

基于 EPEA 的 SINS 大失准角非线性初始对准方法

赵红宇^{*1}, 王哲龙^{1,2}, 姜 鸣¹, 宫少奇³, 尚 红⁴

- (1. 大连理工大学 控制科学与工程学院, 辽宁 大连 116024;
2. 中国科学院沈阳自动化研究所 机器人学国家重点实验室, 辽宁 沈阳 100080;
3. 浙江中控技术股份有限公司, 浙江 杭州 310052;
4. 中国地震应急搜救中心, 北京 100049)

摘要: 基于欧拉平台误差角(EPEA)的概念描述了理论导航坐标系到计算导航坐标系之间的失准角, 推导了捷联惯导系统(SINS)在大失准角情况下进行初始对准的非线性误差模型. 在系统噪声和量测噪声均为加性噪声且量测方程为线性方程时, 给出了带阻尼解算的简化扩展卡尔曼滤波(EKF)算法和简化无迹卡尔曼滤波(UKF)算法, 同时分析了不同失准角情况下初始对准过程的异同. 静基座状态下的 Monte Carlo 仿真结果表明, 大失准角和大方位失准角情况下, EKF 和 UKF 算法都能满足对准要求, 其中 UKF 算法较 EKF 算法具有对准时间更快、对准精度更高和适用范围更广的优点; 小失准角情况下, 由于捷联惯导系统的线性化误差变小, 二者的对准时间和对准精度基本相同.

关键词: 捷联惯导系统; 大失准角; 非线性初始对准; 扩展卡尔曼滤波; 无迹卡尔曼滤波

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

0 引 言

实际应用时, 捷联惯导系统(SINS)由于受工作环境和陀螺仪精度的影响, 地球自转角速率甚至会被陀螺噪声淹没. 粗对准结束后^[1], 可能出现大方位失准角或大失准角的情况, 此时采用小失准角误差模型和线性 Kalman 滤波技术不能准确地描述系统误差的传播特性^[2]. 因此, 研究大失准角下的初始对准技术对于 SINS 具有十分重要的意义. 通常, 当粗对准精度无法满足小失准角假设、不进行或不便进行粗对准(如空中对准)时, 都需要考虑在大失准角情况下的初始对准问题^[3,4].

近年来, 针对 SINS 大失准角下初始对准的误差模型和非线性估计方法不断涌现, Bucy 等^[5,6]等提出并研究了适用于非线性系统和非线性量测情况下的扩展卡尔曼滤波(extended Kalman filter, EKF)算法. 但 EKF 引入了高阶项

截断误差, 必然会降低模型的准确性, 随着时间的延长, 估计精度难以保证, 甚至使滤波器难以稳定. 此外, 在使用 EKF 算法前必须知道非线性函数的具体展开形式, 才能计算非线性函数的 Jacobian 矩阵, 且此过程非常繁琐并容易出错. Julier 等提出了处理非线性问题的无迹卡尔曼滤波(unscented Kalman filter, UKF)算法^[7,8]. UKF 的独特之处在于采用确定性采样策略近似非线性分布, 取代 EKF 对非线性模型的线性化处理, 避免了求取 Jacobian 矩阵, 能取得更好的滤波性能^[9,10].

捷联惯导系统依据载体在初始对准时的运动状态可将初始对准分为两类, 即静基座初始对准和动基座初始对准. 通常, 捷联惯导系统的可观测性较差, 尤其在静基座情况下其可观测性最弱; 在动基座情况下, 通过使基座有目的地机动可以提高捷联惯导系统的可观测性, 从而提高捷联惯导

系统初始对准的收敛速度及估计精度. 本文主要研究静基座情况下, SINS 的初始对准问题. 基于欧拉平台误差角(EPEA)的概念描述理论导航坐标系到计算导航坐标系之间的失准角^[3,11], 摒弃经典小失准角误差模型中无限转动与旋转次序无关的做法. 在此基础上推导适用于 SINS 初始对准的非线性误差模型, 该模型对姿态误差和相对姿态不作任何线性化假设, 能准确描述 SINS 的误差传播规律. 在系统噪声和量测噪声均为复杂性噪声并且量测方程为线性方程时, 详细分析大失准角、大方位失准角与小失准角情况下初始对准过程的异同, 给出带阻尼解算的简化 EKF 算法和简化 UKF 算法, 并对两种滤波算法在静基座状态下的对准效果进行 Monte Carlo^[12] 仿真比较.

