第52卷第5期 大连理工大学学报 Vol.52, No.5
2012年9月 Journal of Dalian University of Technology Sept. 2012

文章编号：1000-8608(2012)05-0776-05

利用博弈确定分配因子的财富分配模型

潘秋惠*[1,2]， 宋悦铭[1,2]， 俞思韵[1,2]， 王 挺[1,2]， 贺明峰[1,2]

（1.大连理工大学 创新实验学院，辽宁 大连 116024；
2.大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024）

摘要：在传统财富分配模型中引入博弈游戏，以此确定财富分配规则，分别讨论了不含保守因子和包含保守因子情形下，系统的财富分布情况.所得结果表明，在不含保守因子时，对群体而言，系统中不同的客观影响因子对系统的财富分布趋势没有明显影响；但对个人而言，其采用的交易策略与外在的客观影响因子越接近，越有可能获取更多的财富.在包含保守因子时，个体的策略与外在客观影响因子的相近程度决定了财富分布的人员构成，但保守因子的大小很大程度上影响了财富的分布趋势，具体表现为保守因子越小，财富的分布越集中.

关键词：财富分配；蒙特卡罗；分配因子；保守因子；博弈

中图分类号：O242.1 **文献标志码：**A

0 引 言

只要一个群体中有两个或以上的人，那么财富就存在分配问题.人类社会中有关财富分配的问题涉及一个地区的政治、经济、文化等多个方面，成为国家与社会公众普遍关注的问题.当前财富分配问题的研究也较为广泛.

Dragulescu 等从物理学的观点出发，在分配因子固定的情况下，建立了基于 Monte Carlo 规则的动能财富交换模型[1].Patriarca 等也在分配因子固定的情况下，通过保守因子概念，对参与者进行分类，分别对同类和异类现象给出了具体的规则，建立了基于动能交换机制的财富交换模型[2].

另一类关于分配因子的确定是采用随机的方式，Chakraborti 等在动能交换机制的基础上，在分配因子随机的情况下，分析了保守因子对参与者最终所得财富的影响[3].Chatterjee 等在总人数、总财富量固定的条件下，利用随机分配因子，对每对进行财富交换的参与者加入保守因子，并在每次交易完成后随机改变保守因子大小，研究保守因子对财富分配的影响[4].Gupta 提出了一般的交换机制，在分配因子随机的情况下，建立了从两人参与到多人参与，再到带保守因子的财富交换模型[5].Ding 等讨论了多人参与时，个别人具有优先性条件下的财富分布问题[6].Chatterjee 等在分配因子随机分布的前提下，讨论了保守因子关于不同的函数，在不同的机制下，对财富分配的影响[7].

Cherkashin 等提出了一种基于博弈的整体财富分配模型[8]，该模型中每位参与者先将个人财富按个人策略押到事件 A 上，A 发生的概率为 q，若 A 发生，则将押在 A 上的财富按给定方式重新分配，若 A 未发生，将其余财富重新分配.本文将基于博弈的整体财富分配方式应用到两人博弈时的财富分配，从而确定相应的分配因子，以此为基础讨论不含保守因子[1]及含保守因子[3]时的财富分配问题.

收稿日期：2011-04-13； **修回日期：**2012-07-24.
作者简介：潘秋惠*(1981-)，女，博士，讲师，E-mail：qhpan@dlut.edu.cn.

1　模　型

设有 N 个人，在 t 时刻，任选两人 i、j. 首先进行博弈游戏[8]，二人按各自的策略分别将自己拥有的财富量 $\omega_i(t-1)$ 和 $\omega_j(t-1)$ 按一定比例押在 a、b 两种结果上，记 S_i、S_j 为个体 i、j 的策略，即 i 个体押 a 的比例为 S_i，押 b 的比例为 $1-S_i$，j 个体押 a、b 的比例分别为 S_j 和 $1-S_j$. 该赌局最终发生的结果为 a 的概率是 q，发生的结果为 b 的概率是 $1-q$. 称 q 为客观影响因子，其一定程度上反映了外在环境对系统的影响作用. 二人在博弈结束后根据结果重新进行财富分配.

