文章编号：1000-8608(2012)06-0870-08

静电场问题的等几何分析方法

张 勇，林 皋*，刘 俊，胡志强

（大连理工大学 建设工程学部，辽宁 大连 116024）

摘要：等几何分析方法是一种新型的数值方法，它将几何模型和计算模型统一起来，从而消除了传统方法中二次建模的冗余过程，同时也消除了网格离散过程中几何模型和计算模型的非一致性.将此方法扩展到静电场问题，利用几何等参思想构造域内变量场分布，通过加权余量法将控制微分方程弱化为等几何离散方程，对于强制边界条件，通过分组的方式得以施加.将矩形域内静电场问题的计算结果和传统的有限元方法比较，结果表明此方法具有自由度少、精度高、收敛速度快的优点，可以应用其求解椭圆微带线的特征阻抗.

关键词：静电场；等几何分析；NURBS；椭圆微带线；特征阻抗

中图分类号：TM151；O24 **文献标志码**：A

0 引 言

静电场问题是计算电磁学中最基本的问题.虽然计算电磁学的控制微分方程，即麦克斯韦方程组非常复杂，但对于静电场问题，其可以简化为泊松方程或者拉普拉斯方程.对于规则求解域在一定的边界条件，如矩形域或者圆域，应用解析法，如分离变量法，便能够获得问题的精确解析解，虽然其不适用于复杂的求解域和边界条件，但可以作为其他方法的有效性与精度的检验标准.

当求解域比较复杂时，采用数值方法进行求解只能获得近似解，求解的精度与效率取决于数值方法及其离散尺寸，如传统的有限差分法(FDM)、有限元法(FEM)、边界元法(BEM)、矩量法(MoM)[1-4]，以及新型的无网格(mesh free)法[5]、比例边界有限元方法(SBFEM)[6]等.有限差分法将离散点上函数微分近似为离散差商，进而将控制微分方程转化为差分方程，虽然该方法程序容易编制，网格离散一般较容易，但对复杂边界问题，网格剖分缺少灵活性.有限元法将求解域离散成单元，根据变分原理或者加权余量法将控制微分方程弱化为代数方程，是分析静电场问题最通用的方法之一，但该方法需要二次建模，即将求解域的几何模型根据单元类型，如平面四节点一次单元和八节点二次单元转化为计算模型，并且变量的跨单元是 C^0 连续的.边界元法利用基本解将控制微分方程转化为边界积分方程，进而离散边界得到代数方程，它降低了求解域的维数，减少了数据量和处理时间，可直接求解无界域边值问题，有较高的计算精度，但其需要的基本解并不是总是存在的.矩量法通过构造一组线性无关的函数组将控制微分方程或者积分方程转化为代数方程，但其计算量大.无网格法是将求解域离散成若干个节点，每个节点在其影响域内对其他节点产生影响，该类方法只需节点，不需单元，计算精度高、收敛速度快，但采用的基函数不具有插值性，其边界条件的处理较麻烦.比例边界有限元方法是结合有限元和边界元的一种新型数值方法，它具有半解析性，但不需要基本解，并且它区别于以往的半解析类方法，如级数法、多极点法、广义多极技术、多极理论方法和新型等效源法[7-10]等方法，计算精度高、收敛速度快、计算量小.

上述各类数值方法中的计算模型是对求解域

收稿日期：2011-05-02； **修回日期**：2012-09-10.
基金项目：中德合作研究资助项目(GZ566)；国家自然科学基金资助项目(90510018,90915009,51009019,51109134)；清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室开放基金资助项目(sklhse-2010-C-03).
作者简介：张 勇(1983-)，男，博士生，E-mail：zymarchine@gmail.com；林 皋*(1929-)，男，教授，博士生导师，中国科学院院士，E-mail：gaolin@dlut.edu.cn.

或者求解域边界进行“自定义”离散得到的，其与初始几何模型不具有一致性，从而导致精度的丧失.

等几何分析方法(isogeometric analysis，简称 IGA)是由 Hughes 等[11]提出的一种新型数值方法. 该方法基于 NURBS 描述的几何模型，避免了传统数值方法的几何模型和计算模型的非一致性，计算精度与效率较高. 目前该法已被用于求解固体力学和流体力学问题[12-16]. Zhang 等将其扩展到比例边界等几何分析问题[17,18]，以及波导本征问题[19,20]. 本文将 IGA 应用于静电场问题的求解.

