

基于偏态分布的风险度量计算

王泓娜^{1,2}, 宋立新^{*1}

(1. 大连理工大学 数学科学学院, 辽宁 大连 116024;

2. 辽宁师范大学 数学学院, 辽宁 大连 116029)

摘要: 金融时间序列具有尖峰厚尾性, 同时在股市中又存在着杠杆效应. 对股票指数收盘价格的 t 分布、GED与Skewed-GED分别进行对比性实证分析, 结果表明, 在两个偏态分布假设下计算得到的期望损失估计结果更为保守, 更能够捕捉到股市的尾部风险.

关键词: APARCH; Skewed- t 分布; Skewed-GED; 在险价值; 期望损失
中图分类号: O213; F830.9 **文献标志码:** A

0 引言

在险价值 VaR (value-at-risk) 被用来在选定的置信水平下, 度量某个资产组合在未来一个给定的期限内可能发生的最大损失. 但 VaR 不满足次可加性, 从而不具有风险度量的一致性. 于是 Acerbi 等^[1] 提出满足次可加性的一致风险度量——期望损失 ES (expected shortfall) 的定义, 但并没有给出具体计算方法. 陈学华等^[2] 给出了正态分布下 ES 的具体算法, 谈及了 GED (广义误差分布) 下 ES 的计算; 欧诗德等^[3] 进一步给出了如何在正态分布、 t 分布、GED 下计算 ES. 但是许多研究者通过实证分析证明, 金融资产收益率的分布一般具有非对称性, 从而本文引入了 Skewed- t (简记为 St) 和 Skewed-GED (简记为 SGED) 这两种有偏分布, 用以描述这种非对称性. 为了更准确地刻画金融资产收益率的尖峰厚尾与波动聚集性特征, Engle^[4] 和 Bollerslev^[5] 分别提出了 ARCH 模型和 GARCH 模型. Ding 等^[6] 对上述两类模型进行了推广, 提出了 APARCH 模型.

本文对收益率序列建立 ARMA-APARCH 模型, 在 Skewed- t 分布和 Skewed-GED 假设下给出 VaR 和 ES 的计算方法, 并分别与 t 分布和 GED 下的 ES 作对比.

1 Skewed- t 分布和 Skewed-GED

Hansen^[7] 和 Giot 等^[8] 为了描述资产收益率的不对称性, 在对称 t 分布中加入偏度参数, 引入了 St 分布, 其概率密度函数为

$$f(z_t; m, s^2, \nu, \xi) = \begin{cases} \frac{2}{\xi + 1/\xi} \text{sg}[\xi(s z_t + m) | \nu]; & z_t < -m/s \\ \frac{2}{\xi + 1/\xi} \text{sg}[(s z_t + m)/\xi | \nu]; & z_t \geq -m/s \end{cases}$$

式中: z_t 为收益率序列, m 和 s^2 分别为 z_t 的均值和标准差, $g(\cdot | \nu)$ 是自由度为 ν 的对称 t 分布, ξ 是偏度参数. 当 $m = 0$ 且 $s^2 = 1$ 时即为标准 St 分布, 简记为 $St(0, 1, \nu, \xi)$.

Bali^[9] 在 GED 中加入偏度参数, 得到了 SGED, 其概率密度函数如下:

收稿日期: 2010-10-10; 修回日期: 2012-03-12

作者简介: 王泓娜(1979-), 女, 博士生, 讲师; 宋立新^{*}(1966-), 男, 教授, 博士生导师, E-mail: lxsong@dlut.edu.cn.

$$f(z_i; \mu, \sigma, \nu, \lambda) = \frac{C}{\sigma} \exp \{ -|z_i - \mu + \delta\sigma|^\nu / [1 + \operatorname{sgn}(z_i - \mu + \delta\sigma)\lambda]^\nu \theta^\nu \sigma^\nu \} \quad (1)$$

式中: $C = \frac{\nu}{2\theta} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)^{-1}$; $\theta = \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}} \times s(\lambda)^{-1}$; $\delta = 2\lambda A s(\lambda)^{-1}$, $s(\lambda) = \sqrt{1 + 3\lambda^2 - 4A^2\lambda^2}$, $A = \Gamma\left(\frac{2}{\nu}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}}$. 其中 μ 和 σ 分别为 z_i 的均值和标准差, ν 为形状参数, $-1 < \lambda < 1$ 为偏度参数. 当 $\mu = 0$ 且 $\sigma = 1$ 时为标准 SGED, 简记为 $SGED(0, 1, \nu, \lambda)$, 当 $\nu = 2$ 且 $\lambda = 0$ 时为标准正态分布 $N(0, 1)$.