若最终结果为 a，则

$$\omega_i(t)=\frac{\omega_i(t-1)S_i}{\omega_i(t-1)S_i+\omega_j(t-1)S_j}\times[\omega_i(t-1)+\omega_j(t-1)];$$

$$\omega_j(t)=\frac{\omega_j(t-1)S_j}{\omega_i(t-1)S_i+\omega_j(t-1)S_j}\times[\omega_i(t-1)+\omega_j(t-1)]\tag{1}$$

同理，若最终结果为 b，则

$$\omega_i(t)=\frac{\omega_i(t-1)(1-S_i)}{\omega_i(t-1)(1-S_i)+\omega_j(t-1)(1-S_j)}\times[\omega_i(t-1)+\omega_j(t-1)];$$

$$\omega_j(t)=\frac{\omega_j(t-1)(1-S_j)}{\omega_i(t-1)(1-S_i)+\omega_j(t-1)(1-S_j)}\times[\omega_i(t-1)+\omega_j(t-1)]\tag{2}$$

即

$$\omega_l(t)=\begin{cases}\dfrac{\omega_l(t-1)S_l}{\omega_i(t-1)S_i+\omega_j(t-1)S_j}\times[\omega_i(t-1)+\omega_j(t-1)]; & \text{概率为 } q, l=i,j\\ \dfrac{\omega_l(t-1)(1-S_l)}{\omega_i(t-1)(1-S_i)+\omega_j(t-1)(1-S_j)}\times[\omega_i(t-1)+\omega_j(t-1)]; & \text{概率为 } 1-q,\ l=i,j\end{cases}\tag{3}$$

在此模型基础上，又建立了引入保守因子 λ 的财富交换模型，即二人在博弈中，并未拿出全部财产，而是按比例保留部分财产[3].

同理可得到 i、j 个体 t 时刻的财富值

$$\omega_l(t)=\begin{cases}\{[\omega_i(t-1)(1-\lambda_i)+\omega_j(t-1)\times(1-\lambda_j)]\omega_l(t-1)(1-\lambda_l)S_l\}/[\omega_i(t-1)(1-\lambda_i)S_i+\omega_j(t-1)(1-\lambda_j)S_j]+\omega_l(t-1)\lambda_l; & \text{概率为 } q,\ l=i,j\\ \{[\omega_i(t-1)(1-\lambda_i)+\omega_j(t-1)\times(1-\lambda_j)]\omega_l(t-1)(1-\lambda_l)(1-S_l)\}/[\omega_i(t-1)(1-\lambda_i)(1-S_i)+\omega_j(t-1)(1-\lambda_j)(1-S_j)]+\omega_l(t-1)\lambda_l; & \text{概率为 } 1-q,\ l=i,j\end{cases}\tag{4}$$

2　结果与分析

2.1　不含保守因子的财富分配

取 $N=5\ 000$，$\omega_i(0)=1$，$S_i=\dfrac{i}{N+1}$，$i=1,2,\cdots,N$. 每次任选两个个体进行博弈，选 2 500 次博弈为一个时间步，迭代 2 000 时间步.

在不含保守因子时，分别取 $q=0.2$、0.5、0.7. 迭代停止时，相应的财富分布结果见图 1（R 为相应财富值人数占总人数的比例）.

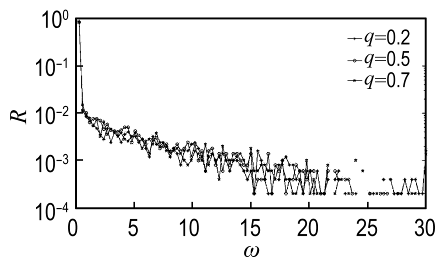

图 1　$t=2\ 000$ 时财富量的分布

Fig. 1　Wealth distribution at $t=2\ 000$

从图 1 可见，$q=0.2$、0.5、0.7 三种情况下，财富量的分布趋势非常相近，表现为占有财富量多的人数很少，说明在现在的交易规则中，大部分人拥有很少的财富，很少的人拥有多数财富，呈两极化状态，这与文献[1]的结论相似. 说明就总体财富分布而言，基于博弈的财富交换没有导致新的财富分布规律. 这也是这种财富分布规律普遍

性的一个体现.

为了讨论博弈对个体财富的影响，下面考察给定 q 值时，具有不同策略 S_i 的个体的财富分布情况，见图2.