1　NURBS 基函数及几何形体描述

1.1　B 样条和 NURBS 基函数

B 样条基函数 $N_{i,p}(i=0,1,\cdots,n)$ 是定义在节点向量 $\boldsymbol{\Xi}=(\xi_0 \quad \xi_1 \quad \cdots \quad \xi_m)$ 上的一组具有高阶连续阶的函数. 一维 B 样条基函数见 Cox-de Boor 公式[21]，递归定义如下：

$$\begin{cases} N_{i,0}(\xi)=\begin{cases}1;\ \xi\in[\xi_i,\xi_{i+1})\\0;\ \text{其他}\end{cases}\\ N_{i,p}(\xi)=\dfrac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+p}-\xi_i}N_{i,p-1}(\xi)+\\ \qquad\dfrac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}}N_{i+1,p-1}(\xi);\ p\geqslant 1\end{cases} \tag{1}$$

其中 p 为基函数的阶数. 从式(1)可以看出，p 阶基函数可以通过 $p-1$ 阶基函数线性插值得到.

节点向量 $\boldsymbol{\Xi}$ 是由非减的节点序列构成的，相同节点重复的次数称为重复度. 开放节点向量是指一个 p 阶基函数的节点向量的端节点的重复度是 $p+1$，它是 CAD 设计标准，因此本文也采用开放节点向量.

B 样条基函数的基本性质：非负性、单位分解性、紧支性、高阶连续性、递归求导性、线性无关性和非插值性等[21]. 单位分解性、紧支性、线性无关性和传统有限元的 Lagrange 基函数是一致的，其中，单位分解性保证等几何分析中，可以采用等参思想来构造变量场，而紧支性使得离散单元的独立性以及最后的系数矩阵是稀疏的. 但是，非负性、高阶连续性、递归求导性、非插值性和 Lagrange 基函数是不同的，其中，非负性对于高次单元具有重要的意义，高阶连续性是构造更高阶变量场的前提，递归求导性使得对基函数的求导更为方便，而非插值性使得边界条件的施加较为麻烦.

二维 B 样条基函数可以通过一维 B 样条基函数张量积的方式形成：

$$N_{i,p;j,q}(\xi,\eta)=N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta) \tag{2}$$

其中 $N_{i,p}(\xi)$ 和 $N_{j,q}(\eta)$ 是两个方向上独立的一维 B 样条基函数.

如果为每个 B 样条基函数指定一个权重，通过有理化可构造非均匀有理 B 样条(non-uniform rational B-spline，NURBS)基函数，一维和二维 NURBS 基函数如式(3)和(4)所示：

$$R_{i,p}(\xi)=\frac{\omega_i N_{i,p}(\xi)}{\sum_{i_1=0}^{n}\omega_{i_1}N_{i_1,p}(\xi)} \tag{3}$$

$$R_{i,p;j,q}(\xi,\eta)=\frac{\omega_{i,j}N_{i,p;j,q}(\xi,\eta)}{\sum_{i_1=0}^{n_u}\sum_{j_1=0}^{n_v}\omega_{i_1,j_1}N_{i_1,p;j_1,q}(\xi,\eta)} \tag{4}$$

虽然 NURBS 基函数是有理多项式，但如果权重是非负的，则具有与 B 样条基函数一样的性质. 与 B 样条基函数相比，NURBS 基函数可以精确地构造圆锥曲线和曲面. 若各个基函数对应的权值均相等，则 NURBS 基函数退化为 B 样条基函数. 因此可以将 NURBS 看作是 B 样条的推广，而 B 样条是 NURBS 的一种特殊情形，在后续的文中不再区别二者，均称为 NURBS 基函数. 基于开放节点向量(0　0　0　1　2　3　4　4　4)的二次 NURBS 基函数如图 1 所示.

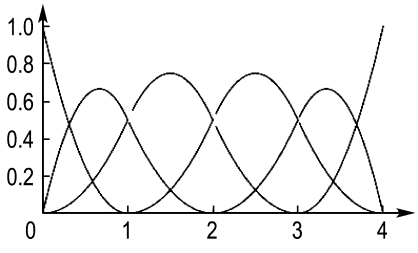


图 1　二次 NURBS 基函数

Fig. 1　Quadratic NURBS basis function

1.2　基于 NURBS 的几何形体描述

NURBS 基函数将节点向量所在的参数空间中的点映射到控制点所在的物理空间，即参数区间$[\xi_i,\xi_{i+1})$ 与物理空间中的单元 V^i 相对应. NURBS 曲线和曲面的描述如式(5)和(6)所示：

$$\boldsymbol{C}(\xi)=\sum_{i=0}^{n_u}\boldsymbol{P}_i N_{i,p}(\xi) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{S}(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{n_u}\sum_{j=0}^{n_v}\boldsymbol{P}_{i,j}N_{i,p;j,q}(\xi,\eta) \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{P}_i$ 和 $\boldsymbol{P}_{i,j}$ 是 NURBS 几何形体的控制点. 图 2 和 3 分别给出了典型的二次 NURBS 曲线和曲面,其中控制点标记为·,从图中可以很明显地观察到控制点并未落在几何形体上,具有非插值性.