1 SINS 的非线性误差模型

1.1 EPEA 微分方程

首先定义文中所用到的坐标系: 地心惯性坐标系记为 i 系; 地球坐标系记为 e 系; 导航坐标系选取“东-北-天”地理坐标系, 记为 n 系; 机体坐标系选取“右-前-上”坐标系, 记为 b 系^[13]. n 系依次绕航向轴、俯仰轴、横滚轴作 3 次欧拉角旋转可至 b 系, 且 n 系到 b 系的旋转变换关系可用姿态矩阵 C_n^b 描述. 实际上, 带误差的计算导航坐标系 n' 系与理想导航坐标系 n 系之间存在失准角. 类似于 n 系到 b 系的转动过程, n 系依次经过 3 次基本旋转可至 n' 系, 记这 3 次旋转的欧拉误差角分别为 α_z 、 α_x 和 α_y , 则其确定的坐标变换矩阵如下:

$$\begin{aligned} C_z &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_z & \sin \alpha_z & 0 \\ -\sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ C_x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & \sin \alpha_x \\ 0 & -\sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{pmatrix}, \\ C_y &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_y & 0 & -\sin \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{pmatrix} \quad (1) \end{aligned}$$

根据有限次基本旋转的复合原理, n 系到 n' 系的姿态矩阵为

$$C_n^{n'} = C_y C_x C_z = (C_{n1}^{n'} \quad C_{n2}^{n'} \quad C_{n3}^{n'}) \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} C_{n1}^{n'} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_y \cos \alpha_z - \sin \alpha_y \sin \alpha_x \sin \alpha_z \\ -\cos \alpha_x \sin \alpha_z \\ \sin \alpha_y \cos \alpha_z + \cos \alpha_y \sin \alpha_x \sin \alpha_z \end{pmatrix} \\ C_{n2}^{n'} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_y \sin \alpha_z + \sin \alpha_y \sin \alpha_x \cos \alpha_z \\ \cos \alpha_x \cos \alpha_z \\ \sin \alpha_y \sin \alpha_z - \cos \alpha_y \sin \alpha_x \cos \alpha_z \end{pmatrix} \\ C_{n3}^{n'} &= \begin{pmatrix} -\sin \alpha_y \cos \alpha_x \\ \sin \alpha_x \\ \cos \alpha_y \cos \alpha_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

在水平误差角 α_x 和 α_y 较小而方位误差角 α_z 较大的大方位失准角情况下, 有

$$C_n^{n'} \approx \begin{pmatrix} \cos \alpha_z & \sin \alpha_z & -\alpha_y \\ -\sin \alpha_z & \cos \alpha_z & \alpha_x \\ \alpha_y \cos \alpha_z + \alpha_x \sin \alpha_z & \alpha_y \sin \alpha_z - \alpha_x \cos \alpha_z & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

在欧拉误差角均为小角度的小失准角情况下, 有

$$C_n^{n'} \approx \begin{pmatrix} 1 & \alpha_z & -\alpha_y \\ -\alpha_z & 1 & \alpha_x \\ \alpha_y & -\alpha_x & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

记矢量 $\alpha = (\alpha_x \quad \alpha_y \quad \alpha_z)^T$, 设 $(\Phi \times)$ 为由 α 构造的反对称矩阵, 则有

$$C_n^{n'} = I - (\Phi \times) \quad (5)$$

设 n' 系相对于 n 系的角速度为 $\omega_{m'}$, 则 $\omega_{m'}$ 为

$$\begin{aligned} \omega_{m'}^{n'} &= \begin{pmatrix} \omega_{m'}^{n'} x \\ \omega_{m'}^{n'} y \\ \omega_{m'}^{n'} z \end{pmatrix} = C_y C_x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}_z \end{pmatrix} + C_y \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha}_y \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &C_\omega \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_x \\ \dot{\alpha}_y \\ \dot{\alpha}_z \end{pmatrix} \quad (6) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } C_\omega = \begin{pmatrix} \cos \alpha_y & 0 & -\sin \alpha_y \cos \alpha_x \\ 0 & 1 & \sin \alpha_x \\ \sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \cos \alpha_x \end{pmatrix}$$

于是, 得

$$\dot{\alpha} = C_\omega^{-1} \omega_{m'}^{n'} \quad (7)$$

式(7)即为欧拉平台误差角微分方程, 它描述了欧拉平台误差角 α 与 n' 系角速度 $\omega_{m'}^{n'}$ 之间的关系, 若能推导出 $\omega_{m'}^{n'}$ 的变化规律, 则可建立起 SINS 基于欧拉平台误差角的误差模型.

