第52卷第2期
2012年3月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol.52, No.2
Mar. 2012

文章编号：1000-8608(2012)02-0309-04

在无界凸区域上多个布朗运动之和首冲时

车文彬， 宋立新*， 冯敬海， 鲁大伟

（大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024）

摘要：考虑在无界区域中 Bessel 函数下多个布朗运动和的首冲时问题.介绍了利用高斯计算技巧和 Slepian 不等式得到的单个布朗运动在无界开区域 $\mathbf{R}^{d+1}$ 中首冲时的上、下界的渐近估计，然后考虑了多个布朗运动的和在 Bessel 函数下首冲时的上、下界渐近估计.首先考虑在移动边界下的首冲时问题，之后再推广到无界区域中多个布朗运动的和.说明单个的布朗运动首冲时问题，可以推广到多个布朗运动之和的首冲时问题.

关键词：Bessel 函数；首冲时；Slepian 不等式；布朗运动；渐近估计

中图分类号：O211　　**文献标志码**：A

0 引 言

布朗运动在各种区域上出逃概率的研究是基于大偏差理论与小球概率理论的.大偏差理论在研究高斯过程的概率上极限问题中起到了关键的作用，例如 Strassen 型迭代算法的收敛率等研究.在过去的几十年里，大偏差理论已经得到了巨大的发展.然而对于小球概率估计的计算方法还比较繁琐，研究也有待进一步的完善.到现在只有少量的高斯测度，它们的小球概率可以被完全地确定，但还有很多没有被准确地估计出来.小球概率理论是研究高斯过程概率下极限的关键步骤.它的研究不仅与各种紧集及算子有着紧密的联系，而且在 Strassen 型迭代率及经验过程、Hausdorff 维数的研究中也得到了很多应用[1~3].本文研究多个 d 维布朗运动在无界区域和移动边界下出逃概率的上、下界估计.

1 首冲时出逃概率

令 $\mathbf{B}(t)=(B_1(t)\quad\cdots\quad B_d(t))\in\mathbf{R}^d$，$t\geqslant 0$，为一个标准的 d 维布朗运动，其中 $B_i(t)(1\leqslant i\leqslant d)$ 是起始于原点的相互独立的布朗运动.

考虑这样一个 d 维布朗运动首冲时 $\tau_{\mathbf{D}}$ 的问题[4]，它从无界区域

$$\mathbf{D}=\{(\boldsymbol{x}\quad y)\in\mathbf{R}^{d+1}:y>f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^d\}$$

中出逃且起始点为 $(\boldsymbol{x}_0,f(\boldsymbol{x}_0)+1)\in\mathbf{R}^{d+1}$，其中 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^d$，$f(\boldsymbol{x})$ 是一个定义在 $\mathbf{R}^d$ 上的凸函数，随着欧几里得范数 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$，$f(\boldsymbol{x})\to\infty$.则首冲时或者停时定义为

$$\tau_{\mathbf{D}}=\inf\{t:(\boldsymbol{x}_0+\mathbf{B}(t)\quad f(\boldsymbol{x}_0)+1+W(t))\notin\mathbf{D}\}$$

它在 Dirichlet 问题的概率解求解中起到了关键作用.在本文中 $W(t)$ 是一个与 $\{\mathbf{B}(t)\in\mathbf{R}^d,t\geqslant 0\}$ 相互独立的一维标准布朗运动，且起始于原点.

Li[4] 考虑了在函数 $f(\boldsymbol{x})$ 上的进一步限制.假设凸函数 $f(\boldsymbol{x})$ 关于 $\mathbf{R}^d$ 上的全体正交变换集合是对称的.Rockafellar[3] 给出了 $f(\boldsymbol{x})=h(\|\boldsymbol{x}\|)$，其中 $h(\|\boldsymbol{x}\|)$ 是 $[0,\infty)$ 上的非降下半连续凸函数且 $h(0)$ 有限.很容易得知只要起始点在 $\mathbf{D}$ 的内部，$P(\tau_{\mathbf{D}}>t)$ 的渐近率不依赖于起始点.不失一般性，假设 $\boldsymbol{x}_0=\mathbf{0}$ 而且在 $h(\|\boldsymbol{x}\|)$ 上的条件仅对 $\|\boldsymbol{x}\|\geqslant K>0$ 成立.在以上条件下，Li 得到了出逃概率

$$P(\tau_{\mathbf{D}}>t)=P(h(\|\mathbf{B}(s)\|)\leqslant h(0)+1+W(s));\quad 0\leqslant s\leqslant t,\ t\to\infty \tag{1}$$

的上、下界渐近估计.