图 2 二次 NURBS 曲线

Fig. 2 Quadratic NURBS curve

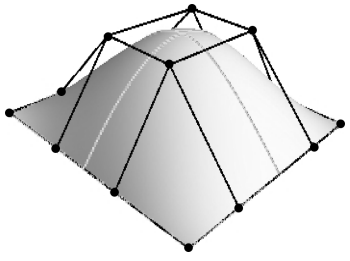


图 3 二次 NURBS 曲面

Fig. 3 Quadratic NURBS surface

2 静电场问题的等几何分析方法的推导

2.1 静电场问题

计算电磁学的控制方程为麦克斯韦方程组,对于静电场问题,域内无电荷情形下,控制方程可简化为式(7) 的泊松方程及相应的边界条件:

$$\nabla^2\phi=\rho;\ \text{在}\ \Omega\ \text{上} \tag{7a}$$

$$\phi=\bar{\phi};\ \text{在}\ \Gamma_\phi\ \text{上} \tag{7b}$$

$$\phi_{,n}=\bar{q};\ \text{在}\ \Gamma_q\ \text{上} \tag{7c}$$

式中:ϕ 为电势,ρ 是域的电荷密度,$\boldsymbol{n}$ 是边界的单位外法向,Ω 是求解域,其边界 $\partial\Omega=\Gamma_\phi\cup\Gamma_q$,$\bar{\phi}$ 是在边界 Γ_ϕ 上指定的电位值,$\bar{q}$ 是在边界 Γ_q 上给定电位方向导数值. 如果域内无电荷分布,则式(7a)退化为拉普拉斯方程.

2.2 求解域的 NURBS 等几何离散

以二维为例,求解域 Ω 的几何形体采用 NURBS 描述,如式(6),其中两个方向的节点向量分别为 $\boldsymbol{\Xi}=(\xi_0\quad\xi_1\quad\cdots\quad\xi_{k_u-1})$ 和 $\boldsymbol{H}=(\eta_0\quad\eta_1\quad\cdots\quad\eta_{k_v-1})$. 由 $\boldsymbol{\Xi}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 张成参数域,其中节点区间 $[\xi_h,\xi_{h+1})\times[\eta_k,\eta_{k+1})$ 映射为求解域 Ω 上的一个几何单元 $V^{h,k}$,即 $[\xi_h,\xi_{h+1})\times[\eta_k,\eta_{k+1})\to V^{h,k}$,可见这个映射过程就是求解域被 NURBS 等几何离散的过程. 根据 NURBS 基函数的紧支性,相应的非零基函数索引为 (h_1,k_1),$h_1=h-p,h-p+1,\cdots,h$,$k_1=k-q,k-q+1,\cdots,k$,p、q 分别为两个方向基函数次数. 单元 $V^{h,k}$ 的所有非零基函数个数为 $n_{cp}=(p+1)(q+1)$,即该单元相关的控制点数为 n_{cp}. 根据式(6) 以及 NURBS 基函数的紧支性,单元 $V^{h,k}$ 内任意一点 $\boldsymbol{P}^{h,k}(\xi,\eta)$ 的坐标可表示为

$$\boldsymbol{P}^{h,k}(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n_{cp}}\boldsymbol{P}_i^{h,k}N_i^{h,k}(\xi,\eta)=\boldsymbol{N}^{h,k}(\xi,\eta)\boldsymbol{X}^{h,k} \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{P}^{h,k}(\xi,\eta)=(x^{h,k}(\xi,\eta)\quad y^{h,k}(\xi,\eta))$,$\boldsymbol{P}_i^{h,k}=(x^{h,k}\quad y^{h,k})$ 表示与单元 $V^{h,k}$ 相关的控制点坐标,$\boldsymbol{X}^{h,k}=(\boldsymbol{P}_1^{h,k}\quad\boldsymbol{P}_2^{h,k}\quad\cdots\quad\boldsymbol{P}_{n_{cp}}^{h,k})^{\mathrm{T}}$ 表示该单元所有控制点坐标列向量. $N_i^{h,k}(\xi,\eta)$ 是单元 $V^{h,k}$ 相关的 NURBS 基函数,$\boldsymbol{N}^{h,k}(\xi,\eta)$ 是其向量形式. 注意到,这里的基函数和控制点的二维索引 (h_1,k_1) 都转化到该单元的局部一维索引.

