

基于非结构化网格有限体积的 LBM

宿晓辉^{*1}, 刘艳¹, 张凯琳¹, 赵镛², 王巍¹, 谢蓉¹, 赵广¹

(1. 大连理工大学 能源与动力学院, 辽宁 大连 116024;

2. Alfaisal 大学 机械工程学院, 沙特阿拉伯王国 利雅得 11533)

摘要: 提出了一种基于非结构化网格有限体积的 LBM. 采用 Cell-vertex 有限体积法离散控制方程. 该方法在时间上采用伪、实二时间步, 其中伪时间步采用向前差分, 实时间步采用二阶向后差分方法; 空间上采用 edge-based 通量计算方法, 采用高阶 TVD 格式计算控制体边界通量. 离散后的控制方程采用隐式迭代, 控制变量采用五层二阶 Runge-Kutta 方法求解. 二维同心圆环内圆柱间 Couette 流与顶盖驱动方腔流的数值结果显示该方法为一种有效求解不规则边界流体动力特性的实用工具.

关键词: LBM; 非结构化网格; 有限体积法

中图分类号: O351.2 **文献标志码:** A

0 引言

格子玻尔兹曼方法 (lattice Boltzmann method, 简称 LBM) 是 20 世纪末新发展起来的一种流体力学计算方法. 研究表明^[1,2], LBM 是模拟复杂流体运动的有效手段和方法. 近来, 格子玻尔兹曼方程 (lattice Boltzmann equation, 简称 LBE) 模型逐步取代了原有的格子气方程 (lattice gas equation, 简称 LGE) 模型. Hardy 等在 1973 年与 1976 年发表的文章中第一次引入了 LBM 模型^[3,4], 称为 HPP. 在 LBM 中, 将计算域划分为直角正交格子, 研究变量落在格子节点上. 粒子沿着格子线运动, 在同一时间到达同一格子节点的多个粒子相互产生碰撞. 在格子节点上模拟的并不是格子气方程模型中的布尔粒子个数, 而是统计概念下的粒子分布函数. 分布函数的引入, 分布函数与流体介质密度、流速以及温度关系的明确建立了微观与宏观运动的桥梁, 使得微观的运动可以反映到宏观变量的变化上. 文献[5] 基于玻尔兹曼输运方程推导出了格子玻尔兹曼方程.

然而, 与目前比较成熟的 CFD 技术相比, LBM 存在一些弱点和缺陷, 其中最主要的缺陷之一就是 LBM 最初是建立在均一、规则的空间格

子基础上, 使得 LBM 只能局限于规则边界的流体问题, 不能处理复杂边界以及动边界问题.

随着非结构化有限体积 (unstructured finite volume) 法在 CFD 领域的成功应用, 越来越多的研究人员致力于用非结构化有限体积法离散求解 LBE, 将 LBM 应用于处理含有复杂边界及动边界的流体运动问题. 其难点有二: 一是有限体积法是将计算域划分成控制体, 在控制体上满足控制方程. 该方法研究的是控制体意义上变量的对流、碰撞, 而不是单个分子的对流、碰撞问题. 二是计算域边界的处理问题. 传统的 bounce-back 方法不适用于非结构化网格, 因为在非结构化网格边界处无法进行 bounce-back 操作. 1992 年 Nannelli 等^[6]开始着手研究如何将 Boltzmann 方法应用于非均匀网格. Succi 等^[1]首次借助有限体积法的概念提出了一种 LBE 的有限体积法 $k-\epsilon$ 湍流模型. He 等^[7]提出了任意非均匀网格的 LBM 模型. 但是上述非均匀网格 LBM 模型却是针对结构化计算网格的情况. Xi 等^[8]给出了双线性四边形单元的二维有限体积 LBE 模型, 提出了非结构化网格情况下的计算公式. Chen 等^[9]给出了基于非结构化三角形网格, 具有普遍性的二维有限体积 LBE 模型. 模型中采用 Cell-vertex 类控制体积, 移植了

相对完整的非结构化有限体积离散求解方法. 对二维同心圆环的模拟也给出了令人满意的结果. 文献[10,11]同样移植了非结构化有限体积离散求解方法, 采用和文献[9]相同的 Cell-vertex 类有限体积 LBE, 并讨论了 unstructured LBE 中的时间步与传统 LB 方法时间步的区别, 提出了二阶精度、适合高雷诺数紊流, 并允许较大时间步长的离散公式. Patil 等^[12]提出了 unstructured FVLBE 的高阶精度的 TVD 格式.