回到首冲时问题，考虑多个相互独立的 d 维布

收稿日期：2010-06-04；　**修回日期**：2011-11-10.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(61175041,11101061)；大连理工大学前沿交叉学科基金资助项目(DUT10JS06)；高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20100411110036).
作者简介：车文彬(1983-)，男，博士生；宋立新*(1966-)，男，教授，博士生导师，E-mail：lxsong@dlut.edu.cn.

朗运动的和在无界区域中的出逃概率. 令 $\boldsymbol{B}^j(t)=(B_1^j(t)\ \cdots\ B_d^j(t))\in\mathbf{R}^d(t\geqslant 0,1\leqslant j\leqslant m)$,为 m 个标准的 d 维布朗运动,且 $\boldsymbol{B}^j(t)(1\leqslant j\leqslant m)$ 是相互独立的,$f(\boldsymbol{x})=h(\|\boldsymbol{x}\|)$. 则它们的和在无界区域中的出逃概率可写为

$$P\Big(\sum_{j=1}^{m}\|\boldsymbol{B}^j(s)\|\leqslant h^{-1}(h(0)+1+W(s))\Big);\quad 0\leqslant s\leqslant t \tag{2}$$

其中 $W(s)$ 是标准的一维布朗运动,且与 $\{\boldsymbol{B}^j(s)\in\mathbf{R}^d,s\geqslant 0,j=1,2,\cdots,m\}$ 相互独立.

2 移动边界下的出逃概率

首先给出单个 d 维布朗运动的结论,见文献[4]. 考虑两个相互独立的布朗运动和的出逃概率的上、下界渐近估计. 再由得到的结论,推广到多个相互独立的布朗运动和的出逃概率. Li 在文献[4]中得到了如下上界.

引理 1 对于任意正整数 n 和 $[0,t]$ 上有限剖分 $\{t_i,0\leqslant i\leqslant n\}$,使得 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$,那么可以得到

$$P(\|\boldsymbol{B}(s)\|\leqslant g(s))\leqslant K^n\exp\left\{-\frac{j_v^2}{2}\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\big(\sup_{t_{i-1}\leqslant s\leqslant t_i}g(s)\big)^{-2}\right\};\quad v=\frac{d-2}{2},\ 0\leqslant s\leqslant t \tag{3}$$

特别地,对于非降函数 g 和一致剖分 $t_i=it/n$ $(0\leqslant i\leqslant n)$,有

$$P(\|\boldsymbol{B}(s)\|\leqslant g(s))\leqslant K^n\exp\left\{-\frac{j_v^2}{2}\in\int_{t/n}^{t}g^{-2}(s)\mathrm{d}s\right\};\quad 0\leqslant s\leqslant t \tag{4}$$

其中 K 为一个充分大的常数.

利用 Novikov[5] 的证明,Li 也在同一篇文章中得到了一个下界.

引理 2 令 $g(t)$ 是一个严格正的连续函数且使得 $g''(t)\leqslant 0$ 是连续的,以及 $g'(t)\geqslant 0$. 那么

$$P(\|\boldsymbol{B}(s)\|\leqslant g(s))\geqslant K^{-1}\exp\left\{-\frac{d}{2}\log\frac{g(t)}{g(0)}-\frac{1}{2}\int_0^t(g'(s))^2\mathrm{d}s-\frac{j_v^2}{2}\int_0^t g^{-2}(s)\mathrm{d}s\right\};\quad 0\leqslant s\leqslant t \tag{5}$$

特别地,再附加条件 $t\to\infty$. 那么对于 $\delta>0$ 以及充分大的 t,

$$\log P(\|\boldsymbol{B}(s)\|\leqslant g(s))\geqslant-(1+\delta)\frac{j_v^2}{2}\int_0^t g^{-2}(s)\mathrm{d}s;\quad 0\leqslant s\leqslant t \tag{6}$$

基于如上两个引理,令 $\boldsymbol{B}^1(t)$、$\boldsymbol{B}^2(t)$ 为两个相互独立的 d 维布朗运动,此时考虑移动边界的出逃概率

$$P(\|\boldsymbol{B}^1(s)\|+\|\boldsymbol{B}^2(s)\|\leqslant g(s));\ 0\leqslant s\leqslant t$$

的上、下界问题.