若水平误差角 α_x 和 α_y 为小角度, $\omega_{m'}^{n'}$ 可近似

为

$$\boldsymbol{\omega}_{m'}' = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_x \cos \alpha_y - \dot{\alpha}_z \sin \alpha_y \cos \alpha_x \\ \dot{\alpha}_y + \dot{\alpha}_z \sin \alpha_x \\ \dot{\alpha}_x \sin \alpha_y + \dot{\alpha}_z \cos \alpha_y \cos \alpha_x \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_x \\ \dot{\alpha}_y \\ \dot{\alpha}_z \end{pmatrix} = \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (8)$$

因此,在大方位失准角或小失准角情况下,欧拉平台误差角微分方程可简化为

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} \approx \boldsymbol{\omega}_{m'}' \quad (9)$$

1.2 姿态误差方程

理论上,SINS在 n 系的姿态矩阵微分方程为

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\omega}_b^b \times) - (\boldsymbol{\omega}_m^n \times) \mathbf{C}_b^n \quad (10)$$

其中 $(\boldsymbol{\omega} \times)$ 表示由向量 $\boldsymbol{\omega}$ 构成的反对称矩阵,且 $\boldsymbol{\omega}_m^n = \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n$.

实际上,SINS含误差的姿态矩阵微分方程为

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n' = \mathbf{C}_b^n' (\hat{\boldsymbol{\omega}}_b^b \times) - (\hat{\boldsymbol{\omega}}_m^n \times) \mathbf{C}_b^n' \quad (11)$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\omega}}_b^b = \boldsymbol{\omega}_b^b + \delta\boldsymbol{\omega}_b^b$,为陀螺仪的测量值, $\delta\boldsymbol{\omega}_b^b$ 为测量误差; $\hat{\boldsymbol{\omega}}_m^n = \boldsymbol{\omega}_m^n + \delta\boldsymbol{\omega}_m^n$,为 $\boldsymbol{\omega}_m^n$ 的计算值, $\delta\boldsymbol{\omega}_m^n$ 为计算误差.

定义姿态矩阵的计算误差

$$\Delta\mathbf{C} = \mathbf{C}_b^n' - \mathbf{C}_b^n = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_n^n') \mathbf{C}_b^n' \quad (12)$$

对式(12)求微分,并将式(10)、(11)代入,整理得

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_b^n (\delta\boldsymbol{\omega}_b^b \times) + (\boldsymbol{\omega}_m^n \times) \mathbf{C}_b^n - \\ & \mathbf{C}_n^n' (\hat{\boldsymbol{\omega}}_m^n \times) \mathbf{C}_b^n' + \dot{\mathbf{C}}_n^n' \mathbf{C}_b^n' = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (13)$$

上式右乘 $\mathbf{C}_n^n'$,再根据相似变换法则可简化为

$$(\delta\boldsymbol{\omega}_b^b \times) \mathbf{C}_n^n' + (\boldsymbol{\omega}_m^n \times) \mathbf{C}_n^n' - \mathbf{C}_n^n' (\hat{\boldsymbol{\omega}}_m^n \times) + \dot{\mathbf{C}}_n^n' = \mathbf{0} \quad (14)$$

再将矩阵微分方程 $\dot{\mathbf{C}}_n^n' = \mathbf{C}_n^n' (\boldsymbol{\omega}_{m'}^n \times)$ 代入上式,并左乘 $\mathbf{C}_n^n'$,得

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_n^n' (\delta\boldsymbol{\omega}_b^b \times) \mathbf{C}_n^n' + \mathbf{C}_n^n' (\boldsymbol{\omega}_m^n \times) \mathbf{C}_n^n' - \\ & (\hat{\boldsymbol{\omega}}_m^n \times) + (\boldsymbol{\omega}_{m'}^n \times) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (15)$$

根据反对称阵的相似变换及其与矢量之间的关系,上式的矢量等价形式为

$$\delta\boldsymbol{\omega}_b^b + \boldsymbol{\omega}_{m'}^n - \hat{\boldsymbol{\omega}}_m^n + \boldsymbol{\omega}_{m'}^n = \mathbf{0} \quad (16)$$

整理得

$$\boldsymbol{\omega}_{m'}^n = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_n^n') \boldsymbol{\omega}_m^n + \delta\boldsymbol{\omega}_m^n - \mathbf{C}_b^n' \delta\boldsymbol{\omega}_b^b \quad (17)$$

即角速度 $\boldsymbol{\omega}_{m'}^n$ 的变化规律得解.

