbf{B}\wedge\mathbf{A}$；

(5) $(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\vee\mathbf{C}=\mathbf{A}\vee(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})$，$(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})\wedge\mathbf{C}=\mathbf{A}\wedge(\mathbf{B}\wedge\mathbf{C})$；

(6) $\mathbf{A}\vee\mathbf{A}=\mathbf{A}$，$\mathbf{A}\wedge\mathbf{A}=\mathbf{A}$；

(7) $\mathbf{A}\vee(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})=\mathbf{A}$，$\mathbf{A}\wedge(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})=\mathbf{A}$；

(8) $\mathbf{A}\vee(\mathbf{B}\wedge\mathbf{C})=(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\wedge(\mathbf{A}\vee\mathbf{C})$，$\mathbf{A}\wedge(\mathbf{B}\vee\mathbf{C})=(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})\vee(\mathbf{A}\wedge\mathbf{C})$.

4 n 维模糊数的表示

如果 $\mathbf{A}$ 为 n 维模糊数，则由定理 4 知 $A^i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为模糊数，从而对任意的 $\lambda\in(0,1]$，$A^i_\lambda(i=1,2,\cdots,n)$ 均为区间，并将其称为 n 维模糊数 $\mathbf{A}$ 的截集表示. 由于 $A^1(x)\leqslant A^2(x)\leqslant\cdots\leqslant A^n(x)$，有 $A^1_\lambda\subseteq A^2_\lambda\subseteq\cdots\subseteq A^n_\lambda$. 这时将 $(A^1_\lambda,A^2_\lambda,\cdots,A^n_\lambda)$ 称为 n 维区间数. 如果 $A^i_\lambda(i=1,2,\cdots,n)$ 均为闭(开) 区间，则称之为闭(开) 区间数. 在以后的研究中，更关注 $A^i_\lambda(i=1,2,\cdots,n)$ 均为闭区间的情形，将这样的 n 维模糊数(或集) 称为闭的.

对于 $\lambda=0$ 的情形，做如下规定：

设 A^i 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个模糊集，现规定 $A^i_0=cl(\mathrm{supp}\ A^i)$，即 A^i_0 是 $\mathrm{supp}\ A^i=\{x\mid A^i(x)>0\}$ 的闭包，也就是包含 $\mathrm{supp}\ A^i$ 的最小闭集.

对于 n 维闭模糊数，有如下结果：

定理 6 设 $\mathbf{A}$ 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的 n 维模糊集，则 $\mathbf{A}$ 为 n 维闭模糊数当且仅当下列条件成立：

(1) $A^i(i=1,2,\cdots,n)$ 是上半连续的；

(2) A^1 是正规的；

(3) $\mathbf{A}$ 为 n 维凸模糊集；

(4) $A^n_0=cl(\mathrm{supp}\ A^n)$ 在 $\mathbf{R}$ 中有界.

根据如下事实不难证明定理 6.

(a) $u_\alpha=\{x\mid u(x)\geqslant\alpha\}$ 是闭集当且仅当 u 是上半连续函数；

(b) 如果 u 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个模糊集，则 u 为凸模糊集当且仅当 u_α 为区间($\forall\alpha\in[0,1]$).

这样，便将文献[13]关于模糊数的概念推广到 n 维模糊集理论. 下面利用文献[12] 中关于 n 维模糊集的表现定理和文献[14] 中关于模糊数的表现定理给出 n 维闭模糊数的表现定理.

定理 7 设 $\{[a^i(\alpha),b^i(\alpha)]\}(i=1,2,\cdots,n,0\leqslant\alpha\leqslant1)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一族非空有界闭区间，且满足：

(1) $[a^{i+1}(\alpha),b^{i+1}(\alpha)]\supset[a^i(\alpha),b^i(\alpha)](i=1,2,\cdots,n-1)$；

(2) 对 $0<\alpha_1<\alpha_2$，有 $[a^i(\alpha_2),b^i(\alpha_2)]\subseteq[a^i(\alpha_1),b^i(\alpha_1)](i=1,2,\cdots,n)$；

(3) 对任何非减列 $\{\alpha_k\}\subset[0,1]$，且 $\alpha_k\uparrow\alpha$，有

$$[a^i(\alpha),b^i(\alpha)]=[\lim_{k\to\infty}a^i(\alpha_k),\lim_{k\to\infty}b^i(\alpha_k)]$$

即 $[a^i(\alpha),b^i(\alpha)]=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[a^i(\alpha_k),b^i(\alpha_k)](i=1,2,\cdots,n)$，则 $A^i_\alpha=[a^i(\alpha),b^i(\alpha)](i=1,2,\cdots,n)$ 为某一 n 维模糊数 $\mathbf{A}$ 的截集表示.