首先看上界,考虑事件

$$\{\|\boldsymbol{B}^1(s)\|+\|\boldsymbol{B}^2(s)\|\leqslant g(s)\}\subset\{\|\boldsymbol{B}^1(s)\|\leqslant g(s)\}\cup\{\|\boldsymbol{B}^2(s)\|\leqslant g(s)\};\quad 0\leqslant s\leqslant t$$

因 $\boldsymbol{B}^1(s)$、$\boldsymbol{B}^2(s)$ 相互独立,则有

$$P(\|\boldsymbol{B}^1(s)\|+\|\boldsymbol{B}^2(s)\|\leqslant g(s))\leqslant P(\|\boldsymbol{B}^1(s)\|\leqslant g(s),\|\boldsymbol{B}^2(s)\|\leqslant g(s))=P(\|\boldsymbol{B}^1(s)\|\leqslant g(s))P(\|\boldsymbol{B}^2(s)\|\leqslant g(s))=\prod_{i=1}^{2}P(\|\boldsymbol{B}^i(s)\|\leqslant g(s));\quad 0\leqslant s\leqslant t \tag{7}$$

再由引理 1 的结论,得到下面定理.

定理 1

$$P(\|\boldsymbol{B}^1(s)\|+\|\boldsymbol{B}^2(s)\|\leqslant g(s))\leqslant(k_1k_2)^n\exp\left\{-j_v^2\sum_{i=1}^{n}\Big[(t_i-t_{i-1})\times\big(\sup_{t_{i-1}\leqslant s\leqslant t_i}g(s)\big)^{-2}\Big]\right\};\quad 0\leqslant s\leqslant t \tag{8}$$

若 $g(s)$ 是非降函数,对一致剖分 $\{t_i,0\leqslant i\leqslant n\}$

$$P(\|\boldsymbol{B}^1(s)\|+\|\boldsymbol{B}^2(s)\|\leqslant g(s))\leqslant(k_1k_2)^n\exp\left\{-j_v^2\int_{t/n}^{t}g^{-2}(s)\mathrm{d}s\right\};\quad 0\leqslant s\leqslant t \tag{9}$$

利用上面的方法同样可以得到移动边界首冲时的下界估计.

定理 2 令 $g(t)$ 是一个严格正的连续函数且使得 $g''(t)\leqslant 0$ 是连续的,以及 $g'(t)\geqslant 0$. 那么

$$P(\|\boldsymbol{B}^1(s)\|+\|\boldsymbol{B}^2(s)\|\leqslant g(s))\geqslant K^{-1}\exp\left\{-d\log\frac{g(t)}{g(0)}-(c_1^2+c_2^2)\times\frac{1}{2}\int_0^t(g'(s))^2\mathrm{d}s-\Big(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}\Big)\frac{j_v^2}{2}\int_0^t g^{-2}(s)\mathrm{d}s\right\};\quad 0\leqslant s\leqslant t \tag{10}$$

这里系数 $0\leqslant c_i\leqslant 1(i=1,2)$ 且满足 $c_1+c_2=1$.

特别地,再附加条件 $t\to\infty$. 那么对于 $\delta>0$

以及充分大的 t，

$$\log P(\|\boldsymbol{B}^1(s)\|+\|\boldsymbol{B}^2(s)\|\leqslant g(s))\geqslant -(1+\delta)\left(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}\right)\frac{j_v^2}{2}\int_0^t g^{-2}(s)\mathrm{d}s;\quad 0\leqslant s\leqslant t \tag{11}$$

且当 $c_1=c_2=1/2$ 时下界取最大值.

证明　考虑事件

$$\{\|\boldsymbol{B}_1(s)\|\leqslant c_1 g(s)\}\cap\{\|\boldsymbol{B}_2(s)\|\leqslant c_2 g(s)\}\subset \{\|\boldsymbol{B}^1(s)\|+\|\boldsymbol{B}^2(s)\|\leqslant g(s)\};\ 0\leqslant s\leqslant t$$

再由独立性，有

$$P(\|\boldsymbol{B}^1(s)\|+\|\boldsymbol{B}^2(s)\|\leqslant g(s))\geqslant P(\|\boldsymbol{B}^1(s)\|\leqslant c_1 g(s),\|\boldsymbol{B}^2(s)\|\leqslant c_2 g(s))= P(\|\boldsymbol{B}^1(s)\|\leqslant c_1 g(s))P(\|\boldsymbol{B}^2(s)\|\leqslant c_2 g(s))= \prod_{i=1}^{2}P(\|\boldsymbol{B}^i(s)\|\leqslant c_i g(s));\ 0\leqslant s\leqslant t \tag{12}$$

再由引理 2 的结论，把式(5) 代入式(10) 即可得到.