最后,将式(17)代入式(7),得SINS基于EPEA的非线性姿态误差方程

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{C}_\omega^{-1} ((\mathbf{I} - \mathbf{C}_n^n') \boldsymbol{\omega}_m^n + \delta\boldsymbol{\omega}_m^n - \mathbf{C}_b^n' \delta\boldsymbol{\omega}_b^b) \quad (18)$$

大方位失准角或小失准角情况下,根据式(9)得

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_n^n') \boldsymbol{\omega}_m^n + \delta\boldsymbol{\omega}_m^n - \mathbf{C}_b^n' \delta\boldsymbol{\omega}_b^b \quad (19)$$

小失准角情况下,根据式(5)得

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\omega}_m^n + \delta\boldsymbol{\omega}_m^n - \mathbf{C}_b^n' \delta\boldsymbol{\omega}_b^b \quad (20)$$

1.3 速度误差模型

理论上,SINS在 n 系的速度微分方程为

$$\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}^n \quad (21)$$

实际上,SINS含误差的速度微分方程为

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}^n = \mathbf{C}_b^n \hat{\mathbf{f}}^b - (2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n) \times \hat{\mathbf{v}}^n + \hat{\mathbf{g}}^n \quad (22)$$

其中 $\hat{\mathbf{v}}^n = \mathbf{v}^n + \delta\mathbf{v}^n$ 为速度计算值, $\delta\mathbf{v}^n$ 为计算误差;

$\hat{\mathbf{f}}^b = \mathbf{f}^b + \delta\mathbf{f}^b$,为加速度计的测量值, $\delta\mathbf{f}^b$ 为测量误差; $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n = \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$, $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n = \boldsymbol{\omega}_{en}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n$, $\hat{\mathbf{g}}^n = \mathbf{g}^n + \delta\mathbf{g}^n$,且 $\delta\boldsymbol{\omega}_m^n = \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n$.

将式(22)和(21)相减,可得SINS速度误差方程

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{v}}^n = & (\mathbf{C}_n^n' - \mathbf{I}) \mathbf{f}^n + \mathbf{C}_b^n' \delta\mathbf{f}^b - (2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \\ & \mathbf{v}^n - (2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n) \times \delta\mathbf{v}^n + \delta\mathbf{g}^n \end{aligned} \quad (23)$$

小失准角情况下,将式(5)代入上式得

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{v}}^n = & \mathbf{f}^n \times \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{C}_b^n' \delta\mathbf{f}^b - (2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n - \\ & (2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n) \times \delta\mathbf{v}^n + \delta\mathbf{g}^n \end{aligned} \quad (24)$$

1.4 SINS静基座初始对准方程

静基座状态下SINS的对准过程中,通常假定当地位置已知且固定不变,可以不考虑位置误差的影响,即 $\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \mathbf{0}$, $\delta\mathbf{g}^n = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}^n = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \mathbf{0}$,则SINS大失准角情况下初始对准的非线性方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{C}_\omega^{-1} ((\mathbf{I} - \mathbf{C}_n^n') \boldsymbol{\omega}_m^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n - \mathbf{C}_b^n' \delta\boldsymbol{\omega}_b^b) \\ \delta\dot{\mathbf{v}}^n = (\mathbf{C}_n^n' - \mathbf{I}) \mathbf{f}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \\ \quad \delta\mathbf{v}^n + \mathbf{C}_b^n' \delta\mathbf{f}^b \end{cases} \quad (25)$$

大方位失准角情况下SINS初始对准方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_n^n') \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n - \mathbf{C}_b^n' \delta\boldsymbol{\omega}_b^b \\ \delta\dot{\mathbf{v}}^n = (\mathbf{C}_n^n' - \mathbf{I}) \mathbf{f}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \delta\mathbf{v}^n + \\ \quad \mathbf{C}_b^n' \delta\mathbf{f}^b \end{cases} \quad (26)$$

小失准角情况下SINS初始对准方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n - \mathbf{C}_b^n' \delta\boldsymbol{\omega}_b^b \\ \delta\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{f}^n \times \boldsymbol{\Phi} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \delta\mathbf{v}^n + \mathbf{C}_b^n' \delta\mathbf{f}^b \end{cases} \quad (27)$$

假设 $\delta\boldsymbol{\omega}_b^b$ 包括陀螺零漂 $\boldsymbol{\varepsilon}^b$ 和陀螺噪声 $\boldsymbol{\omega}_g^b$,

δf^b 包括加速度计零偏 ∇^b 和加速度计噪声 ω_a^b . 为了降低滤波过程的计算量和减小滤波发散的可能性, 采用未将惯性传感器误差纳入滤波模型的降阶滤波器, 即取状态向量为 $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\alpha}^T \quad (\delta \mathbf{v}^n)^T)^T$, 噪声向量为 $\boldsymbol{\omega} = ((\omega_g^b)^T \quad (\omega_a^b)^T)^T$, 量测量为速度误差 $\delta \mathbf{v}^n$, 则系统状态方程和量测方程可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1})\boldsymbol{\omega}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (28)$$

其中非线性函数 $\mathbf{f}(\cdot)$ 、 $\mathbf{g}(\cdot)$ 的具体形式根据失准角的大小情况从式 (25) ~ (27) 中解算, 量测矩阵 $\mathbf{H}_k = (\mathbf{0}_{3 \times 3} \quad \mathbf{I}_{3 \times 3})$, $\mathbf{v}_k$ 为量测噪声.