反之，若 $[a^i(\alpha),b^i(\alpha)](i=1,2,\cdots,n)$ 为某一 n 维模糊数 $\mathbf{A}$ 的截集表示，则必须满足条件 (1) ～ (3).

5 结　语

本文在文献[12] 给出的 n 维模糊集的基础上，首先给出了 n 维凸模糊集的概念，并研究了其等价条件；然后给出了 n 维模糊数的概念，得到了 n 维模糊数的运算性质；最后，针对 n 维闭模糊数给出了其表现定理，从而将文献[13、14] 中关于模糊数的有关定理推广到 n 维模糊数的情形，将为以后的 n 维模糊数值函数的微积分学打下基础.

参考文献：

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets [J]. **Information and**

Control，1965，**8**(3)：338-353

[2] LOWEN R. Convex fuzzy sets [J]. **Fuzzy Sets and Systems**，1980，**3**(3)：291-310

[3] YANG Xin-min. Some properties of convex fuzzy sets [J]. **Fuzzy Sets and Systems**，1995，**72**(1)：129-132

[4] WANG Gui-jun，JIANG Tao. A weakly equivalent condition of convex fuzzy sets [J]. **Fuzzy Sets and Systems**，1998，**96**(3)：385-387

[5] YANG Xin-min，YANG Feng-mei. A property on convex fuzzy sets [J]. **Fuzzy Sets and Systems**，2002，**126**(2)：269-271

[6] ZHOU Fei-yue. The relative interiors of convex fuzzy sets under induced fuzzy topology [J]. **Fuzzy Sets and Systems**，1991，**44**(1)：109-125

[7] AMMAR E E. Some properties of convex fuzzy sets and convex fuzzy cones [J]. **Fuzzy Sets and Systems**，1999，**106**(3)：381-386

[8] YUAN Xue-hai，LEE E S. The definition of convex fuzzy subset [J]. **Computers and Mathematics with Applications**，2004，**47**(1)：101-113

[9] SYAU Y. Closed and convex fuzzy sets [J]. **Fuzzy Sets and Systems**，2000，**110**(2)：287-291

[10] SINISA N J. Convex structure，normal structure and a fixed point theorem in intuitionistic fuzzy metric spaces [J]. **Chaos，Solitons and Fractals**，2009，**41**(1)：292-301

[11] 李小申. 三维模糊集 [D]. 大连：大连理工大学，2009

[12] SHANG You-guang，YUAN Xue-hai，LEE E S. The *n*-dimensional fuzzy sets and Zadeh fuzzy sets based on the finite valued fuzzy sets [J]. **Computers and Mathematics with Applications**，2010，**60**(3)：442-463

[13] GOETSCHEL R JR，VOXMAN W. Topological properties of fuzzy numbers [J]. **Fuzzy Sets and Systems**，1983，**10**(1)：87-99

[14] KALEVA O，SEIKKALA S. On fuzzy metric spaces [J]. **Fuzzy Sets and Systems**，1984，**12**(3)：215-229

n-Dimensional convex fuzzy sets and *n*-dimensional fuzzy numbers

SHANG You-guang*[1,2]，ZHANG Cheng[3]，XIA Zun-quan[1]

(1. School of Mathematical Sciences，Dalian University of Technology，Dalian 116024，China；
2. School of Finance，Central University of Finance and Economics，Beijing 100081，China；
3. College of Information Engineering，Dalian University，Dalian 116622，China)

Abstract：Based on theory of *n*-dimensional fuzzy set，the definition of the *n*-dimensional convex fuzzy set is given. The properties of *n*-dimensional convex fuzzy sets are discussed by means of the properties of convex fuzzy sets. According to the above discussion and properties of fuzzy numbers，the notion of *n*-dimensional (closed) fuzzy numbers is introduced，and the corresponding operation properties and the representation theorem of *n*-dimensional (closed) fuzzy numbers are obtained. Furthermore，the above results are applied to establishing the foundation of the convex analysis of *n*-dimensional fuzzy set.

Key words：*n*-dimensional fuzzy sets；*n*-dimensional convex fuzzy sets；*n*-dimensional fuzzy numbers