

一类参数拟变分不等式解映射的伴同导数

张杰^{*1,2}, 任咏红², 张立卫¹

(1. 大连理工大学 数学科学学院, 辽宁 大连 116024;

2. 辽宁师范大学 数学学院, 辽宁 大连 116029)

摘要: 由 Mordukhovich 准则可知, 伴同导数是研究解映射类 Lipschitz 性质的主要工具, 所以研究参数拟变分不等式的解映射的伴同导数具有重要的理论意义. 主要研究了一类等式和不等式约束的参数拟变分不等式的解映射的伴同导数的估计式. 首先在某些平稳性条件下, 通过法锥的具体表达形式给出了参数拟变分不等式的解映射的伴同导数的指标形式表达的估计式, 然后在数学规划常用的约束规范下, 建立了伴同导数等于其估计式的充分条件. 所得的结果完善了已有的一个伴同导数表示定理.

关键词: 参数拟变分不等式; 解映射; 伴同导数

中图分类号: O221.2 **文献标志码:** A

0 引言

拟变分不等式是由 Bensoussan 等^[1]在对脉冲最优控制 (impulse optimal control) 问题的研究中引入的. 随着研究的深入, 拟变分不等式及其特殊形式还被广泛地应用到连续力学^[2]、经济均衡^[3]及生物科学^[4]等领域. 除了自身具有广泛的应用外, 拟变分不等式还与目前备受关注的带有均衡约束的数学规划 (MPEC) 问题^[5]有着密切的联系, 它可以用来描述一类 MPEC 问题的约束条件. 在理论方面, 解集关于参数的稳定性分析是研究拟变分不等式的重要内容. 从算法的角度考虑, 通过把计算中常常出现的误差当成参数, 稳定性分析可以帮助寻找合适的解. 类 Lipschitz 性质^[6]被公认为是描述解集稳定性的最恰当的性质之一, 而由 Mordukhovich 准则可知, 伴同导数是研究解映射类 Lipschitz 性质的主要工具, 所以对解映射的伴同导数表达形式的研究已经引起了研究者的关注^[5-7]. Mordukhovich 等^[7]应用伴同导数新的链式法则研究了参数拟变分不等式解映射的伴同导数的表达形式, 并利用所得的结果建立

了拟变分不等式类 Lipschitz 性质的充分条件. 但其只是一些平稳性的条件下推导了参数拟变分不等式解映射的伴同导数的一个估计式, 对于什么情况下伴同导数等于这个估计式并未提及, 而且通过文中的定理也不能直接得到. 本文给出参数拟变分不等式解映射的伴同导数估计式的具体表达形式, 并建立解映射的伴同导数等于其估计式的充分条件. 对于参数拟变分不等式解映射, 这样的充分条件在变分分析的伴同导数理论中并未提及, 所得的结果既是对文献^[7]中定理 4.3 的完善又是对变分分析中伴同导数理论的补充.

1 预备知识

给定一个闭集合 $\Xi \subset \mathbf{R}^n$ 和一个点 $\bar{x} \in \Xi$. 锥 $\hat{N}_{\Xi}(\bar{x}) := \left\{ x^* \in \mathbf{R}^n \mid \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{\langle x^*, x - \bar{x} \rangle}{\|x - \bar{x}\|} \leq 0 \right\}$ 称为 Ξ 在 $\bar{x}$ 处的正则法锥^[8]. 而 Ξ 在 $\bar{x}$ 上的极限法锥^[6] 定义为 $N_{\Xi}(\bar{x}) := \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} \hat{N}_{\Xi}(x)$, 对于 $\Phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, $\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} \Phi(x) = \{y \in \mathbf{R}^m : \exists x_k \rightarrow \bar{x}, y_k \rightarrow y \text{ s. t. } y_k \in \Phi(x_k), \forall k\}$.

收稿日期: 2010-11-04; 修回日期: 2012-04-11.

基金项目: 辽宁省博士科研启动基金资助项目 (20091046); 国家自然科学基金资助项目 (11071029).

作者简介: 张杰* (1982-), 男, 博士, 讲师, E-mail: zj04212001@yahoo.com.cn; 张立卫 (1966-), 男, 教授, 博士生导师.