2 EKF 算法和 UKF 算法

EKF 与 UKF 使用的都是标准 Kalman 滤波器的框架, 是回归最小均方误差估计器, 但二者实现原理不同. 本文研究在系统噪声和量测噪声均为加性噪声并且量测方程为线性方程时, SINS 的非线性误差模型. 当量测方程是线性方程时, EKF 和 UKF 的滤波递推过程都可得到进一步的简化, 从而有利于降低滤波计算量和减小滤波发散可能性.

2.1 EKF 算法

与标准 Kalman 滤波一样, EKF 也采用“预测-更新”的算法框架, 针对式 (28) 所描述的非线性系统, 其标准递推过程如下.

预测:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}^T(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \\ &\quad \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{g}^T(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \end{aligned}$$

更新:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} &= \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k}^{-1} \\ \mathbf{v}_k &= \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k} \mathbf{K}_k^T \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$ 是非线性函数 $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$ 的 Jacobian 矩阵, 其形式如下:

$$(\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}))_{i,j} = \left. \frac{\partial f_i(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}_j} \right|_{\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}}$$

以上是基于非线性离散系统模型进行的 EKF 递推过程描述, 即采用先离散化后线性化的

推导方法. 在实际程序中, 考虑到系统离散化以及离散化系数矩阵计算的方便, 采用先线性化后离散化的推导方法. 在 Kalman 滤波算法的递推过程中, 系统均方误差矩阵 $\mathbf{P}_k$ 和 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 要求是非负定的. 而实际滤波过程中, 估计的均方误差矩阵可能会逐渐失去非负定性甚至失去对称性, 导致滤波发散, 因此需要在数值稳定性方面对标准递推过程做进一步的改进.

2.2 UKF 算法

当系统噪声和量测噪声均为加性噪声时, 为了降低滤波计算量, 无需对其进行状态增广处理^[14], 针对式 (28) 所描述的非线性系统, 采用对称采样点策略, 简化的 UKF 递推过程如下.

构造采样点:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_{0,k-1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{\chi}_{i,k-1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \sqrt{(n+\lambda)\mathbf{P}_{k-1}}; i = 1, 2, \dots, n \\ \boldsymbol{\chi}_{i,k-1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \sqrt{(n+\lambda)\mathbf{P}_{k-1}}; i = n+1, \dots, 2n \end{aligned}$$

预测:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\chi}}_{k|k-1} &= \mathbf{f}(\boldsymbol{\chi}_{k-1}) \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \hat{\boldsymbol{\chi}}_{i,k|k-1} \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\hat{\boldsymbol{\chi}}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k|k-1})(\hat{\boldsymbol{\chi}}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{i,k|k-1})^T + \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{g}^T(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \end{aligned}$$

更新同 EKF 算法的更新.

相应的权重计算如下:

$$\begin{aligned} W_0^{(m)} &= \lambda/(n+\lambda) \\ W_0^{(c)} &= \lambda/(n+\lambda) + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W_i^{(m)} &= W_i^{(c)} = 1/[2(n+\lambda)]; \\ &\quad i = 1, 2, \dots, 2n \end{aligned}$$

其中 n 是状态向量 $\mathbf{x}_k$ 的维数; $\lambda = \alpha^2(n+\kappa) - n$ 是一个比例参数; α 控制采样点的分布状态, 决定采样点与均值的离散程度, 通常取为 0 到 1 之间很小的正值, 如 1×10^{-3} ; κ 是一个比例因子, 在状态估计时通常取为 0; β 也是一个比例因子, 在状态满足 Gauss 分布时通常取为 2; $\sqrt{\mathbf{P}}$ 表示矩阵 $\mathbf{P}$ 的平方根, 满足矩阵方程 $\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$, $\mathbf{A}$ 可以通过奇异值分解、Cholesky 分解、特征根分解等方法求得.