边界问题是 unstructured FVLBE 算法的另一个关键. 传统 LB 方法使用正方形格子, 格子网格线及其对角线方向是对流速度方向, 在边界处使用 bounce-back 方法物理概念明确. bounce-back 方法包含 bounce-back-on-node (BBN) 与 bounce-back-on-the-link (BBL). bounce-back 格式的结果可以模拟滑移边界和固壁边界. Noble 等^[13]提出了六角形格子(hexagonal lattice)固壁边界计算格式. 该方法也属于 bounce-back 方法. 然而, 应用非结构网格将使网格线方向与对流速度方向不一致. 在处理无结构网格边界问题时, bounce-back 方法将不再适用.

针对 unstructured FVLBE 算法的边界处理问题, 目前研究人员一般都采用文献[10]总结出的 3 种方法中的一种. 这 3 种方法分别为平衡法、镜像法和协体法. 其中平衡法最简单, 易操作, 在边界节点上的分布函数直接用平衡状态的分布函数来赋值, 但是该方法不能处理边界梯度情况. 镜像法是在边界处引入虚拟节点, 虚拟节点的分布函数值由边界节点与主映像点的分布函数值插值得到. 这样边界节点成为内节点, 由周围节点构成一个属于自己的控制体, 可以按照内节点来进行计算. 该方法可以处理边界处存在速度梯度的情况. 可是, 如果边界形状奇异, 将使边界节点的控制体出现褶皱, 导致计算失败. 最后一种方法为协体法, 在边界处形成半个控制体积, 控制体边界处的通量采用边界线(面)通量插值方法. 因为要计算通过边界线的通量, 该方法在操作上比前两种方法复杂. 但是, 该方法不仅适用于存在边界梯度的情况, 也适用于复杂边界形状的情况, 因而是目前最先进的方法.

Su 等发展了一种 edge-based 通量计算方法, 并成功地应用于可压缩/不可压缩流体运动模拟^[14~16]. 在该方法中, 通量的计算是沿着网格边进行的. 当所有边的通量计算完毕, 得到的通量将会

整合到每个控制体. 该方法采用二时间步: 真实时间步采用向后时间差分, 时间精度为二阶; 伪时间步采用向前差分. 空间离散采用 TVD 格式. 离散后的方程用五层二阶 Runge-Kutta 方法求解. 同时, 对通量余量采用 Taylor 展开, 引入隐式格式计算.

本文将 Su 等提出的非结构化有限体积方法应用到 LBM 的研究中, 推导基于非结构网格有限体积 LBM 的离散控制方程, 然后, 进行模型验证工作. 应用所得模型模拟圆柱间 Couette 流与顶盖驱动方腔流流体的流动工况, 并与解析解和其他模型的数值解进行对比.

1 控制方程及其离散

基于 single-relaxation-time (SRT) 的 Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) 模型的 LBE 控制方程可写为如下形式:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla f_i = -\frac{1}{\lambda}(f_i - g_i) \quad (1)$$

式中: f_i 为粒子在速度空间 i 方向上的密度分布函数; $\mathbf{e}_i$ 为粒子在 i 方向的速度矢量, $i = 0, 1, 2, \dots, m, m$ 为模型中速度方向数; g_i 为粒子在速度空间 i 方向上的玻尔兹曼分布函数; λ 为松弛时间; t 为时间变量. 对二维问题, 本文采用 $m = 8, \mathbf{e}_0 = (0 \ 0), \mathbf{e}_i = \left(\cos\left[\frac{(i-1)\pi}{2}\right] \ \sin\left[\frac{(i-1)\pi}{2}\right] \right)$ ($i = 1, 2, 3, 4$); $\mathbf{e}_i = \sqrt{2} \left(\cos\left[\frac{(i-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right] \ \sin\left[\frac{(i-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right] \right)$ ($i = 5, 6, 7, 8$). 玻尔兹曼分布函数 $g_i = w_i \rho \left[1 + \frac{3}{2}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2}|\mathbf{u}|^2 \right]$, 其中 $\rho = \sum_i f_i, \boldsymbol{\rho} \mathbf{u} = \sum_i f_i \mathbf{e}_i$, 分别表示宏观密度和动量, 权重系数 $w_0 = \frac{4}{9}, w_i = \frac{1}{9}$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $w_i = \frac{1}{36}$ ($i = 5, 6, 7, 8$).