如图2(b)显示，当 $q=0.5$，个体策略 S_i 趋于0.5时，对应的群体在交易中可获得更多的财富，个体策略 S_i 距离0.5较远的群体在交易中失去较多的财富；同样，图2(a)、(c)中峰值分别位于 $S_i=0.2$ 和 $S_i=0.7$ 附近.即财富相对集中于具有与 q 相趋近的策略的人群中.

综合图1和2可知，当 q 取不同值时，尽管整体财富的分布趋势基本相同，但群体中拥有财富量多少的人员构成却是不同的，这是博弈作用的体现.

2.2 包含保守因子 λ 的财富分配

在包含保守因子的模型下，仍取 $q=0.2$、0.5、0.7，$\lambda_i=\lambda(i=1,2,\cdots,N)$.取 $\lambda=0.5$，此时不同策略的个体的财富分布见图3.

由图3可以看出，在 $\lambda=0.5$ 时，取不同 q 值，财富量随 S_i 变化的分布与图2的财富分布趋势相似.说明保守因子没有影响策略值越接近 q 值，财富量越多这个性质.

下面讨论保守因子 λ 对财富分布的影响，取 $q=0.5$，λ 不同时，财富分布如图4所示.

从图4可见，财富分布的集散程度与保守因子有关，λ 越小，财富的分布相对越集中，同等财富值对应横轴上的跨度越小；而当 λ 较大时，跨度较大，即财富分布在较多的个体手中.且随着 λ 的增加，个体财富的最大值变小.在迭代终止时，对给定的 λ，记个体的最大财富量为 $\omega_{\max}(\lambda)$，即 $\omega_{\max}(\lambda)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\omega_i$，$\omega_{\max}(\lambda)$ 的变化趋势见图5.

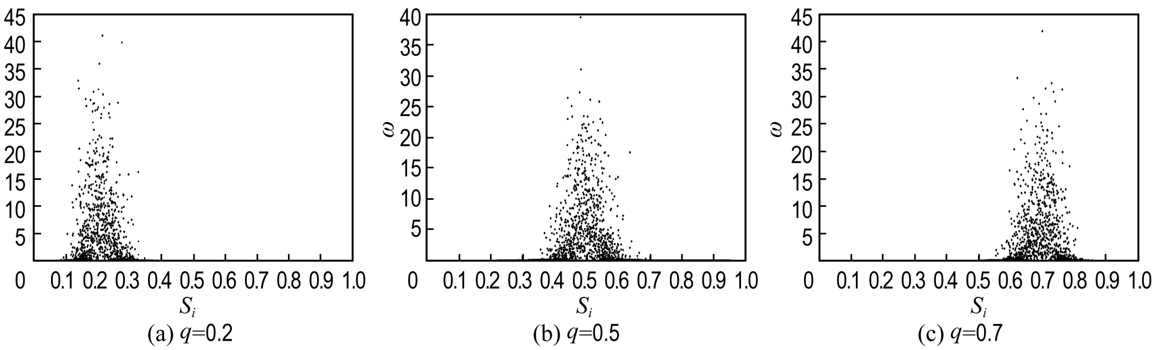

图2 不同策略的个体的财富分布

Fig. 2 Wealth distribution of agents with different strategies

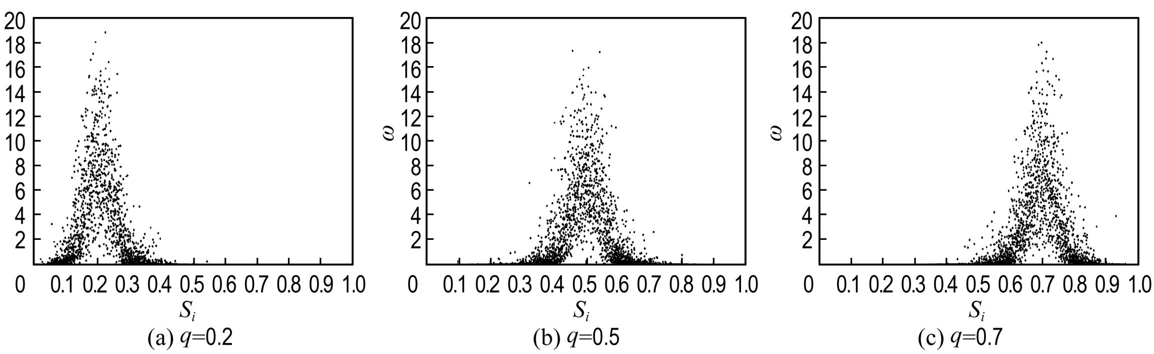

图3 $\lambda=0.5$ 时不同策略的个体的财富分布

Fig. 3 Wealth distribution of agents with different strategies while $\lambda=0.5$