由以上递推过程可知, UKF 与 EKF 一样, 都采用标准 Kalman 滤波器“预测-更新”的算法框架. 当系统状态方程为非线性方程而量测方程为

线性方程时,在预测阶段,EKF 通过计算Jacobian 矩阵进行状态及其均方误差预测,而 UKF 通过使用 UT 变换进行状态及其均方误差预测,但二者在更新阶段的滤波步骤与标准 Kalman 滤波算法完全相同. UKF 不对非线性系统方程和量测方程进行线性化,而是对状态向量的概率密度函数进行近似,因此不依赖于非线性系统方程的具体形式,算法相对独立,适用于任何形式的非线性模型.

3 仿真实验

假设 SINS 所处位置的地理纬度为 45° ,选取

较低精度陀螺的对应值,陀螺仪的常值漂移为 $0.1^{\circ}/\text{h}$,随机漂移为 $0.01^{\circ}/\text{h}$;加速度计的常值偏差为 $100\times 10^{-6}g$,随机偏差为 $50\times 10^{-6}g$. 选择 3 种比较典型的初始失准角,即大失准角情况 $\alpha(0) = (10^{\circ} \ 20^{\circ} \ 60^{\circ})^T$,大方位失准角情况 $\alpha(0) = (1^{\circ} \ 2^{\circ} \ 60^{\circ})^T$,小失准角情况 $\alpha(0) = (10' \ 20' \ 60')^T$. 为了比较初始对准算法的性能,在相同条件下分别将 EKF 算法和 UKF 算法用于精对准过程,3 种情况下 Monte Carlo 仿真得到的失准角估计误差如图 1 所示.

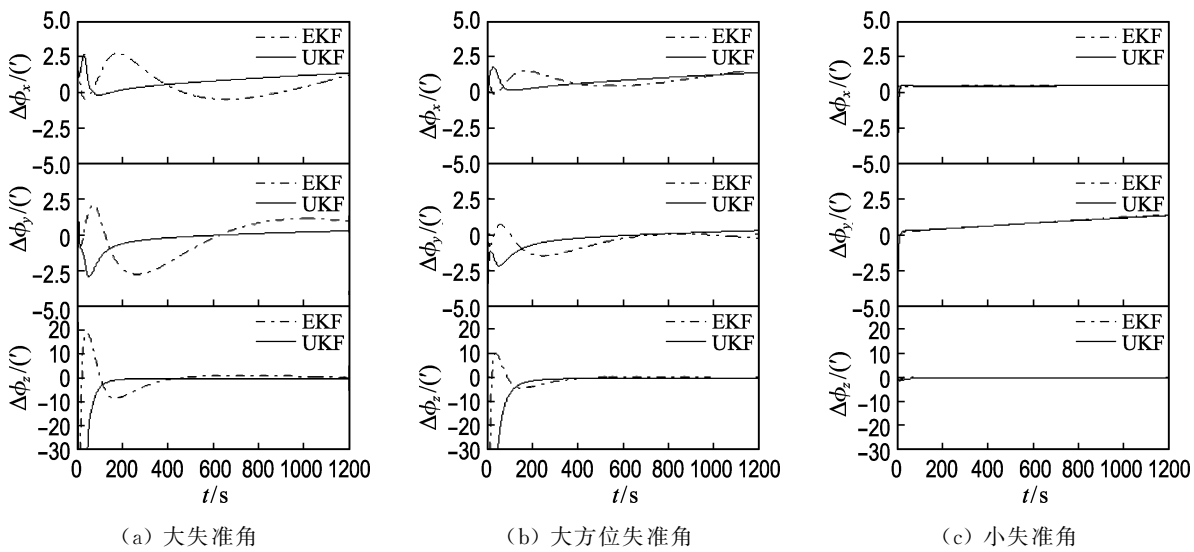


图 1 不同失准角估计误差

Fig. 1 Estimation errors for different misalignment angles

仿真结果表明,不同失准角情况下,采用本文给出的非线性初始对准模型,EKF 和 UKF 算法都能满足对准要求,且初始失准角越小,对准时间越短,对准精度越高. 大失准角、大方位失准角情况下,UKF 算法较 EKF 算法具有对准时间更快、对准精度更高和适用范围更广的优点,但 UKF 算法的计算量比 EKF 大;而在小失准角情况下,由于系统的线性化误差小,二者的对准时间和对准精度基本相同.

为了更清楚地比较上述两种方法的对准效果,相同条件下分别进行 100 次 Monte Carlo 仿真. 表 1 中给出了对准结束前 100 s 内各失准角

估计均方根误差对时间的平均值,图 2 给出了不同失准角下估计均方根误差的分布情况.