2 风险度量工具 VaR 与 ES

Jorion^[10]将 VaR 定义为在给定的置信水平下, 金融资产在未来一个持有期内的最坏预期损失值. 由定义, 对于置信水平为 α 的 VaR, 有

$$\alpha = P(-r_t \geq \text{VaR}) = P(r_t \leq -\text{VaR})$$

其中 r_t 为资产收益率序列.

ES 是指在损失超出 VaR 时的条件期望, 它满足次可加性, 为一致风险度量, 在 X 为连续随机变量的情形下, ES 有如下定义^[3]:

$$ES(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} E[XI(X \leq q(\alpha))]$$

其中 $q(\alpha)$ 为 X 在置信水平 α 时的下侧分位数.

考虑到金融收益率序列具有尖峰厚尾特性和杠杆效应, 本文采用 Ding 等^[6]提出的 APARCH 模型:

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t z_t \\ \sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|\epsilon_{t-i}| - \gamma_i \epsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^\delta \end{cases}$$

式中: $z_t \sim N(0, 1)$, $\omega, \alpha_i, \gamma_i (i = 1, 2, \dots, q), \beta_j (j = 1, 2, \dots, p)$ 和 δ 都是待估参数, 其中 $-1 < \gamma_i < 1$ 为杠杆参数.

令 F_t 为 t 时刻的历史信息, r_t 的条件均值与条件方差的 1 步向前预测为

$$\hat{\mu}_t(1) = \hat{c} + \sum_{i=1}^s \hat{\phi}_i r_{t+1-i} + \sum_{j=1}^n \hat{\theta}_j \epsilon_{t+1-j}$$

$$\hat{\sigma}_t^\delta(1) = \hat{\omega} + \sum_{i=1}^q \hat{\alpha}_i (|\epsilon_{t+1-i}| - \hat{\gamma}_i \epsilon_{t+1-i})^\delta + \sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j \hat{\sigma}_{t+1-j}^\delta$$

金融资产收益率序列服从正态分布、 t 分布、GED 等对称分布情况下的 ES 的计算已经在文献 [3] 中给出, 下面将讨论 $z_t \sim St(0, 1, \nu, \xi)$ 和 $z_t \sim SGED(0, 1, \nu, \lambda)$ 时 ES 的计算.

命题 1 若 $z_t \sim St(0, 1, \nu, \xi)$, 则在置信水平为 α 下的 ES 为

$$ES(\alpha) = \frac{2\nu \hat{\sigma}_t(1) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\alpha(1-\nu)(\xi^3 + \xi) \sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \times \left[1 + \frac{\xi^2 St_a^2(0, 1, \nu, \xi)}{\nu}\right]^{\frac{1-\nu}{2}} - \hat{\mu}_t(1)$$

证明 $E(r_t | F_t) = \hat{\mu}_t(1)$, $\text{VaR}(r_t | F_t) = \hat{\sigma}_t^2(1)$, $\frac{r_{t+1} - \hat{\mu}_t(1)}{\hat{\sigma}_t(1)} \Big| F_t = z_{t+1} \sim St(0, 1, \nu, \xi)$, $\alpha = P(r_{t+1} \leq -\text{VaR}) = P([r_{t+1} - \hat{\mu}_t(1)] / \hat{\sigma}_t(1) \leq [-\text{VaR} - \hat{\mu}_t(1)] / \hat{\sigma}_t(1))$, $\frac{-\text{VaR} - \hat{\mu}_t(1)}{\hat{\sigma}_t(1)} = St_a(0, 1, \nu, \xi)$, 故 $\text{VaR} = -(St_a(0, 1, \nu, \xi) \hat{\sigma}_t(1) + \hat{\mu}_t(1))$, 其中 $St_a(0, 1, \nu, \xi)$ 为 $St(0, 1, \nu, \xi)$ 在置信水平为 α 时的下侧分位数.