一典型二维求解域被 NURBS 离散,如图 4 所示,与图 3 所示的空间曲面不同,二维求解域是平面内问题.

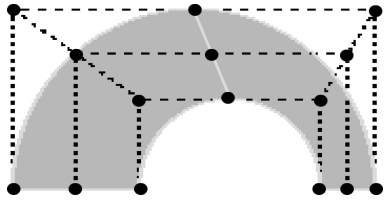


图 4 NURBS 离散求解域

Fig. 4 Domain discretization by NURBS

2.3. 求解域的细分

基于 NURBS 描述的求解域可以直接用于数值计算和分析,但是为了提高解的精度,需要对初始的几何模型进行细分. NURBS 细分算法,包括 h-细化方法、p-细化方法、k-细化方法等[11],都具有保形和非通讯的重要特征,保形性使得细分后的模型与初始模型是几何一致的,非通讯性可以使得细分过程独立于初始几何模型.

2.4 变量场的等参化

从单元模式来讲,虽然 NURBS 基函数不具

有插值性，但是由于它具有单位分解性，可以满足分片检验. 因此与传统的有限元方法相似，等几何分析方法中变量场的构造亦采用等参策略，则求解域中 NURBS 单元 $V^{h,k}$ 内任意一点的变量场具有与式(8) 相似的表达.

$$\phi^{h,k}(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n_{cp}}\phi_i^{h,k}N_i^{h,k}(\xi,\eta)=\boldsymbol{N}(\xi,\eta)\boldsymbol{\phi}^{h,k} \quad (9)$$

其中 $\phi_i^{h,k}$ 表示求解域控制点变量，在静电场问题中则指控制点电势.

2.5　控制微分方程的等几何离散方程

与传统的有限元类似，采用 Galerkin 加权余量法或者虚功原理[22]将控制微分方程式以及边界条件(7) 进行离散. 推导过程从略，基于等几何分析方法的离散方程可表示为

$$\boldsymbol{K\phi}=\boldsymbol{Q} \quad (10)$$

这是关于控制点电势 $\boldsymbol{\phi}$ 的代数方程，其中 $\boldsymbol{K}=\sum_{h,k}\boldsymbol{K}^{h,k}$ 表示 NURBS单元系数矩阵集成的总体系数矩阵，$\boldsymbol{Q}=\sum_{h,k}\boldsymbol{Q}^{h,k}$ 是等效控制点激励，包括体电荷分布和第二类边界条件的贡献.

$$\boldsymbol{K}^{h,k}=\int_{\xi_h}^{\xi_{h+1}}\int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}}(\boldsymbol{B}^{h,k}(\xi,\eta))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{h,k}(\xi,\eta)\,|\boldsymbol{J}|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (11)$$

$$\boldsymbol{Q}^{h,k}=\int_{\xi_h}^{\xi_{h+1}}\int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}}(\boldsymbol{N}^{h,k}(\xi,\eta))^{\mathrm{T}}\,\overline{q}\mathrm{d}S+\int_{\Gamma_q}(\boldsymbol{N}^{h,k}(\xi,\eta))^{\mathrm{T}}\,\overline{q}\mathrm{d}S \quad (12)$$

注意到式(11) 和(12) 中的积分区间是 NURBS 单元 $V^{h,k}$ 对应的参数区间$[\xi_h,\xi_{h+1})\times[\eta_k,\eta_{k+1})$，它区别于传统有限元中母单元对应的标准高斯积分区间$[-1,1]\times[-1,1]$，因此在数值积分时需要转化，并且对于每个单元这个积分区间是变化的.