下面以二维平面控制体(见图 1)为例, 描述本文的离散求解方法. 在本模型中, 控制体由围绕节点 P 的边中心点与相应的形心点连接而成. 在节点 P 的控制体内对控制方程进行积分, 得到

$$\iint_A \frac{\partial f_i}{\partial t} dA + \iint_A \mathbf{e}_i \cdot \nabla f_i dA = \iint_A -\frac{1}{\lambda}(f_i - g_i) dA \quad (2)$$

定义“ $\overline{\quad}$ ”为控制体面积平均量标识, 则方程(2)可写为

$$\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial t} A + \iint_A \mathbf{e}_i \cdot \nabla f_i dA = -\frac{1}{\lambda} (\bar{f}_i - \bar{g}_i) A \quad (3)$$

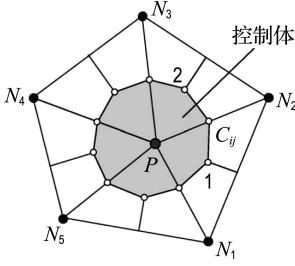


图1 非结构化网格有限体积 LBM 控制体示意图
Fig.1 The sketch of control volume in unstructured finite volume LBM

引入双时间步,并对对流项应用格林公式:

$$\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda} (\bar{f}_i - \bar{g}_i) - \frac{1}{A} \oint_L (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) f_i dL \quad (4)$$

式中: τ 为伪时间变量; t 为实时间变量; L 为控制体边界线段. 对 t 采用向后二阶差分, 通量采用隐式方法求解, 经相应变换得到

$$\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial \tau} = -\frac{1}{\lambda} (\bar{f}_i^{n+1} - \bar{g}_i^{n+1}) - \frac{1}{A} \sum_{j=1}^{n_{\text{cell}}} [(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \times f_i^{n+1}] dL - \frac{1.5 \bar{f}_i^{n-1} - 2.0 \bar{f}_i^n + 0.5 \bar{f}_i^{n-1}}{\Delta t} \quad (5)$$

式中: n_{cell} 为控制体边界线段数. 对 τ 采用向前一阶差分, 在 $\Delta \tau$ 伪时间步长内采用 m 次迭代, 求解 $n+1$ 时刻解, 如果将通量余量设为 R , 则方程(5)可写为

$$\frac{\bar{f}_i^{n-1, m-1} - \bar{f}_i^{n-1, m}}{\Delta \tau} = R^{n+1, m} \quad (6)$$

式中

$$R^{n+1, m} = -\frac{1}{\lambda} (\bar{f}_i^{n+1, m} - \bar{g}_i^{n+1, m}) - \frac{1}{A} \sum_{j=1}^{n_{\text{cell}}} [(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \times f_i^{n+1}] dL - \frac{1.5 \bar{f}_i^{n-1, m} - 2.0 \bar{f}_i^n + 0.5 \bar{f}_i^{n-1}}{\Delta t} \quad (7)$$

为了解决伪时间步长 $\Delta \tau$ 受方程(6)右端通量影响无法取得较大时间步长问题, 本文采用改右端通量为隐格式的方法, 并将通量应用 Taylor 公式展开, 得

$$\begin{aligned} \tilde{R}_P^{n+1, m+1} &= \tilde{R}_P^{n+1, m} + \frac{\partial \tilde{R}_P}{\partial (f_i)_P} \Delta (f_i)_P + \\ &\sum_{k=1}^{n_{\text{bseg}}} \frac{\partial \tilde{R}_P}{\partial (f_i)_k} \Delta (f_i)_k \end{aligned} \quad (8)$$

式中: n_{bseg} 为过节点 P 的线段数, 并且

$$\Delta (f_i)_P = (f_i)_P^{n+1, m+1} - (f_i)_P^{n+1, m} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{R}_P}{\partial (f_i)_P} = -\frac{1}{\lambda} - \frac{1.5}{\Delta t} \quad (10)$$

至此, 应用本方法离散, 对控制体的离散方程可写为

$$\frac{\bar{f}_i^{n+1, m+1} - \bar{f}_i^{n+1, m}}{\Delta \tau} = R^{n+1, m+1} \quad (11)$$