由定义可知 $\widehat{N}_{\Xi}(\bar{x}) \subset N_{\Xi}(\bar{x})$, 若式中的包含关系变成等式, 称 Ξ 在 $\bar{x}$ 处是 Clarke 正则的. 若 Ξ 是一个闭凸集合, 法锥和正则法锥都退化为凸分析意义下的法锥, 所以此时 Ξ 在包含在其中的任何一点处都是 Clarke 正则的.

定义 1^[8] 对于集值映射 $S: \mathbf{R}^n \Rightarrow \mathbf{R}^m$ 和 $\bar{x} \in \text{dom } S$, S 在 $\bar{x}$ 处关于 $\bar{u} \in S(\bar{x})$ 的伴同导数 $D^*S(\bar{x}, \bar{u}): \mathbf{R}^m \Rightarrow \mathbf{R}^n$ 定义为 $D^*S(\bar{x}, \bar{u})(y) = \{v: (v, -y) \in N((\bar{x}, \bar{u}), \text{gph } S)\}$. 当 S 在 $\bar{x}$, 即 $S(\bar{x}) = \{\bar{u}\}$ 处是单值映射时, 符号 $D^*S(\bar{x}, \bar{u})$ 可简写为 $D^*S(\bar{x})$, 其中 $\text{gph } S$ 表示集值映射 S 的图.

定义 2^[6] 称集值映射 $F: \mathbf{R}^m \Rightarrow \mathbf{R}^n$ 在 $(\bar{y}, \bar{x}) \in \text{gph } F$ 处是平稳的, 如果存在 $k > 0$ 及 $\bar{x}$ 的邻域 U 和 $\bar{y}$ 的邻域 V 使得 $d(x, F(\bar{y})) \leq k \|y - \bar{y}\|$, $\forall y \in V, x \in F(y) \cap U$.

命题 1^[8] 对于闭集合 $Z \subset \mathbf{R}^{n_1}$ 和 $K \subset \mathbf{R}^{n_2}$ 及光滑映射 $G: \mathbf{R}^{n_1} \rightarrow \mathbf{R}^{n_2}$, 若集值映射 $M: \mathbf{R}^{n_2} \rightarrow \mathbf{R}^{n_1}$, 定义为 $M(q) := \{z \in Z: G(z) + q \in K\}$ 在 $(0, \bar{z}) \in \text{gph } M$ 处是平稳的, 则有

$$N_{M(0)}(\bar{z}) \subset (J^T(G(\bar{z}))N_K(G(\bar{z})) + N_Z(\bar{z})) \quad (1)$$

由文献[7]中定理 6.14 可知 $\widehat{N}_{M(0)}(\bar{z}) \supset (J^T(G(\bar{z}))\widehat{N}_K(G(\bar{z})) + \widehat{N}_Z(\bar{z}))$.

因此, 如果还有 Z 在 $\bar{z}$ 处是 Clarke 正则的并且 K 在 $G(\bar{z})$ 处也是 Clarke 正则的, 则 C 在 $\bar{z}$ 处也是 Clarke 正则的, 并且包含关系式(1)可变为等式. 而由文献[7]中定理 6.14 同样可知如果基本约束规范

$$\left. \begin{aligned} 0 &\in J^T(G(\bar{z}))\eta + N_Z(\bar{z}) \\ \eta &\in N_K(G(\bar{z})) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \eta = 0$$

成立, 则包含关系式(1)变为等式也成立.

2 解映射的伴同导数

本文关注的是解映射 $S: \mathbf{R}^n \Rightarrow \mathbf{R}^m$, 定义为

$$S(x) := \{y \in \mathbf{R}^m: \langle F(x, y), y' - y \rangle \geq 0, \forall y' \in \Gamma(x, y)\}; x \in \mathbf{R}^n \quad (2)$$

其中 $F: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ 是一个连续可微的向量值函数, $\Gamma: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \Rightarrow \mathbf{R}^m$ 是一个凸值的集值映射, 定义为

$$\Gamma(x, y) = \{z \in \mathbf{R}^m: g(x, y, z) \leq 0, h(x, y, z) = 0\} \quad (3)$$

其中 $g(\cdot, \cdot, \cdot): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^i$ 为凸函数并且 $h(\cdot, \cdot, \cdot): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^l$ 为仿射函数. 解映射(2)联系到一个下述形式的参数拟变分不等式问题(QVIP): 给定一个参数 $x \in \mathbf{R}^n$, 寻找决策变量 $y \in \Gamma(x, y)$ 使得

$$\langle F(x, y), y' - y \rangle \geq 0; \forall y' \in \Gamma(x, y) \quad (4)$$