2.6　边界条件施加及离散方程求解

自然边界条件(7c)体现在式(12)中的第 2 项，利用边界积分，将边界微元转化到参数域中进行：

$$\boldsymbol{Q}_s^{h,k}=\int_{l^-}^{l^+}(\boldsymbol{N}^{h,k}(\xi,\eta))^{\mathrm{T}}\,\overline{q}\,|\boldsymbol{J}^s|\,\mathrm{d}l \quad (13)$$

对于不同的边界面，式(13) 中的边界微元形式和积分区间也不尽相同，例如，对于 $\xi=\xi_h$ 边界面，形如

$$\boldsymbol{Q}_s^{h,k}=\int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}}(\boldsymbol{N}^{h,k}(\xi_h,\eta))^{\mathrm{T}}\,\overline{q}\,|\boldsymbol{J}^{u^-}|\,\mathrm{d}\eta \quad (14)$$

但对于强制边界条件，由于 NURBS 基函数的非插值性，边界条件的施加相对于具有插值性的 Lagrange 单元有较大的区别. 首先，利用NURBS基函数的非负性将与强制边界 Γ_ϕ 相关的基函数分成两组：N_i^{nz} 和 N_i^{nz}. N_i^{zz} 在 Γ_ϕ 上恒为零，N_i^{nz} 在 Γ_ϕ 上不恒为零. 则式(9) 可分解为

$$\sum\phi_i^{nz}N_i^{nz}\Big|_{\Gamma_\phi}+\sum\phi_i^{zz}N_i^{zz}\Big|_{\Gamma_\phi}=\overline{\phi} \quad (15)$$

恒为零的基函数 N_i^{zz} 对应的控制点电势对电势场没有贡献，即式(14) 只剩下非负基函数对应的项，再利用 NURBS基函数的单位分解性，可得

$$\phi_i^{nz}=\overline{\phi} \quad (16)$$

式(16)可作为控制点变量的约束条件，联合式(10)可消除其系数矩阵的奇异性.

3　算例分析

3.1　矩形槽

为了验证等几何分析方法求解静电场问题的高精度和高效性，首先选择了一个具有解析解的经典算例. 该算例为一长直金属槽，上下面的电位为 0，而右面电位 $\phi(x=a,y)=U_0$，左面的水平向电场强度为 0，如图 5 所示，需求出域内的电位和电场，其解析解如式(17)所示. 在仿真中，取 $a=1.0$ m，$b=1.0$ m，$U_0=1.0$ V.

$$\phi(x,y)=\frac{4\phi_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cosh((2k-1)\pi x/b)}{(2k-1)\cosh((2k-1)\pi a/b)}\times\sin((2k-1)\pi y/b) \quad (17)$$

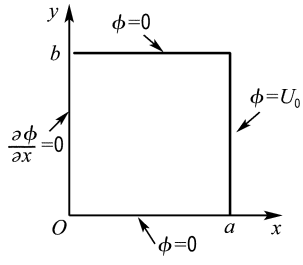


图 5　矩形方板 IGA 计算示意图

Fig. 5　Sketch for the rectangular plate using IGA

矩形方板的初始几何模型中仅含有一个NURBS单元，为了比较数值解的收敛性和收敛速度，采用 h-细分方法对初始几何模型进行细分，得到从粗到细的 5 种尺寸网格(网格 1～5)计算模型，同时每个单元尺寸的网格还对应一个传

统的有限元二次单元模型. 各个尺寸的计算模型中自由度 n_{DOF} 与单元的数量 n_e 关系曲线如图 6 所示. 随着单元数量的增加,即单元尺寸减小,传统有限元 Lagrange 单元模型的计算自由度迅速增加,而 NURBS 等几何模型的计算自由度增加的速率明显缓慢,可见对于相同的单元数,等几何分析消耗更少的计算自由度,这对于数值计算来说,计算效率大为提高. 这是因为等几何模型中 NURBS 基函数的连续阶高,单元之间共享更多的自由度.

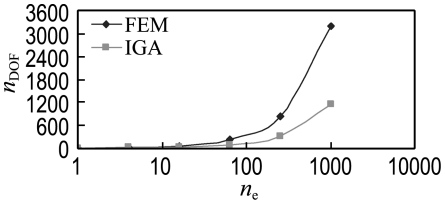
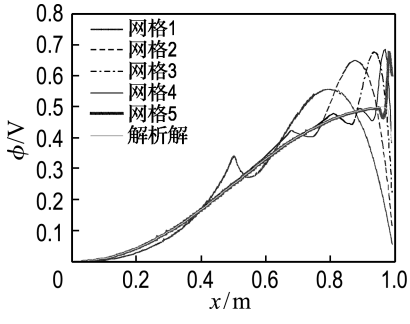


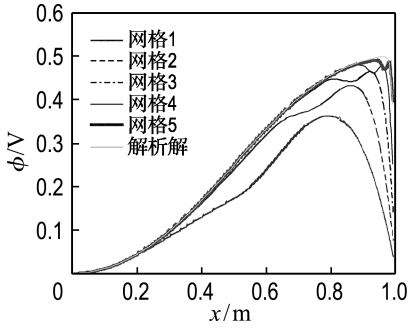
图 6 自由度消耗 n_{DOF} 与单元数量 n_e 图

Fig. 6 Number of DOFs consumed vs. number of elements n_e

在方板的左下角到右上角的典型截面上电势分布如图 7 所示. 图 7(a)为有限元计算的结果,在邻近右上角(奇异区域)出现震荡,即使很细的网格也未能幸免;而 IGA 的计算结果如图 7(b)所示,快速收敛到解析解,且不出现震荡.