引入方程(8)、(9), 方程(11) 可写为

$$\begin{aligned} \frac{\Delta (f_i)_P}{\Delta \tau} &= R^{n+1, m} + \frac{\partial \tilde{R}_P}{\partial (f_i)_P} \Delta (f_i)_P + \\ &\sum_{k=1}^{n_{\text{bseg}}} \frac{\partial \tilde{R}_P}{\partial (f_i)_k} \Delta (f_i)_k \end{aligned} \quad (12)$$

忽略方程(12) 右端第三项, 离散方程写为

$$\frac{\Delta (f_i)_P}{\Delta \tau} - \frac{\partial \tilde{R}_P}{\partial (f_i)_P} \Delta (f_i)_P = R^{n+1, m} \quad (13)$$

代入方程(10), 并经过简化得

$$\left(\frac{\Delta \tau}{\lambda} + \frac{1.5 \Delta \tau + \Delta t}{\Delta t} \right) \frac{(f_i)_P}{\Delta \tau} = R^{n+1, m} \quad (14)$$

设 $\tilde{A} = \left(\frac{\Delta \tau}{\lambda} + \frac{1.5 \Delta \tau + \Delta t}{\Delta t} \right)$, 方程(14) 可写为

$$\bar{f}_i^{n+1, m+1} = \bar{f}_i^{n+1, m} + \frac{\Delta \tau}{\tilde{A}} R^{n+1, m} \quad (15)$$

从方程(15) 可以看出, 一旦伪时间步达到恒定, 即 $\bar{f}_i^{n+1, m}$ 对 τ 的导数为 0, 方程(15) 则转变成为 $R^{n+1, m} = 0$, 控制方程(2) 得以求解. 在本文中, 采用五层二阶精度的 Runge-Kutta 方法求解方程(15):

$$\begin{aligned} \bar{f}_i^{(0)} &= \bar{f}_i^m, & \bar{f}_i^{(1)} &= \bar{f}_i^{(0)} - \alpha_1 \frac{\Delta \tau}{\tilde{A}} R(\bar{f}_i^{(0)}), \\ \bar{f}_i^{(2)} &= \bar{f}_i^{(0)} - \alpha_2 \frac{\Delta \tau}{\tilde{A}} R(\bar{f}_i^{(1)}), \\ \bar{f}_i^{(3)} &= \bar{f}_i^{(0)} - \alpha_3 \frac{\Delta \tau}{\tilde{A}} R(\bar{f}_i^{(2)}), \\ \bar{f}_i^{(4)} &= \bar{f}_i^{(0)} - \alpha_4 \frac{\Delta \tau}{\tilde{A}} R(\bar{f}_i^{(3)}), \\ \bar{f}_i^{(5)} &= \bar{f}_i^{(0)} - \alpha_5 \frac{\Delta \tau}{\tilde{A}} R(\bar{f}_i^{(4)}), \\ \bar{f}_i^{m+1} &= \bar{f}_i^{(5)} \end{aligned} \quad (16)$$

式中: 五层 Runge-Kutta 系数为 $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{6},$

$$\alpha_3 = \frac{3}{8}, \alpha_4 = \frac{1}{2}, \alpha_5 = 1.$$

2 边界条件

在本文中, 采用协体法处理边界节点. 上述离

散得到的控制方程组不仅适用于内部节点,同样适用于边界节点. 仅仅边界上的通量需要额外计算. 如图 2 所示, 边界节点 B 的协体控制单元由 $BE_3C_2E_2C_1E_1$ 连线组成. 与内节点计算不同的是边界通量 Φ_1 和 Φ_2 . 本文中边界通量的计算采用下述公式:

$$\Phi_1 = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}_{E_1B} l_{E_1B} (0.75 \bar{f}_{iB} + 0.25 \bar{f}_{iB_1}) \quad (17)$$

$$\Phi_2 = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}_{BE_3} l_{BE_3} (0.75 \bar{f}_{iB} + 0.25 \bar{f}_{iB_r}) \quad (18)$$

与平衡法和镜像法相比, 协体法需要额外计算边界通量, 但是该方法能够解决平衡法无法解决的存在边界梯度问题, 又能够克服镜像法产生的边界网格折叠情形, 因此是目前最好的边界处理方法之一. 同时, 协体法还有着其他两种方法无法比拟的优点, 在单元中节点 B_i 、 B_r 和 B 的属性可以不相同, 这解决了节点处在两种不同属性交接点的计算. 本文下述验证算例中都要要求采用协体法处理边界节点.