由凸分析法锥的定义, 参数拟变分不等式可以写成如下形式:

$$0 \in F(x, y) + N_{\Gamma(x, y)}(y) \quad (5)$$

令

$$r(x, y) = \begin{bmatrix} g(x, y, y) \\ h(x, y, y) \end{bmatrix}$$

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} J_3(g(x, y, y)) \\ J_3(h(x, y, y)) \end{bmatrix}$$

$$K = \mathbf{R}^s \times \{0\}_l$$

其中 $J_3(g(x, y, y))$ 和 $J_3(h(x, y, y))$ 分别表示 $g(x, y, y)$ 和 $h(x, y, y)$ 关于第 3 个变量的雅可比矩阵. 对于 $(\bar{x}, \bar{y})$ 满足 $\bar{y} \in \Gamma(\bar{x}, \bar{y})$, 如果基本约束规范

$$\left. \begin{aligned} p^T(\bar{x}, \bar{y})u &= 0 \\ u &\in N_K(r(\bar{x}, \bar{y})) \end{aligned} \right\} \Rightarrow u = 0 \quad (6)$$

在 $(\bar{x}, \bar{y})$ 成立, 则由法锥映射的稳定性可得当 (x, y) 充分接近 $(\bar{x}, \bar{y})$ 时,

$$N_{\Gamma(x, y)}(y) = p^T(x, y)N_K(r(x, y))$$

注意到根据文献[8]中例 6.10, 在 $(\bar{x}, \bar{y})$ 处的基本约束规范式(5)等价于 $(\bar{x}, \bar{y})$ 处 Mangasarian-Fromovitz 约束规范(MFCQ):

$$\nabla(h_j(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}))(j = 1, 2, \dots, l) \text{ 线性无关且 } \exists d \neq 0 \text{ 使得}$$

$$\nabla_3^T(g_i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}))d < 0; i \in I(\bar{x}, \bar{y}) \quad (7)$$

$\nabla_3(g_i(x, y, y))$ 和 $\nabla_3(h_j(x, y, y))$ 分别表示 $g_i(x, y, y)$ 和 $h_j(x, y, y)$ 关于第 3 个变量的梯度, 指标集 $I(\bar{x}, \bar{y}) := \{i \in \{1, 2, \dots, s\}: g_i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}) = 0\}$. 这样, 在 MFCQ(7) 下, 参数拟变分不等式(4)可以局部地表示为 $0 \in F(x, y) + Q(x, y)$, 其中 $Q(x, y) := p^T(x, y)N_K(r(x, y))$.

首先给出下面的定义:

定义 3 对于 $(\bar{x}, \bar{y})$ 满足 $\bar{y} \in \Gamma(\bar{x}, \bar{y})$ 并且 $\bar{v} \in N_{\Gamma(\bar{x}, \bar{y})}(\bar{y})$,

(a) 称线性无关约束规范(LICQ)在 $(\bar{x}, \bar{y})$ 处成立, 如果矩阵

$$\begin{bmatrix} J_3(g(\bar{x}, \bar{x}, \bar{y}))_{I(\bar{x}, \bar{y})} \\ J_3(h(\bar{x}, \bar{x}, \bar{y})) \end{bmatrix}$$

是行满秩的.

(b) 称严格互补(SC)条件在 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})$ 处成立, 若 $d_i > 0, i \in I(\bar{x}, \bar{y})$ 对于所有的 d 满足 $d \in N_K(r(\bar{x}, \bar{y}))$ 并且 $p^T(\bar{x}, \bar{y})d = \bar{v}$.