由定义 $ES(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} E[r_{t+1} I(r_{t+1} \leq -\text{VaR})] = -\frac{1}{\alpha} E[r_{t+1} I((r_{t+1} - \hat{\mu}_t(1)) / \hat{\sigma}_t(1) \leq (-\text{VaR} - \hat{\mu}_t(1)) / \hat{\sigma}_t(1))]$, 令 $T = \frac{r_{t+1} - \hat{\mu}_t(1)}{\hat{\sigma}_t(1)} \sim St(0, 1, \nu, \xi)$, 于是

$$\begin{aligned} ES(\alpha) &= -\frac{1}{\alpha} E[(T \hat{\sigma}_t(1) + \hat{\mu}_t(1)) I(T \leq St_a(0, 1, \nu, \xi))] = \\ &= -\frac{\hat{\sigma}_t(1)}{\alpha} E[T I(T \leq St_a(0, 1, \nu, \xi))] - \frac{\hat{\mu}_t(1)}{\alpha} E[I(T \leq St_a(0, 1, \nu, \xi))] = \\ &= -\frac{\hat{\sigma}_t(1)}{\alpha} \int_{-\infty}^{St_a(0, 1, \nu, \xi)} \left[t \cdot \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \times \left(1 + \frac{\xi^2 t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \right] dt - \hat{\mu}_t(1) = \\ &= -\frac{\hat{\sigma}_t(1)}{\alpha} \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_{-\infty}^{St_a(0, 1, \nu, \xi)} \left[t \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\left[1 + \frac{\xi^2 t^2}{\nu}\right]^{-\frac{\nu+1}{2}} dt - \hat{\mu}_t(1) =$$

$$\frac{2\nu \hat{\sigma}_t(1) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\alpha(1-\nu)(\xi^3 + \xi) \sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \times$$

$$\left[1 + \frac{\xi^2 S_t^2(0, 1, \nu, \xi)}{\nu}\right]^{\frac{\nu-1}{2}} - \hat{\mu}_t(1)$$

命题 2 若 $z_t \sim \text{SGED}(0, 1, \nu, \lambda)$, 则在置信水平为 α 下的 ES 为

$$\text{ES}(\alpha) = -\frac{\hat{\sigma}_t(1)}{\alpha} \int_{-\infty}^{\text{SGED}_\alpha(0, 1, \nu, \lambda)} \left\{ tC \times \right.$$

$$\exp\left[-\frac{|t + \delta|^\nu}{(1 + \text{sgn}(t + \delta)\lambda)^\nu \theta^\nu}\right] \Big\} dt -$$

$$\hat{\mu}_t(1)$$

证明 与命题 1 同理, $\text{VaR} = -(\text{SGED}_\alpha(0, 1, \nu, \lambda) \hat{\sigma}_t(1) + \hat{\mu}_t(1))$, $\text{SGED}_\alpha(0, 1, \nu, \lambda)$ 为 $\text{SGED}(0, 1, \nu, \lambda)$ 在置信水平为 α 时的下侧分位数.

$$\text{ES}(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} E[r_{t+1} I(r_{t+1} \leq -\text{VaR})] =$$

$$-\frac{1}{\alpha} E\left[r_{t+1} I\left(\frac{r_{t+1} - \hat{\mu}_t(1)}{\hat{\sigma}_t(1)} \leq \right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{-\text{VaR} - \hat{\mu}_t(1)}{\hat{\sigma}_t(1)}\right)\right]$$

$$\text{令 } T = \frac{r_{t+1} - \hat{\mu}_t(1)}{\hat{\sigma}_t(1)} \sim \text{SGED}(0, 1, \nu, \lambda),$$

于是

$$\text{ES}(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} E[r_{t+1} I(r_{t+1} \leq -\text{VaR})] =$$

$$-\frac{1}{\alpha} E[(T \hat{\sigma}_t(1) + \hat{\mu}_t(1)) \times$$

$$I(T \leq \text{SGED}_\alpha(0, 1, \nu, \lambda))] =$$

$$-\frac{\hat{\sigma}_t(1)}{\alpha} E[T I(T \leq \text{SGED}_\alpha(0, 1, \nu, \lambda))] -$$

$$\frac{\hat{\mu}_t(1)}{\alpha} E[I(T \leq \text{SGED}_\alpha(0, 1, \nu, \lambda))] =$$

$$-\frac{\hat{\sigma}_t(1)}{\alpha} \int_{-\infty}^{\text{SGED}_\alpha(0, 1, \nu, \lambda)} \left\{ tC \times \right.$$

$$\exp\left[-\frac{|t + \delta|^\nu}{(1 + \text{sgn}(t + \delta)\lambda)^\nu \theta^\nu}\right] \Big\} dt -$$

$$\hat{\mu}_t(1)$$

这里 C, δ 同式(1)中的表达.

3 实证分析

本文以我国沪综指 2000-01-04 ~ 2010-09-16 共 2 589 个收盘价数据为例, 其中最后 200 个数据留作计算 ES, 其余数据用来拟合模型. 原数据做对数差分并放大 100 倍得到收益率 R_n . 对 R_n 建立 ARMA-APARCH 模型, 均值方程选用 AR(4), 对残差的检验说明其具有 ARCH 效应和杠杆效应, 从而方差方程选用 APARCH(1, 1), 最后利用估计参数, 计算在置信水平 $\alpha = 0.05$ 下的 ES.