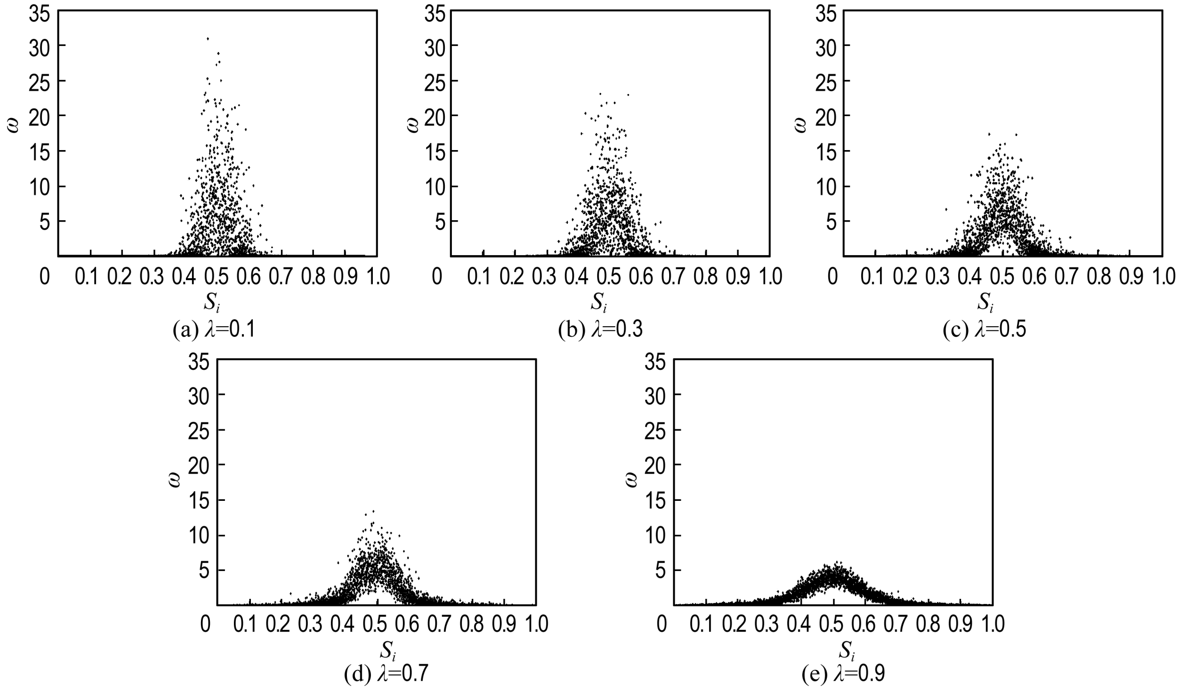

图 4　$q=0.5$ 时不同策略的个体的财富分布

Fig. 4　Wealth distribution of agents with different strategies while $q=0.5$

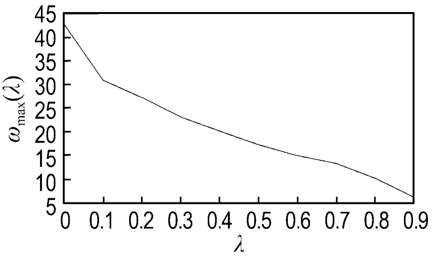

图 5　$\omega_{\max}(\lambda)$随 λ 的变化趋势

Fig. 5　$\omega_{\max}(\lambda)$ as the function of λ

从图 5 可见，在迭代终止时，随着给定 λ 的不断增大，$\omega_{\max}(\lambda)$ 不断减小. 说明当保守因子增大时，个体财富的最大值变小. 即保守程度的增加使参与交易的财富值份额减少，从而财富在个体之间的交易量减少，这有利于财富的平均分布，不利于财富在少数个体中聚集，这是 $\omega_{\max}(\lambda)$ 减小的一个原因.