再看式(10) 右边部分

$$K^{-1}\exp\left\{-d\log\frac{g(t)}{g(0)}-(c_1^2+c_2^2)\times\frac{1}{2}\int_0^t(g'(s))^2\mathrm{d}s-\left(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}\right)\times\frac{j_v^2}{2}\int_0^t g^{-2}(s)\mathrm{d}s\right\}$$

设

$$x=c_1,\ y=c_2,\ a=\frac{1}{2}\int_0^t(g'(s))^2\mathrm{d}s,\quad b=\frac{j_v^2}{2}\int_0^t g^{-2}(s)\mathrm{d}s$$

则 $(c_1^2+c_2^2)\times\frac{1}{2}\int_0^t(g'(s))^2\mathrm{d}s+\left(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}\right)\times\frac{j_v^2}{2}\int_0^t g^{-2}(s)\mathrm{d}s$ 可化为 $f(x,y)=a(x^2+y^2)+b(x^{-2}+y^{-2})$，且 $x+y=1$，当 $f(x,y)$ 取最小值时，下界得最大值. 由 Lagrange 乘数法，考虑

$$H(x,y,\lambda)=\lambda(x+y-1)+a(x^2+y^2)+b(x^{-2}+y^{-2})$$

有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial x}=\lambda+2ax-\dfrac{2b}{x^3}=0\\ \dfrac{\partial H}{\partial y}=\lambda+2ay-\dfrac{2b}{y^3}=0\\ \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}=x+y-1=0\end{cases} \tag{13}$$

可知 $x=y=\frac{1}{2}$ 为方程式组的一个解，且满足 $0\leqslant x,y\leqslant 1$. 即当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时 $f(x,y)$ 取最小值，不等式(10) 右边部分取最大值.

以上两个定理可以推广到 m 个相互独立的 d 维布朗运动 $\boldsymbol{B}^1(s),\boldsymbol{B}^2(s),\cdots,\boldsymbol{B}^m(s)$ 的首冲时

$$P\left(\sum_{i=1}^{m}\|\boldsymbol{B}^i(s)\|\leqslant g(s)\right);\ 0\leqslant s\leqslant t$$

的上、下界估计. 利用以上定理的结论，用递推法即可得到.

3　无界区域下的出逃概率

现在考虑多个相互独立的 d 维布朗运动的和的首冲时问题，它的出逃概率为

$$P(\tau_{\boldsymbol{D}_1}>t)=P(h(\|\boldsymbol{B}^1(s)\|+\|\boldsymbol{B}^2(s)\|+\cdots+\|\boldsymbol{B}^n(s)\|)\leqslant h(0)+1+W(s));\quad 0\leqslant s\leqslant t,\ t\to\infty$$

首先介绍一下文献[4] 中给出的单个 d 维布朗运动在无界区域 $\boldsymbol{D}$ 中的出逃概率的上、下界估计. 先给出上界估计. 设

$$H(x)=\int_k^x[h^{-1}(\sqrt{s}+h(0)+1)]^{-2}\mathrm{d}s$$

假定对任意的 $0<\delta<1$ 和 $0<q=q(\delta)<1$，存在一个 $u_0=u_0(\delta,q)$，使得对所有的 $x\geqslant u_0$，有

$$H(x)\geqslant\delta^{-1}H(x^q) \tag{14}$$

引理 3　若条件式(14) 成立，且满足对任意的 $0<\delta<1$，存在一个足够小的 $\delta_0>0$，有

$$\inf_{x\geqslant u_0}\left\{\frac{j_v^2}{2}\frac{tH(x)}{x}+\frac{x}{2t}\right\}\geqslant t^{\delta_0} \tag{15}$$