引理 1^[5] 考虑一个数对 $(a, b) \in \text{gph } N_{\mathbb{R}^s \times \{0\}_l}$, 则有 $N_{\text{gph } N_{\mathbb{R}^s \times \{0\}_l}}(a, b) = \bigcup_{i=1}^m N_{\text{gph } N_{\mathbb{R}_- \times \{0\}}}(a_i, b_i)$, 其中

$$N_{\text{gph } N_{\mathbb{R}_- \times \{0\}}}(a_i, b_i) = \begin{cases} \{0\} \times \mathbb{R}; & i \in L(a, b) \\ \mathbb{R} \times \{0\}; & i \in I_+(a, b) \cup J \\ (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \\ (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-); & i \in I_0(a, b) \end{cases}$$

其中指标集

$$\begin{aligned} L(a, b) &:= \{i \in \{1, 2, \dots, s\} : a_i < 0, b_i = 0\}, \\ I_+(a, b) &:= \{i \in \{1, 2, \dots, s\} : a_i = 0, b_i > 0\}, \\ I_0(a, b) &:= \{i \in \{1, 2, \dots, s\} : a_i = 0, b_i = 0\}, \\ J &:= \{s+1, s+2, \dots, s+l\}. \end{aligned}$$

下面证明一个引理, 这个引理是得出主要结论的关键.

引理 2 令 $Q(x, y) := N_{\Gamma(x, y)}(y)$, $(\bar{x}, \bar{y})$ 满足 $\bar{y} \in \Gamma(\bar{x}, \bar{y})$ 并且 $\bar{v} \in N_{\Gamma(\bar{x}, \bar{y})}(\bar{y})$. 若 MFCQ(6) 在 $(\bar{x}, \bar{y})$ 处成立, 集值映射 $M := \mathbb{R}^{s+l} \times \mathbb{R}^{s+l} \Rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{s+l}$, 定义为

$$M(z) := \left\{ (x, y, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{s+l} : \begin{bmatrix} r(x, y) \\ d \end{bmatrix} + z \in \text{gph } N_K \right\}$$

在 $(0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{d})$ 处是平稳的, 其中 d 满足 $d \in N_K(r(\bar{x}, \bar{y}))$ 并且 $p^T(\bar{x}, \bar{y})d = \bar{v}$, 则对于 $u \in \mathbb{R}^m$, 包含关系

$$D^*Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})(u) \subset \bigcup_{\substack{d \in N_K(r(\bar{x}, \bar{y})) \\ p^T(\bar{x}, \bar{y})d = \bar{v}}} \Phi(\bar{x}, \bar{y}, u, d) \quad (8)$$

成立, 其中

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}, u, d) = \{(J_{x,y}(p^T(\bar{x}, \bar{y})d))^T u +$$

$$\begin{aligned} & ((J(r(\bar{x}, \bar{y})))_{\beta \cup \gamma \cup J})^T w_{\beta \cup \gamma \cup J} \mid \\ & i \in \beta, w_i > 0, (p(\bar{x}, \bar{y})u)_i < 0 \\ & \text{或 } w_i (p(\bar{x}, \bar{y})u)_i = 0 \} \end{aligned}$$

指标集: $\beta := I_0(r(\bar{x}, \bar{y}), d)$, $\gamma := I_+(r(\bar{x}, \bar{y}), d)$.

如果还有, 在 $(\bar{x}, \bar{y})$ 处的 MFCQ 加强为 LICQ 且 SC 条件在 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})$ 处成立, 则存在 d 满足式 (7) 使得

$$D^*Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})(u) = \Phi(\bar{x}, \bar{y}, u, d) \quad (9)$$

成立并且 $\text{gph } Q$ 在 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})$ 处是 Clarke 正则的.

证明 应用文献[7]中定理 3.1 可得包含关系:

$$\begin{aligned} D^*Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})(u) & \subset \bigcup_{\substack{d \in N_K(r(\bar{x}, \bar{y})) \\ p^T(\bar{x}, \bar{y})d = \bar{v}}} ((J_{x,y}(p^T(\bar{x}, \\ \bar{y})d))^T u + ((J(r(\bar{x}, \bar{y})))_{\beta \cup \gamma})^T D^*N_K(r(\bar{x}, \bar{y}), \\ d)(p(\bar{x}, \bar{y})u)) \end{aligned}$$

再根据引理 1 可得包含关系式 (8). 接下来证明余下的结论. 首先证明当 $p(\bar{x}, \bar{y})$ 是行满秩时, 余下的结论是成立的, 然后说明上述行满秩条件可以减弱为线性无关约束规范. 根据文献[6]中引理 1.126, 如果 $p(\bar{x}, \bar{y})$ 是行满秩的, 则存在 $\bar{d}$ 满足 $\bar{d} \in N_K(r(\bar{x}, \bar{y}))$ 并且 $p^T(\bar{x}, \bar{y})\bar{d} = \bar{v}$ 使得

$$\begin{aligned} D^*Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})(u) & = ((J_{x,y}(p^T(\bar{x}, \bar{y})\bar{d}))^T u + \\ & D^*(N_K \circ r)(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d}) \times \\ & (p(\bar{x}, \bar{y})u)) \quad (10) \end{aligned}$$