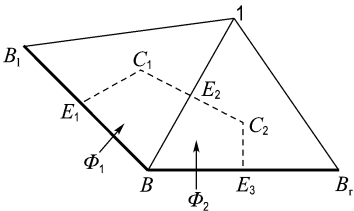


图 2 边界节点 B 的控制体单元示意图
Fig. 2 Construction of control volume element for boundary node B

3 模型评估

对推导得到的非结构化控制体 LBM 模型进行了验证, 验证采用圆柱间 Couette 流 (cylindrical-Couette flow (CCF)) 算例与顶盖驱动方腔流 (lid-driven cavity flow) 算例.

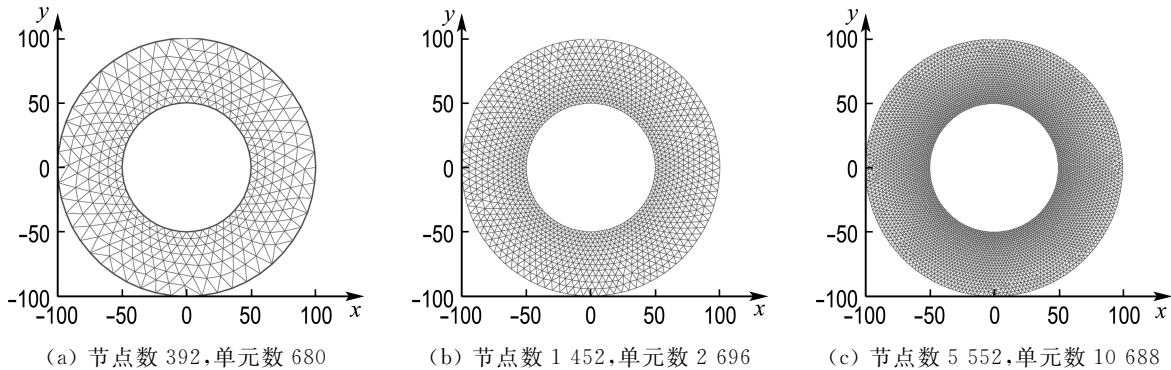


图 4 CCF 计算网格

Fig. 4 Calculation meshes for CCF

3.1 CCF 算例

二维同心圆环计算域存在内外圆边界(见图 3), 其中内圆半径 50 m, 外圆半径 100 m, 外圆以转速 0.000 5 rad/s 匀速转动, 带动计算域内流体运动. 如何选取松弛时间目前仍然是 LBM 应用的难点. 在本文中参考文献[17]算例, 给出松弛时间 $\lambda=0.1$ s. 对非结构化网格有限体积 LBM, 决定时间步长因素有二: 一是满足 $\Delta t < 2\lambda$; 二是满足 $\Delta t < h/|\mathbf{e}_i|$. 伪时间步迭代次数为 40, 计算收敛误差为 10^{-4} . 计算初始条件为域内流场静止; 计算边界条件为内圆边界静止, 外圆边界流速为常值. 边界条件采用 Ubertini 等^[10] 提出的协体法. 首先进行了网格收敛验证工作, 图 4 给出了 3 种不同网格精度的计算模型网格. 图 5 给出了收敛后的流速沿径向分布图. 速度幅值为所有相同半径处点的统计平均流速. 为了评估计算结果, 将模型结果与该问题的理论解进行了比较 (见图 6). 网格精度达到图 4(b) 要求后流速分布在误差允许范围已经达到了要求. 图 5 给出了该网格精度的流场矢量图. 图 6 为 3 种不同网格精度结果比较. 本文所采用的松弛时间公式为