表 1 失准角的估计均方根误差稳态值
Tab. 1 Steady-state RMSE of estimated misalignment angles

失准角情况	算法	$e_{\text{rms}}/(^{\circ})$		
		$\Delta\phi_x$	$\Delta\phi_y$	$\Delta\phi_z$
大失准角	EKF	1.447	0.364	19.475
	UKF	0.688	0.092	16.403
大方位失准角	EKF	0.985	0.554	24.817
	UKF	0.686	0.098	20.639
小失准角	EKF	0.387	0.646	20.060
	UKF	0.382	0.608	19.970

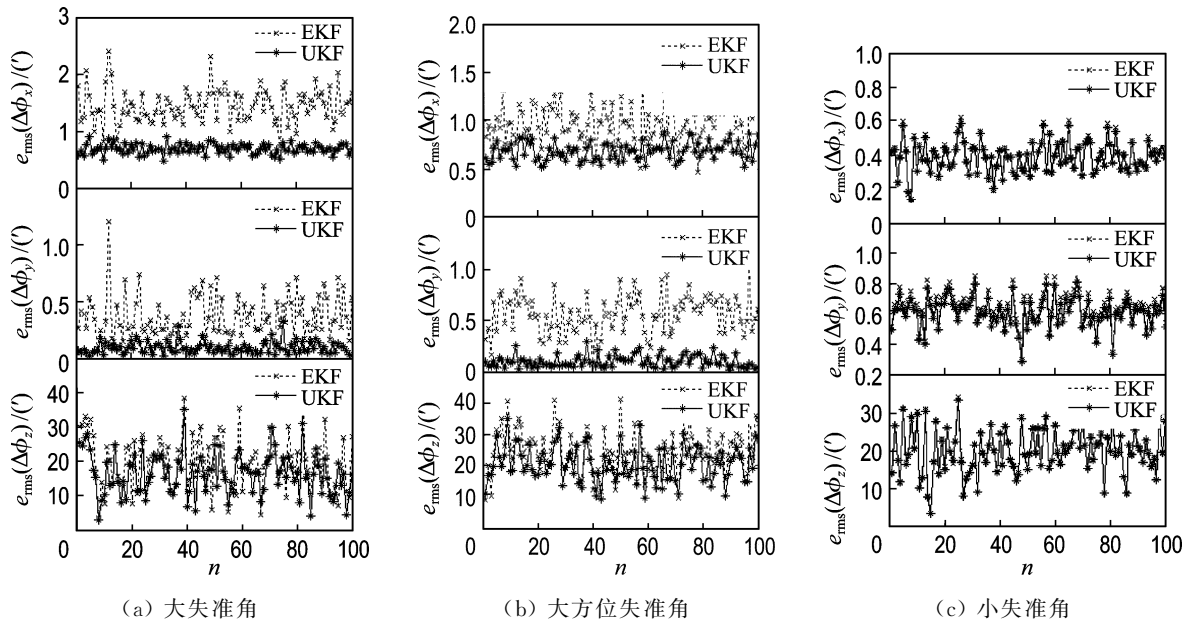


图 2 失准角的估计均方根误差分布
Fig.2 e_{rms} distribution for misalignment angles

4 结 语

本文基于欧拉平台误差角的概念建立了 SINS 在大失准角、大方位失准角与小失准角情况下的初始对准误差模型. 在量测方程为线性时, 推导了简化的 EKF 算法和 UKF 算法, 分析了不同失准角情况下初始对准过程的异同. 静基座状态下的 Monte Carlo 仿真结果, 验证了基于 3 种失准角所建立的初始对准误差模型的准确性和两种非线性初始对准算法的有效性, 并对两种滤波算法的性能做了定性和定量的评估.

实际上, 没有一种滤波算法可以被证明明显地优于其他滤波算法. 选择哪一种滤波算法或者哪些滤波算法的组合, 最终取决于实际的应用场合和应用目标. 在系统线性误差不大, 且系统的线性化模型比较容易获得的情况下, 比较适合采用 EKF 算法; 而在系统线性误差比较大的情况下, EKF 已无法保证良好的估计性能, 此时适合采用 UKF 算法. 采用 EKF 算法和 UKF 算法的主要目的是为了迅速辨识失准角大致范围并降低初始对准误差, 对准过程中当失准角满足小角度假设时, 进一步切换到经典小失准角 Kalman 滤波方法, 能在提高对准精度的同时进一步降低计算量, 从而获得更为准确的初始姿态矩阵.

参考文献：

[1] JIANG Y F. Error analysis of analytic coarse alignment methods [J]. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System**, 1998, **34**(1):334-337.