对足够大的 t，则有

$$\log P(\tau_{\boldsymbol{D}}>t)\leqslant-(1-\delta)\inf_{x\geqslant u_0}\left\{\frac{j_v^2}{2}\frac{tH(x)}{x}+\frac{x}{2t}\right\} \tag{16}$$

下面给出下界的估计，定义一列函数族 $\mathscr{G}$，对足够大的 t，有

$$\mathscr{G}=\{g\in C^2[0,\infty):g(0)<h(0)+1,\ g'\geqslant 0,g''\leqslant 0,\lim_{t\to\infty}\sqrt{t}g'(t)=\infty\}$$

引理 4　当 $x\geqslant K$ 时，设 $h'>0$ 且 $h''\geqslant 0$，则对任意固定的 $\delta>0$ 和充分大的 $t>0$，有

$$\log P(\tau_{\boldsymbol{D}}>t)\geqslant-(1+\delta)\inf_{g\in\mathscr{G}}\left\{\frac{j_v^2}{2}\times\int_K^t\frac{1}{[h^{-1}(g(s))]^2}\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_K^t(g'(s))^2\mathrm{d}s\right\} \tag{17}$$

在这里 K 为常数且 $K>1$.

由引理3和定理2可以得到由Bessel函数给出的在无界区域中多个布朗运动之和的首冲时上界估计，

$$\log P(\tau_{D_1} > t) \leqslant -(1-\delta)\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\geqslant u_0}\left\{\frac{j_v^2}{2}\times \frac{tH(x)}{x}+\frac{x}{2t}\right\} \tag{18}$$

此结论的证明与引理3相似，详细证明可参照文献[4].

根据引理2和定理2，同样可以得到相应的下界估计，

$$\log P(\tau_{D_1} > t) \geqslant -(1+\delta)\sum_{i=1}^{n}\inf_{g\in\mathcal{G}}\left\{\frac{j_v^2}{2}\times \int_K^t \frac{C_i}{(h^{-1}(g(s)))^2}ds + \frac{C_i}{2}\int_K^t (g'(s))^2 ds\right\} \tag{19}$$

其中$\sum_{i=1}^{n} C_i = 1, 0 < C_i < 1$.此结论的证明与引理4相似，详细证明可参照文献[4].

4 结 语

本文利用前人已有的方法并结合创新方法首先给出了多个布朗运动之和移动边界下出逃概率的渐近估计.然后再利用所得到的结论将出逃概率的渐近估计推广到了无界凸区域内.为了简单起见，先是讨论了只有两个相互独立的d维布朗运动在移动边界下出逃概率的估计，之后用递推的方法讨论了m个相互独立布朗运动之和的出逃概率问题，说明了单个布朗运动首冲时问题可以推广到多个布朗运动之和的首冲时问题.

参考文献：

[1] DEMBO A, ZEITOUNI O. **Large Deviation Techniques and Applications** [M]. New York: Springer-Verlag, 1998

[2] HOLLANDER F D. **Large Deviation** [M]. Providence: American Mathematical Society, 2000

[3] ROCKAFELLAR R T. **Convex Analysis** [M]. Princeton: Princeton University Press, 1970

[4] LI W V. The first exit time of a Brownian motion from an unbounded convex domain [J]. **Insurance: The Annals of Probability**, 2003, **31**(2): 1078-1096

[5] NOVIKOV A A. On estimates and asymptotic behavior for non-exit probabilities of a Wiener process to a moving boundary [J]. **Mathematics of the USSR-Sbornik**, 1981, **38**(4): 495-505

The first exit time of sum of Brownian motions from unbounded convex domain

CHE Wen-bin, SONG Li-xin*, FENG Jing-hai, LU Da-wei

(School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The first exit time of the sum of several Brownian motions in the case of Bessel function from an unbounded domain is considered. Firstly, general upper and lower asymptotic estimates for the first exit time of one Brownian motion from an unbounded open domain $\mathbf{R}^{d+1}$ are obtained, which are based on a powerful Gaussian technique and Slepian′s inequality. Then, the general upper and lower asymptotic estimates are considered to the first exit time of the sum of several Brownian motions in the case of Bessel function. At first, the first exit time probability with moving boundary is considered, then, it′s extended to the sum of the number of Brownian motions in the unbounded domain. It means that the first exit time of one Brownian motion is suitable for the first exit time of the sum of several Brownian motions.

Key words: Bessel function; the first exit time; Slepian′s inequality; Brownian motion; asymptotic estimates