$$\lambda = 3UL/Re \quad (19)$$

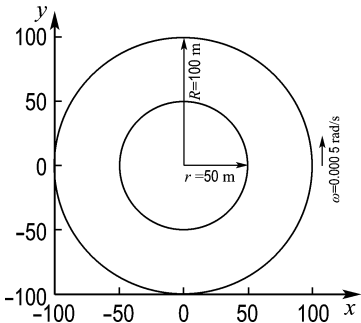


图 3 CCF 计算示意图
Fig. 3 The sketch of CCF simulation case

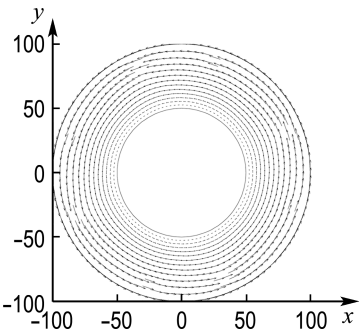


图 5 CCF 流场矢量图

Fig. 5 Flow field vector pattern of CCF

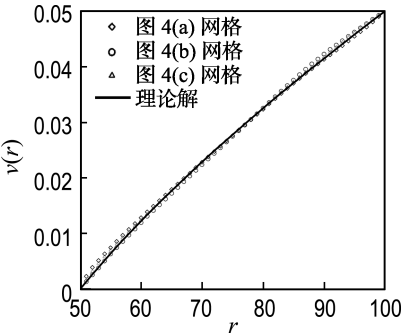


图 6 CCF 结果比较图

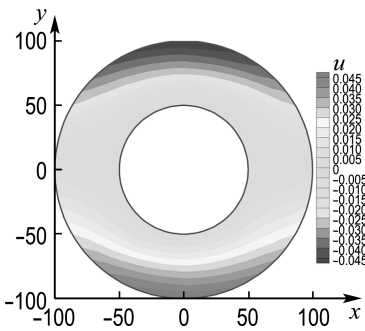
Fig. 6 Result comparisons of CCF cases

从式(19)可以看出,松弛时间与黏性有关,是雷诺数的函数. 松弛时间因子所表征的物理意义目前仍没有合理解释,因此对松弛时间的物理意义研究需要展开. 在本文中给出了网格密度如图 4(b)算例的宏观变量 u 、 v 的等值线图,见图 7. 采用传统的 LBM 无法模拟圆边界,而本计算工况说明本文所提出的非结构化网格有限体积 LBM 模型可以很好地解决该问题.

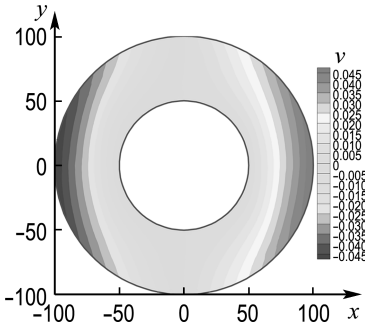
3.2 顶盖驱动方腔流算例

顶盖驱动方腔流算例($Re=100$)被用来进行模型验证(见图 8). 图 9 为计算网格图(节点数 1 324,单元数 2 448). 图 10 给出了达到要求精度(本文采用 1×10^{-7} 收敛误差精度)的计算余量(R)与所用 CPU 时间图. 图 11 给出了流速分布等值线图. 图 12 给出了该工况流线图. 可以看出, Re 为 100 时计算域出现 3 个主要涡旋,主涡旋位于流场中部,左右下角各出现小涡旋. 在本文中,并没有采用文献[10]中提到的角点修正的方法,体现了方法的通用性. 模型结果与已发表的结果进行了对比^[10,18,19],见图 13. 结果显示域中线的流速分布与其他发表的结果符合较好. 在主涡旋处模型结果大于其他结果,分析原因可能是碰撞

项数值格式耗散小的缘故,将在后续的研究中针对该问题进行研究.