[2] 秦永元, 张洪钺, 汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998.
QIN Yong-yuan, ZHANG Hong-yue, WANG Shu-hua. **Kalman Filter and Integrated Navigation Principle** [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1998. (in Chinese)

[3] 魏春岭, 张洪钺, 郝曙光. 捷联惯导系统大方位失准角下的非线性对准[J]. 航天控制, 2003(4):25-34.
WEI Chun-ling, ZHANG Hong-yue, HAO Shu-guang. SINS nonlinear alignment with large azimuth misalignment angles [J]. **Aerospace Control**, 2003(4):25-34. (in Chinese)

[4] Kim K, Park C G. Non-symmetric unscented transformation with application to in-flight alignment [J]. **International Journal of Control, Automation and Systems**, 2010, **8**(4):776-781.

[5] Bucy R S, Senne K D. Digital synthesis of non-linear filters [J]. **Automatica**, 1971, **7**(3):287-298.

[6] Sunahara Y. An approximate method of state estimation for nonlinear dynamical systems [J]. **Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic**

- Engineering**, 1970, **92**(2):385-393.
- [7] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A new method for the nonlinear transformation of means and covariance in filters and estimators [J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2000, **45**(3):477-482.
- [8] 潘泉, 杨峰, 叶亮, 等. 一类非线性滤波器——UKF 综述[J]. 控制与决策, 2005, **20**(5): 481-489. PAN Quan, YANG Feng, YE Liang, *et al.* Survey of a kind of nonlinear filters — UKF [J]. **Control and Decision**, 2005, **20**(5):481-489. (in Chinese)
- [9] Romanenko A, Castro J. The unscented filter as an alternative to the EKF for nonlinear state estimation: a simulation case study [J]. **Computers and Chemical Engineering**, 2004, **28**(3):347-355.
- [10] Kolás S, Foss B A, Schei T S. Constrained nonlinear state estimation based on the UKF approach [J]. **Computers and Chemical Engineering**, 2009, **33**(8): 1386-1401.
- [11] 严恭敏, 严卫生, 徐德民. 简化 UKF 滤波在 SINS 大失准角初始对准中的应用[J]. 中国惯性技术学报, 2008, **16**(3):253-264.
- YAN Gong-min, YAN Wei-sheng, XU De-min. Application of simplified UKF in SINS initial alignment for large misalignment angles [J]. **Journal of Chinese Inertial Technology**, 2008, **16**(3):253-264. (in Chinese)
- [12] Doucet A, De Freitas N, Gordon N. **Sequential Monte Carlo Methods in Practice** [M]. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [13] 秦永元. 惯性导航[M]. 北京: 科学出版社, 2006. QIN Yong-yuan. **Inertial Navigation** [M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese)
- [14] 刘也, 余安喜, 朱炬波, 等. 加性噪声条件下的 UKF 算法 [J]. 中国科学: 技术科学, 2010, **40**(11):1286-1299.
- LIU Ye, YU An-xi, ZHU Ju-bo, *et al.* Unscented Kalman filtering in the additive noise case [J]. **Science China-Technological Sciences**, 2010, **40**(11):1286-1299. (in Chinese)

SINS nonlinear initial alignment methods for large misalignment angles based on EPEA

ZHAO Hong-yu^{*1}, WANG Zhe-long^{1,2}, JIANG Ming¹, GONG Shao-qi³, SHANG Hong⁴

- (1. School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. State Key Laboratory of Robotics, Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 100080, China;
3. SUPCON Group Co., Ltd., Hangzhou 310052, China;
4. National Earthquake Response Support Service, Beijing 100049, China)

Abstract: Euler platform error angles (EPEA) are adopted to describe the misalignment angles from the theoretical navigation coordinate system to the computational navigation coordinate system, and the strapdown inertial navigation system (SINS) nonlinear error model is derived for initial alignment at large initial misalignment angles. The simplified extended Kalman filter (EKF) and unscented Kalman filter (UKF) algorithms with damp solution are presented when both process noise and measurement noise are additive and the measurement equation is linear, and a comparison is made between the filtering processes for different misalignment angles. The Monte Carlo results from the stationary simulation show that both EKF and UKF algorithms can obtain satisfactory alignment accuracy under large and large azimuth misalignment angles. But UKF is superior in alignment time, alignment precision and application scope in most cases except for the case of small misalignment angles, and in such a situation they have the same alignment performance due to the fact that the linearization error of SINS becomes smaller.

Key words: strapdown inertial navigation system (SINS); large misalignment angle; nonlinear initial alignment; extended Kalman filter; unscented Kalman filter