考虑到集值映射 $T := N_K \circ r$ 并观察到

$$\begin{aligned} \text{gph } T & = \left\{ (x, y, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{s+l} \mid \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} r(x, y) \\ d \end{bmatrix} \in \text{gph } N_K \right\} \end{aligned}$$

因为对于 M 来说, $\text{gph } T = M(0)$, 在 M 的平稳性条件下, 应用命题 1 得到

$$\begin{aligned} N_{\text{gph } T}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d}) & \subset \left[\begin{bmatrix} J^T(r(\bar{x}, \bar{y})) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \circ \right. \\ & \left. N_{\text{gph } N_K}(r(\bar{x}, \bar{y}), \bar{d}) \right] \quad (11) \end{aligned}$$

由命题 1 也可知

$$\begin{aligned} \hat{N}_{\text{gph } T}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d}) & \supset \left[\begin{bmatrix} J^T(r(\bar{x}, \bar{y})) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \circ \right. \\ & \left. \hat{N}_{\text{gph } N_K}(r(\bar{x}, \bar{y}), \bar{d}) \right] \quad (12) \end{aligned}$$

由于 SC 条件在 $(\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})$ 处成立, 根据引理 1 可得 $\text{gph } N_K$ 在 $(r(\bar{x}, \bar{y}) \quad \bar{d})$ 处是 Clarke 正则的. 由包含关系(11) 和(12) 可知包含关系(11) 变为等式成立. 因此

$$D^*(N_K \circ r)(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})(p(\bar{x}, \bar{y})u) = J^T(r(\bar{x}, \bar{y}))D^*N_K(r(\bar{x}, \bar{y}), \bar{d})(p(\bar{x}, \bar{y})u) \quad (13)$$

把式(13) 代入式(10), 得到当 $p(\bar{x}, \bar{y})$ 是行满秩时伴同导数的表达式(9).

接下来证明当 $p(\bar{x}, \bar{y})$ 是行满秩时, $\text{gph } Q$ 在 $(\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})$ 处是 Clarke 正则的. 由 $\text{gph } N_K$ 在 $(r(\bar{x}, \bar{y}) \quad \bar{d})$ 处 Clarke 正则可得 $\text{gph } (N_K \circ r)$ 在 $(\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{d})$ 处也 Clarke 正则, 由式(10), 只需证明

$$\widehat{D}^*Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})(u) \supset ((J_{x,y}(p^T(\bar{x}, \bar{y})d))^T u + \widehat{D}^*(N_K \circ r)(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})(p(\bar{x}, \bar{y})u))$$

令

$$z^* \in \widehat{D}^*(N_K \circ r)(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})(p(\bar{x}, \bar{y})u)$$

则由 $\widehat{D}^*Q$ 的定义, 只需证明不等式

$$\limsup_{(x \ y \ v) \xrightarrow{\text{gph } Q} (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})} [\langle z^* + (J_{x,y}(p^T(\bar{x}, \bar{y})d))^T u, (x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v}) \rangle - \langle u, v - \bar{v} \rangle] / \|(x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})\| \leq 0 \quad (14)$$

注意到 $v = p^T(x, y)d$ 和对于 $d \in N_K(r(x, y))$,

$$\begin{aligned} & [\langle z^* + (J_{x,y}(p^T(\bar{x}, \bar{y})\bar{d}))^T u, (x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v}) \rangle - \langle u, v - \bar{v} \rangle] / \\ & \|(x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})\| = \\ & [\|(x \ y \ d) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{d})\| / \|(x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})\|] \times \\ & \{[\langle z^*, (x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v}) \rangle - \langle u, p^T(\bar{x}, \bar{y})d - p^T(\bar{x}, \bar{y})\bar{d} \rangle] / \|(x \ y \ d) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{d})\| \} + \\ & [\|(x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})\| / \|(x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})\|] \times \\ & \{[\langle -u, p^T(\bar{x}, \bar{y})d - p^T(\bar{x}, \bar{y})\bar{d} - J_{x,y}(p^T(\bar{x}, \bar{y})\bar{d})[(x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})] \rangle] / \|(x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})\| \} \end{aligned} \quad (15)$$