(a) u



(b) v

图 7 流场等值线图

Fig. 7 Contour of flow field

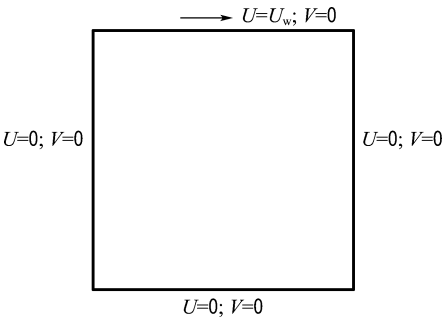


图 8 顶盖驱动方腔流计算示意图

Fig. 8 Sketch of the geometry for the lid-driven cavity flow simulation

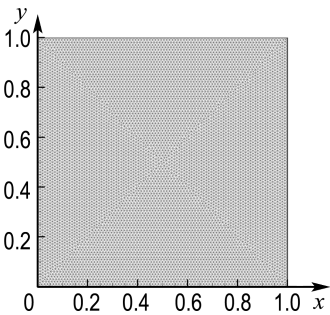


图 9 顶盖驱动方腔流计算网格

Fig. 9 Mesh for lid-driven cavity flow simulation

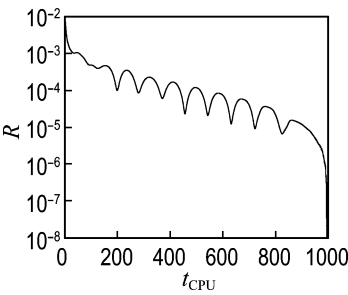


图 10 顶盖驱动方腔流计算余量-CPU 时间关系曲线

Fig.10 Residual versus CPU clocktime of lid-driven cavity flow

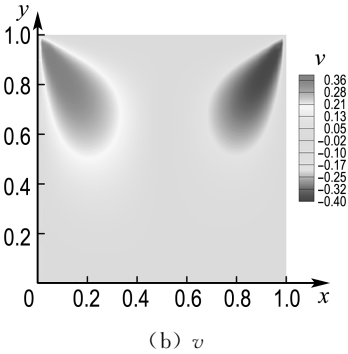
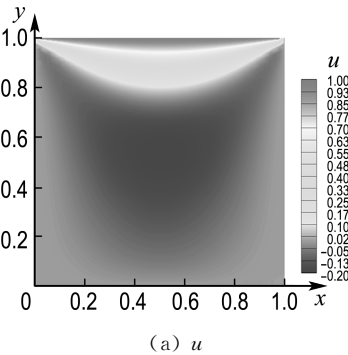


图 11 顶盖驱动方腔流计算域等值线图($Re=100$)
Fig.11 Contour of computational domain for lid-driven cavity flow ($Re = 100$)

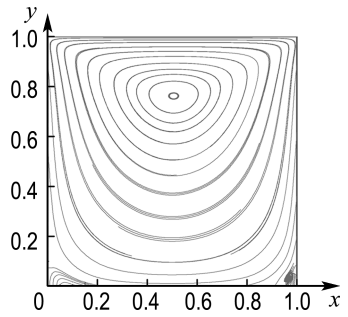


图 12 顶盖驱动方腔流计算域流线图($Re=100$)
Fig.12 Streamline of computational domain for lid-driven cavity flow ($Re = 100$)

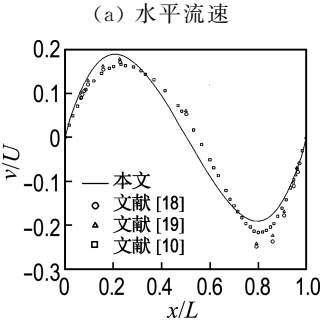
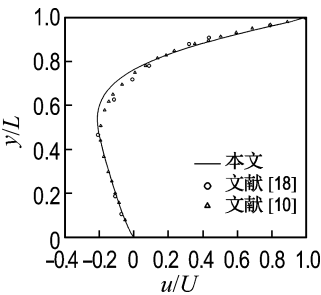


图 13 顶盖驱动方腔流计算域中心线水平和垂直流速分布图($Re=100$)

Fig.13 u versus y and v versus x of computational domain for lid-driven cavity flow ($Re = 100$)

4 结 论

本文提出了一种基于非结构化网格控制体积的 LBM. 采用 Cell-vertex 有限体积法, 应用 edge-based 通量计算方法, 在时间上和空间上都采用二阶精度数值格式离散. 以 CCF 算例与顶盖驱动方腔流算例作为模型验证算例. 评估算例的模拟结果显示该方法为一种有效求解流体流动特性的实用工具.

本文所提模型的碰撞项离散格式出现了耗散小的特征, 将在今后工作中加以改进.

参考文献:

[1] Succi S, Amati G, Benzi R. Challenges in lattice Boltzmann computing [J]. **Journal of Statistical Physics**, 1995, **81**(1-2):5-16.
[2] CHEN Shi-yi, Doolen G D. Lattice Boltzmann method for fluid flow [J]. **Annual Review of Fluid Mechanics**, 1998, **30**(1):329-364.
[3] Hardy J, Pomeau Y, de Pazzis O. Time evolution of a two-dimensional model system. I. Invariant states and time correlation functions [J]. **Journal of Mathematical Physics**, 1973, **14**(12):1746-1759.
[4] Hardy J, de Pazzis O, Pomeau Y. Molecular dynamics of a classical lattice gas: Transport