对给定的 λ，将个体财富量从大到小累加，记累加值占总财富量 20% 时的人数为 $n(\lambda)$，$n(\lambda)$ 随 λ 的变化趋势见图 6.

从图 6 可见，随着 λ 的不断增大，$n(\lambda)$ 的值不断增大. 说明当保守因子增大时，拥有很多财富的人数在减少，表明随着 λ 增大财富分配相对更加分散. 从 $n(\lambda)$ 的增长方式可以看出，当 λ 从较小值开始增加时，$n(\lambda)$ 的增加是缓慢的，说明此时 λ 增加对财富聚集程度的减少效果是不明显的，而 λ 从较大值开始增加时，$n(\lambda)$ 增加很快，说明此时 λ 增加，可有效防止财富的过度聚集.

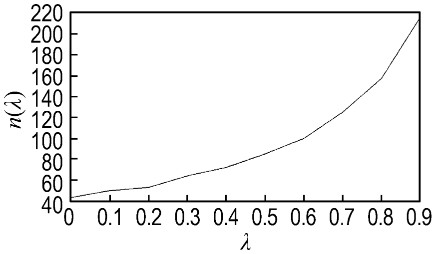

图 6　$n(\lambda)$随 λ 的变化趋势

Fig. 6　$n(\lambda)$ as the function of λ

3　结　论

本文在封闭系统财富交换模型基础上通过引入博弈游戏确定分配因子，分别讨论不含保守因子和包含保守因子两种情形下系统的财富分配.

不含保守因子时，尽管整体财富的分布趋势基本相同，但群体中拥有财富量多少的人员构成

却是不同的，这是博弈作用的体现.

包含保守因子时，财富分布的集散程度与保守因子有关，且保守因子越小，财富的分布相对越集中，随着保守因子增大财富分配相对更加分散. 这主要是由于当保守因子增大时，个人财富的最大值变小. 即保守程度的增加使参与交易的财富值份额减少，从而财富在个体之间的交易量减少，这有利于财富的平均分布，不利于财富在少数个体中聚集.

参考文献：

[1] Dragulescu A, Yakovenkoa V M. Statistical mechanics of money [J]. **The European Physical Journal B**, 2000, **17**(4):723-729.

[2] Patriarca M, Heinsalu E, Chakraborti A. Basic kinetic wealth-exchange models: common features and open problems [J]. **The European Physical Journal B**, 2010, **73**(1):145-153.

[3] Chakraborti A, Chakrabarti B K. Statistical mechanics of money: How saving propensity affects its distribution [J]. **The European Physical Journal B**, 2000, **17**(1):167-170.

[4] Chatterjee A, Chakrabarti B K, Manna S S. Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity [J]. **Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications**, 2004, **335**(1-2):155-163.

[5] Gupta A K. Relaxation in the wealth exchange models [J]. **Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications**, 2008, **387**(27):6819-6824.

[6] DING Ning, WANG You-gus, XU Jun, *et al*. Power-law distributions in circulating money: Effect of preferential behavior [J]. **International Journal of Modern Physics B**, 2004, **18**(17-19):2725-2729.

[7] Chatterjee A, Sen P. Agent dynamics in kinetic models of wealth exchange [J]. **Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics**, 2010, **82**(5):056117.

[8] Cherkashin D, Farmer J D, Lloyd S. The reality game [J]. **Journal of Economic Dynamics and Control**, 2009, **33**(5):1091-1105.

Wealth distribution model with distribution factor introduced by game

PAN Qiu-hui*[1,2], SONG Yue-ming[1,2], YU Si-yun[1,2], WANG Ting[1,2], HE Ming-feng[1,2]

(1. School of Innovation Experiment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A game is introduced into the traditional wealth distribution model for establishing the rules of wealth distribution. The wealth distribution is discussed in both situations of with and without the saving propensity. The experimental results show that when there are no saving propensities, the objective impact factors have no obvious effect on the trend of wealth distribution for the entire group, while the closer the trading strategy is to the objective impact factor, the more amount of wealth can be obtained for the individual agent. When there are saving propensities, the agent-construction of wealth distribution is determined by the similarity between individual strategy and objective impact factors. The value of saving propensity has obvious effect on the trend of wealth distribution, that is, the smaller the saving propensity is, the more concentrated the wealth distribution is.

Key words: wealth distribution; Monte Carlo; distribution factor; saving propensity; game