由 $z^* \in \widehat{D}^*(N_K \circ r)(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})(p(\bar{x}, \bar{y})u)$ 可知

$$\limsup_{(x \ y \ d) \xrightarrow{\text{gph } (N_K \circ r)} (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{d})} [\langle z^*, (x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v}) \rangle -$$

$$\langle u, p^T(\bar{x}, \bar{y})d - p^T(\bar{x}, \bar{y})\bar{d} \rangle] / \|(x \ y \ d) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{d})\| \leq 0 \quad (16)$$

由 $p^T(x, y)\bar{d}$ 在 $(\bar{x} \quad \bar{y})$ 处的可微性, 有

$$\begin{aligned} & \limsup_{(x \ y \ d) \xrightarrow{\text{gph } (N_K \circ r)} (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{d})} \{p^T(x, y)d - p^T(\bar{x}, \bar{y})\bar{d} - J_{x,y}(p^T(\bar{x}, \bar{y})\bar{d})[(x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})]\} / \|(x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})\| = \\ & \limsup_{(x \ y \ d) \xrightarrow{\text{gph } (N_K \circ r)} (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{d})} \{p^T(x, y)\bar{d} - p^T(\bar{x}, \bar{y})\bar{d} - J_{x,y}(p^T(\bar{x}, \bar{y})\bar{d})[(x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})]\} / \|(x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})\| + \\ & \limsup_{(x \ y \ d) \xrightarrow{\text{gph } (N_K \circ r)} (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{d})} [p^T(x, y)(d - \bar{d}) - p^T(\bar{x}, \bar{y})(d - \bar{d})] / \|(x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})\| = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

接下来证明

$$\text{当 } (x \ y \ v) \xrightarrow{\text{gph } Q} (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v}) \text{ 时,}$$

$$(x \ y \ d) \xrightarrow{\text{gph } (N_K \circ r)} (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{d}) \quad (18)$$

令 $\psi(x, y, d) = (x \ y \ p^T(x, y)d)$, 则 $\psi^{-1}(x, y, v) = \{(x \ y \ d) \mid \psi(x, y, d) = (x \ y \ v)\}$. 由 ψ 在 $(\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{d})$ 处的 Lipschitz 连续性可得 ψ^{-1} 在 $(\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})$ 处度量正则. 因此存在正数 γ 和 ε 使得 $d((x \ y \ d), \psi^{-1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})) \leq \gamma \|(x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})\|$ 对于任何 $B((\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v}), \varepsilon)$ 中的元素成立. 由于 $p(\bar{x}, \bar{y})$ 是行满秩的, $\psi^{-1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}) = (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{d})$. 得到式(18) 成立并且尤其当 $(x \ y \ v) \neq (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})$ 时, $\frac{\|(x \ y \ d) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{d})\|}{\|(x \ y \ v) - (\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v})\|} \leq \gamma$ 对于 $B((\bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{v}), \varepsilon)$ 中的任何元素成立, 结合式(15) ~ (18), 得到式(14). 因此当 $p(\bar{x}, \bar{y})$ 是行满秩时结论成立. 令

$$\begin{aligned} K_l &= R^{\perp_{l(\bar{x}, \bar{y})}} \times \{0\}_l \\ r(x, y)_l &= \begin{bmatrix} g(x, y, y)_{l(\bar{x}, \bar{y})} \\ h(x, y, y) \end{bmatrix} \\ p(x, y)_l &= \begin{bmatrix} J_3(g(x, y, y)_{l(\bar{x}, \bar{y})}) \\ J_3(h(x, y, y)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则由伴同导数的定义可得

$$\begin{aligned} & \widehat{D}^*(N_{K_l} \circ r_l)(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d}_l)(p(\bar{x}, \bar{y})_l u) = \\ & \widehat{D}^*(N_K \circ r)(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})(p(\bar{x}, \bar{y})u) \end{aligned}$$

注意到对于 $\bar{v} \in Q(\bar{x}, \bar{y})$, 如果 $p(\bar{x}, \bar{y})_i$ 是行满秩的, 则由式(10)可得, 存在 $\bar{d}$ 满足式(7)使得

$$D^* Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v})(u) \subset ((J_{x,y}(p^T(\bar{x}, \bar{y})_i \bar{d}_i))^T u + D^*(N_{K_i} \circ r)(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d}_i) \times (p(\bar{x}, \bar{y})_i u))$$

的结果, 与上述证明类似, 在条件 $p(\bar{x}, \bar{y})_i$ 是行满秩条件下, 即线性无关约束条件在 $(\bar{x} \quad \bar{y})$ 处成立时, 也得到相同的结论, 证毕.