图 1 和 2 都显示, 在偏态分布假设下计算得到的期望损失处于对称分布假设下的期望损失的下方, 更好地避免了风险低估.

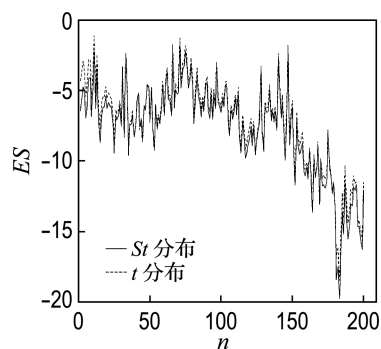


图 1 t 分布和 St 分布的 ES 值

Fig. 1 ES values of distribution of St and t

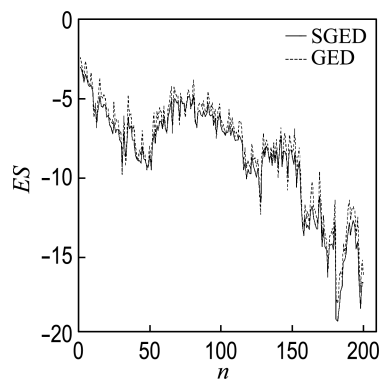


图 2 GED 和 SGED 的 ES 值

Fig. 2 ES values of distribution of SGED and GED

4 结 语

本文对收益率序列建立了 ARMA-

APARCH 模型,在 St 分布和 SGED 假设下分别给出 VaR 和 ES 的计算方法,通过与 t 分布和 GED 假设下 ES 值的对比发现,偏态分布假设下的期望损失更大些,更能预测到尾部风险,这将为风险的测量和管理提供参考。

参考文献:

- [1] Acerbi C, Tasche D. On the coherence of expected shortfall [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2002, **26**(7):1487-1503.
- [2] 陈学华,杨辉耀. 股市风险 VaR 与 ES 的动态度量与分析[J]. 系统工程, 2004, **22**(1):84-90.
CHEN Xue-hua, YANG hui-yao. Measuring VaR and ES of stock market [J]. *Systems Engineering*, 2004, **22**(1):84-90. (in Chinese)
- [3] 欧诗德,易丹辉. 不同风险模型下 ES 风险度量的计算[J]. 数理统计与管理, 2009, **28**(4):646-652.
OU Shi-de, YI Dan-hui. The computing of ES under different models [J]. *Application of Statistics and Management*, 2009, **28**(4):646-652. (in Chinese)
- [4] Engle R F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U. K. inflation [J]. *Econometrica*, 1982, **50**(4):987-1007.
- [5] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity [J]. *Journal of Econometrics*, 1986, **31**(3):307-327.
- [6] DING Z, Granger C W J, Engle R F. A long memory property of stock market returns and a new model [J]. *Journal of Empirical Finance*, 1993, **1**(1):83-106.
- [7] Hansen B. Autoregressive conditional density estimation [J]. *International Economic Review*, 1994, **35**(3):705-730.
- [8] Giot P, Laurent S. Value-at-Risk for long and short trading positions [J]. *Journal of Applied Economics*, 2003, **18**(6):641-663.
- [9] Bali T G. Modeling the dynamics of interest rate volatility with skew fat-tailed distributions [J]. *Annals of Operations Research*, 2007, **151**(1):151-178.
- [10] Jorion P. Risk: measuring the risk in value at risk [J]. *Financial Analysis Journal*, 1996, **52**(6):47-56.

Computing of risk measurement based on skewed distributions

WANG Hong-na^{1,2}, SONG Li-xin^{*1}

(1. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

Abstract: Financial time series have the sharp peak and fat-tailed characteristics and leverage in stock market. The ARMA-APARCH model is established based on logarithm yield ratio series of the stock index closing price and value-at-risk (VaR) and expected shortfall (ES) computing methods are provided in the assumption of the sequence of logarithm yield ratio series satisfying the distributions of Skewed- t and Skewed-GED respectively. Having compared t distribution with Skewed- t distribution, GED and Skewed-GED, it is proved that the ES estimations considering asymmetrical distribution are more conservative and more efficient to capture the tail risk of stock market.

Key words: APARCH; Skewed- t distribution; Skewed-GED; value-at-risk; expected shortfall