(a) FEM



(b) IGA

图 7 FEM 和 IGA 的典型截面上电势分布图

Fig. 7 Electric potential along typical section in FEM and IGA

相对解析解的误差计算公式为

$$e = \sqrt{\sum_i (\phi_{i_\text{exact}} - \phi_{i_\text{calc}})^2 \Big/ \sum_i (\phi_{i_\text{exact}})^2} \tag{18}$$

其中 ϕ_{i_exact} 为解析解,ϕ_{i_calc} 为数值解.

电势的相对误差随网格尺寸变化如图 8 所示,随着单元尺寸的减小,传统有限元 Lagrange 单元模型和 NURBS 等几何模型的计算结果的相对误差都减小,而在每个网格尺寸下后者都比前者小,可见其精度高,收敛速度快.

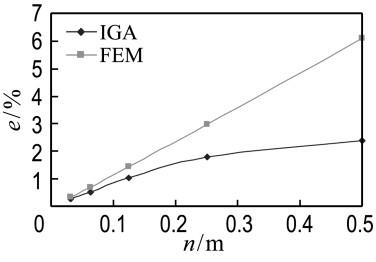


图 8 电势的相对误差随网格尺寸变化图

Fig. 8 Relative error for electric potential of different meshes

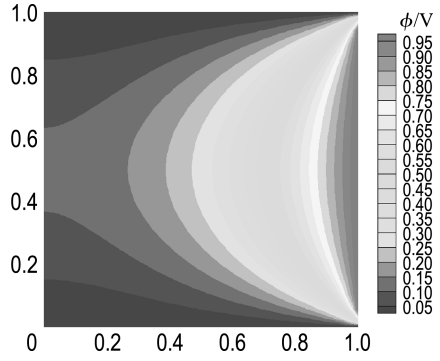
图 9 为整个域上的电势分布图,图 9(a)为数值解,图 9(b)为解析解,两个图中电势分布几乎一致,即使在奇异区域附近也基本吻合.

从这个带有奇异性的静电场问题可以看出:(1)等几何分析方法的等几何性不仅体现在计算模型与几何模型一致,即计算模型直接继承于几何模型而无需二次建模,而且还体现在模型细分时的非通讯性和保形性,这为数值计算提供了极大的便利;(2)等几何分析方法在计算效率方面还具有单位单元的计算自由度消耗少、计算精度高、收敛速度快的特点;(3) 对于奇异性问题,有限元并不能很好地模拟,特别是奇异区域附近会出现震荡,而等几何分析的数值解在奇异区域附近显现得较平滑,并且随着网格尺寸的减小,趋于精确解.

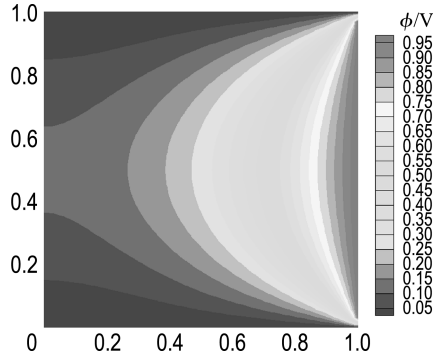
3.2 椭圆微带线

为了进一步验证此方法对于复杂静电场问题的适应性和有效性,特选取椭圆微带线,其截面如

图 10 所示，外边界接地电势为 0，内置微带电势为 1 V. 椭圆长半轴 $a=1$ m，$b/a=0.3$，$w/a=0.5$.



(a) 数值解



(b) 解析解

图 9　电势数值解和解析解的等值线图

Fig. 9　Contour plot of numerical and analytical solution of electric potential

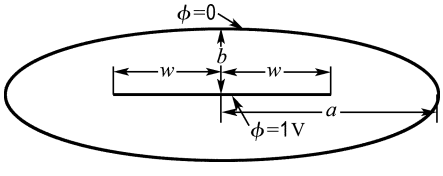


图 10　椭圆微带线

Fig. 10　Elliptical stripline

由于对称性，仅取 1/4 部分进行分析计算，等几何分析的初始网格如图 11 所示，其中，圆点为控制点，虚线标识控制点网格，加粗黑色边界表示第一类边界条件，细黑色边界表示第二类边界条件.