引入拉格朗日映射 $L: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{s+l} \rightarrow \mathbf{R}^m$, 定义为 $L(x, y, d) := F(x, y) + p^T(x, y)d$. 为了方便地构造定理中的主要结论, 定义了映射 $\Lambda[\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \Rightarrow \mathbf{R}^{s+l}]$, $\Lambda(x, y) := \{d \in \mathbf{R}^{s+l} \mid L(x, y, d) = 0\}$.

下面是主要的结论.

定理 1 令 $\bar{x} \in \mathbf{R}^n, \bar{y} \in S(\bar{x})$. 假设集值映射 $\Sigma: \mathbf{R}^{2(s+l)} \Rightarrow \mathbf{R}^{n+m+s+l}$, 定义为

$$\Sigma(v) := \left\{ (x \quad y \quad d) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{s+l} \mid v + \begin{bmatrix} r(x, y) \\ d \end{bmatrix} \in \text{gph } N_K \right\}$$

在 $(0 \quad \bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{d})$ 处是平稳的, 其中 $\bar{d} \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y})$, 也假设 $P: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{2(s+l)} \Rightarrow \mathbf{R}^{n+m+s+l}$ 定义为

$$P(z, v) := \{(x \quad y \quad d) \in \mathbf{R}^{n+m+s+l} \mid L(x, y, d) + z = 0\} \cap \Sigma(v)$$

在 $(0 \quad 0 \quad \bar{x} \quad \bar{y} \quad \bar{d})$ 处是平稳的, 其中 $\bar{d} \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y})$. 对于 $u \in \mathbf{R}^m$,

(a) 若 MFCQ (6) 在 $(\bar{x} \quad \bar{y})$ 处成立, 则包含关系

$$D^* S(x, y)(u) \subset \bigcup_{\bar{d} \in \Lambda(\bar{x}, \bar{y})} A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})(u) \quad (19)$$

成立, 其中

$$\begin{aligned} A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})(u) = & \left\{ (J_x(L(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})))^T v + \right. \\ & ((J_x(r(\bar{x}, \bar{y})))_{\beta \cup \gamma \cup J})^T w_{\beta \cup \gamma \cup J} \mid \\ & 0 \in (u + (J_y(L(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})))^T v + \\ & ((J_y(r(\bar{x}, \bar{y})))_{\beta \cup \gamma \cup J})^T w_{\beta \cup \gamma \cup J}); \\ & i \in \beta, w_i > 0, (p(\bar{x}, \bar{y})_i u)_i < 0, \\ & \text{或 } w_i (p(\bar{x}, \bar{y})_i u)_i = 0 \} \end{aligned}$$

(b) 若 LICQ 在 $(\bar{x} \quad \bar{y})$ 处成立且 SC 条件在 $(\bar{x} \quad \bar{y} \quad -F(\bar{x}, \bar{y}))$ 处成立, 则包含关系式(19)

变为等式成立, 即 $D^* S(\bar{x}, \bar{y})(u) = A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})(u)$ 成立.

证明 直接应用引理 1 和文献[7]中定理 4.3, 得到(a)中的结论. 接下来证明(b)中的等式成立. 令 $Q(x, y) := N_{\Gamma(x, y)}(y)$. 如果集值映射 $\Xi: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \Rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, 定义为

$$\Xi(v) := \left\{ (x \quad y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \mid \begin{bmatrix} x \\ y \\ -F(x, y) \end{bmatrix} + v \in \text{gph } Q \right\}$$

在 $(0 \quad \bar{x} \quad \bar{y})$ 处是平稳的. 则由命题 1 可得, 对于 $u \in \mathbf{R}^m$, 有估计

$$N_{\text{gph } S}(\bar{x}, \bar{y}) \subset \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 & -(J_x F(\bar{x}, \bar{y}))^T \\ 0 & I & -(J_y F(\bar{x}, \bar{y}))^T \end{bmatrix} \circ N_{\text{gph } Q}(\bar{x}, \bar{y}, -F(\bar{x}, \bar{y})) \right\} \quad (20)$$