- properties and time correlation functions [J]. **Physical Review A**, 1976, **13**(5):1949-1961.
- [5] HE Xiao-yi, LUO Li-shi. A prior derivation of the lattice Boltzmann equation [J]. **Physical Review E**, 1997, **55**(6):6333-6336.
- [6] Nannelli F, Succi S. The lattice Boltzmann equation on irregular lattices [J]. **Journal of Statistical Physics**, 1992, **68**(3-4):401-407.
- [7] HE Xiao-yi, LUO Li-shi, Dembo M. Some progress in lattice Boltzmann method. Part I. Nonuniform mesh grids [J]. **Journal of Computational Physics**, 1996, **129**(2):357-363.
- [8] XI Hao-wen, PENG Gong-wen, Chou So-hsiang. Finite volume lattice Boltzmann method [J]. **Physical Review E**, 1999, **59**(5):6202-6205.
- [9] CHEN Hu-dong. Volumetric formulation of the lattice Boltzmann method for fluid dynamics: Basic concept [J]. **Physical Review E**, 1998, **58**(3):3955-3963.
- [10] Ubertaini S, Bella G, Succi S. Lattice Boltzmann method on unstructured grids: Further developments [J]. **Physical Review E**, 2003, **68**(1):016701-10.
- [11] Ubertaini S, Bella G, Succi S. Unstructured lattice Boltzmann equation with memory [J]. **Mathematics and Computers in Simulation**, 2006, **72**(2-6):237-241.
- [12] Patil D, Lakshmisha K N. Finite volume TVD formulation of lattice Boltzmann simulation on unstructured mesh [J]. **Journal of Computational Physics**, 2009, **228**(14):5262-5279.
- [13] Noble D R, CHEN Shi-yi, Georgiadis J G, *et al.* A consistent hydrodynamic boundary condition for the lattice Boltzmann method [J]. **Physics of Fluids**, 1995, **7**(1):203-209.
- [14] SU Xiao-hui, ZHAO Yong, HUANG Xiao-yang. On the characteristics-based ACM for incompressible flows [J]. **Journal of Computational Physics**, 2007, **227**(1):1-11.
- [15] Xia G H, Zhao Y, Yeo J H. Parallel unstructured multigrid simulation of 3D unsteady flows and fluid-structure interaction using immersed membrane method [J]. **Computers & Fluids**, 2009, **38**(1):71-79.
- [16] LV X, ZHAO Y, HUANG X Y, *et al.* A matrix-free implicit unstructured multigrid finite volume method for simulating structural dynamics and fluid-structure interaction [J]. **Journal of Computational Physics**, 2007, **225**(1):120-144.
- [17] Peng G W, Xi H W, Duncan C, *et al.* Lattice Boltzmann method on irregular meshes [J]. **Physical Review E**, 1998, **58**(4):4124-4127.
- [18] Aydin M, Fenner R T. Boundary element analysis of driven cavity flow for low and moderate Reynolds numbers [J]. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 2001, **37**(1):45-64.
- [19] Ghia K N, Ghia C T, Shin C. High-*Re* solutions for incompressible flows using the Navier-Stokes equations and a multigrid method [J]. **Journal of Computational Physics**, 1982, **48**(3):387-411.

Unstructured mesh finite volume LBM

SU Xiao-hui^{*1}, LIU Yan¹, ZHANG Kai-lin¹, ZHAO Yong², WANG Wei¹, XIE Rong¹, ZHAO Guang¹

(1. School of Energy and Power Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. College of Mechanical Engineering, Alfaisal University, Riyadh 11533, Kingdom of Saudi Arabia)

Abstract: A unstructured mesh finite volume LBM is presented. Cell-vertex finite volume method is used to discretize the governing equations. During the discretization in time, there are two-time steps, pseudo-time step and real time step respectively, in which forward scheme is used in former while the second order backward scheme is used in latter. In space, an edge-based flux calculating algorithm is adopted and higher order TVD scheme is utilized to calculate the flux through control volume interface. A strategy of implicit iteration is used for solving discrete governing equations and the second order five-layer Runge-Kutta method is utilized for the solution of variables. The simulating results of 2D cylindrical-Couette flow and lid-driven cavity flow show that the proposed method is believed to be an effective tool for solving flow pattern of flow domain with irregular boundary.

Key words: LBM; unstructured mesh; finite volume method