椭圆微带线的特征阻抗可以通过电场能量求得，如下式：

$$Z=\frac{1}{v_0 C} \tag{19}$$

$$C=4\times\frac{2W}{\Delta\phi} \tag{20}$$

$$W=\sum_{h,k}\int_{\xi_h}^{\xi_{h+1}}\int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}}(\nabla\phi)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}(\nabla\phi)\,|\boldsymbol{J}|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{21}$$

其中 $v_0=3\times10^8$ m/s，为真空中光速；C 为电容；$\Delta\phi=1$ V，为内外电势差；W 为电场能量. 式(20)中的系数 4 表示计算时仅取 1/4.

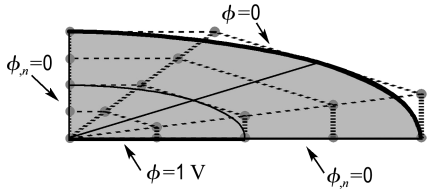


图 11　等几何分析初始网格

Fig. 11　Initial mesh of IGA

计算自由度与单元数量如图 12 所示，其特点与矩形槽相同，体现了其低自由度消耗的优点. 不同网格模型中按照式(19)～(21)计算得到其特征阻抗，结果如图 13 所示. 在每个网格模型中，等几何分析的结果都比有限元的结果更靠近解析解. 对于网格 5 网格模型，等几何模型的自由度为 4 422，特征阻抗为 42.29 Ω(相对误差为 0.14%)，而有限元的自由度为 9 409，特征阻抗为 42.20 Ω(相对误差为 0.33%)，可以很清楚地看出，虽然两种方法的误差都较小，都低于 1%，但是等几何分析的计算量只有有限元的一半，而精度却是后者的 2 倍.

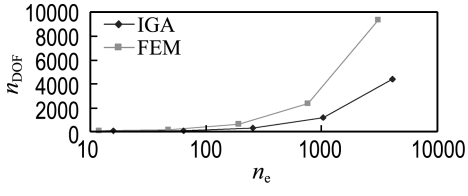


图 12　计算自由度与单元数量

Fig. 12　Number of DOFs consumed vs. number of elements

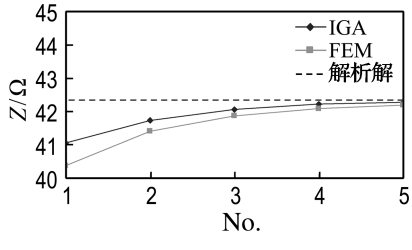


图 13　椭圆微带线特征阻抗

Fig. 13　Characteristic impedance of elliptical stripline

4 结 语

本文研究了等几何分析方法求解静电场问题,将NURBS描述的几何模型直接应用于计算分析,并利用几何等参思想通过控制点变量构造变量场,将静电场控制微分方程弱化为等几何离散方程.同时介绍了等几何模型的非通讯保形细分策略和边界条件的施加.矩形域上静电场问题的数值结果表明与传统的有限元方法相比,该方法计算自由度少,收敛速度快,计算精度和计算效率更高,进而可应用其计算椭圆微带线的特征阻抗.

参考文献:

[1] 金建铭. 电磁场有限元方法[M]. 西安:西安电子科技大学出版社, 1998.
JIN Jian-ming. **Finite Element Methods of Electromagnetic Field** [M]. Xi′an:Xidian University Press, 1998. (in Chinese)

[2] SONG B, FU J. Modified indirect boundary element technique and its application to electromagnetic potential problems [J]. **IEE Proceedings. H, Microwaves Antennas and Propagation**, 1992, **139**(3):292-296.

[3] Bamji S S, Bulinski A T. Electric field calculations with the boundary element method [J]. **IEEE Transactions on Electrical Insulation**, 1993, **28**(3): 420-424.