并且当 $\text{gph } Q$ 在 $(\bar{x} \quad \bar{y} \quad -F(\bar{x}, \bar{y}))$ 处是正则时, 包含关系(20)变为等式成立. 注意到, 如果 LICQ 在 $(\bar{x} \quad \bar{y})$ 处成立, SC 条件在 $(\bar{x} \quad \bar{y} \quad -F(\bar{x}, \bar{y}))$ 处成立, 则 $\text{gph } Q$ 在 $(\bar{x} \quad \bar{y} \quad -F(\bar{x}, \bar{y}))$ 处是正则的, 因此由式(20)可知

$$\begin{aligned} D^* S(\bar{x}, \bar{y})(u) = & \left\{ v \in \mathbf{R}^n \mid \exists w \in \mathbf{R}^m \text{ s. t.} \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} v \\ -u \end{bmatrix} \in ((J_x(F(\bar{x}, \bar{y})))^T w + \right. \\ & \left. D^* Q(\bar{x}, \bar{y}, -F(\bar{x}, \bar{y}))(w)) \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

由文献[7]中定理 4.3 的证明可知定理中的稳定性条件保证了 $\Xi(v)$ 在 $(0 \quad \bar{x} \quad \bar{y})$ 处的平稳性. 因此由引理 2 及式(21)可得, 式(19)包含关系变为等式成立, 证明完毕.

注 1 如果还有定理 1 中的映射 $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ 和 $g(\cdot, \cdot, \cdot)$ 都是仿射函数, 则定理 1 中要求的平稳性条件是自动成立的, 所以此时只需假设约束规范条件成立即可.

3 结 论

基于伴同导数的表达形式在研究解映射类

Lipschitz 性质中的重要作用, 研究了一类等式和不等式约束的参数拟变分不等式的解映射(3)的伴同导数的表达形式. 在一些基本的约束规范下, 首先得到了指标集形式的解映射(3)的伴同导数的估计式, 然后证明了线性无关约束规范和严格互补条件能够保证解映射的伴同导数等于其估计式. 这个结果完善了文献[7]中的伴同导数表示定理.

参考文献:

- [1] Bensoussan A, Lions J L. Nouvelle formulation des problemes de controle impulsif et applications [J]. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série A**, 1973, **276**:1189-1192.
- [2] Kravchuk A S, Neittaanmaki P J. **Variational and Quasi-variational Inequalities in Mechanics** [M]. The Netherlands: Springer, 2007.
- [3] Pang J S, Fukushima M. Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi-leader-follower games [J]. **Computational Management Science**, 2005, **2**(1):21-56.
- [4] Aumann R J, Hart S. **Handbook of Game Theory with Economic Applications** [M]. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1994.
- [5] Outrata J V. Mathematical programs with equilibrium constraints: Theory and numerical methods [M] // **Nonsmooth Mechanics of Solids (CISM International Centre for Mechanical Sciences No. 485)**. New York: Springer, 2006:221-274.
- [6] Mordukhovich B S. **Variational Analysis and Generalized Differentiation I-II** [M]. Berlin: Springer, 2006.
- [7] Mordukhovich B S, Outrata J V. Coderivative analysis of quasivariational inequalities with applications to stability and optimization [J]. **SIAM Journal on Optimization**, 2007, **18**(2):389-412.
- [8] Rockafellar R T, Wets R J B. **Variational Analysis** [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1998.

Coderivatives of solution map to a parametric quasi-variational inequality

ZHANG Jie^{*1,2}, REN Yong-hong², ZHANG Li-wei¹

(1. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

Abstract: According to Mordukhovich criterion, the coderivative is the main tool to study the Lipschitz-like property of solution map, so it is theoretical valuable to study coderivatives of solution maps to parametric quasi-variational inequalities. The estimate formula of coderivative of solution map to an equality and inequality constrained parametric quasi-variational inequality is studied. At first, under some calmness conditions, by the description of normal cone, the estimate formula of coderivative of parametric quasi-variational inequality in the index sets style is obtained. Furthermore, under some constraint qualifications of mathematical programming, the sufficient condition ensuring the equality of coderivative and its estimate formula is established. The results obtained can be seen as a supplement to a coderivative description theorem.

Key words: parametric quasi-variational inequality; solution map; coderivative