[4] 樊德森. 静电场边值问题的矩量法解[J]. 计算物理, 1989, **6**(1):1-8.
FAN De-sen. Moment-method solution of static-electric boundary-value problems [J]. **Chinese Journal of Computation Physics**, 1989, **6**(1):1-8. (in Chinese)

[5] 张淮清. 电磁场计算中的径向基函数无网格法研究[D]. 重庆:重庆大学, 2008.
ZHANG Huai-qing. Research on radial basis function meshless method in numerical computation of electromagnetic field [D]. Chongqing:Chongqing University, 2008. (in Chinese)

[6] 刘 俊,林 皋,王复明. 静电场分析的比例边界有限元法[J]. 大连理工大学学报, 2011, **51**(5):731-736.
LIU Jun, LIN Gao, WANG Fu-ming. Scaled boundary finite element method for analysis of electrostatic field problems [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2011, **51**(5):731-736. (in Chinese)

[7] 李 敬. 级数法求解轴对称的静电场[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 1997, **17**(3):43-45.
LI Jing. In progression resolution statics field with symmetric axis [J]. **Journal of Yunnan Normal University (Natural Sciences Edition)**, 1997, **17**(3): 43-45. (in Chinese)

[8] 马西奎. 最小二乘边界配点法在电磁场边值问题数值分析中的应用[J]. 微波学报, 1994, **37**(2):17-22.
MA Xi-kui. Application of least square boundary point matching method to the numerical analysis of electromagnetic field problems [J]. **Journal of Microwaves**, 1994, **37**(2):17-22. (in Chinese)

[9] Ballisti C H. The multiple multipole method in electro- and magnetostatic problems [J]. **IEEE Transactions on Magnetics**, 1983, **19** (6): 2367-2370.

[10] 盛剑霓. 电磁场与波分析中半解析法的理论方法与应用[M]. 北京:科学出版社, 2006:1-35.
SHENG Jian-ni. **Theory and Application of Semi-solution Method to Electromagnetic Field and Wave Analysis** [M]. Beijing: Science Press, 2006: 1-35. (in Chinese).

[11] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis, CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2005, **194**(39-41):4135-4195.

[12] Reali A. An isogeometric analysis approach for the study of structural vibrations [J]. **Journal of Earthquake Engineering**, 2006, **10**(Special Issue 1): 1-30.

[13] Bazilevs Y, Calo V M, ZHANG Y. Isogeometric fluid-structure interaction analysis with applications to arterial blood flow [J]. **Computational Mechanics**, 2006, **38**(4-5):310-322.

[14] Cottrell J A, Reali A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis of structural vibrations [J]. **Computer**

Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, **195**(41-43):5257-5296.

[15] Cottrell J A, Hughes T J R, Reali A. Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2007, **196**(41-44): 4160-4183.

[16] ZHANG Yong, Bazilevs Y, Goswami S. Patient-specific vascular NURBS modeling for isogeometric analysis of blood flow [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2007, **196**(31-32):2943-2959.

[17] ZHANG Yong, LIN Gao, HU Zhi-qiang. Isogeometric analysis based on scaled boundary finite element method [J]. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**, 2010, **10**(1): 012237.

[18] 张　勇,林　皋,胡志强. 比例边界等几何分析方法Ⅰ:波导本征问题[J]. 力学学报, 2012, **44**(2): 382-389.
ZHANG Yong, LIN Gao, HU Zhi-qiang. Scaled boundary isogeometric analysis and its application I: Eigenvalue problem of waveguide [J]. **Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, 2012, **44**(2):382-389. (in Chinese)

[19] 张　勇,林　皋,刘　俊,等. 波导本征问题的等几何分析方法[J]. 应用力学学报, 2012, **29**(2):113-119.
ZHANG Yong, LIN Gao, LIU Jun, *et al*. The isogeometric analysis for eigen problem of waveguide [J]. **Chinese Journal of Applied Mechanics**, 2012, **29**(2):113-119. (in Chinese)

[20] 张　勇,林　皋,胡志强,等. 基于等几何分析方法求解任意截面波导本征问题[J]. 计算物理, 2012, **29**(4):9-17.
ZHANG Yong, LIN Gao, HU Zhi-qiang, *et al*. Eigenvalue analysis of waveguide with arbitrary cross-section by isogeometric analysis [J]. **Chinese Journal of Computational Physics**, 2012, **29**(4):9-17. (in Chinese)

[21] Piegl L, Tiller W. **The NURBS Book** [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[22] Hughes T J R. **The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis** [M]. New York:Prentice Hall, 2000

Isogeometric analysis method for electrostatic field problems

ZHANG　Yong,　LIN　Gao*,　LIU　Jun,　HU　Zhi-qiang

(Faculty of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: In isogeometric analysis (IGA), a lately novel numerical technique, identical model is shared for geometric design and numerical simulation, which avoids the redundant procedure of remodeling simulation model in traditional methods and eliminates the geometric approximation errors during the mesh discretization. IGA is expanded to electrostatic field problems. The variables are constructed by the discretized control variables within the geometrically isoparametric concept. Using weighted residual approach the governing equations are weakened to the algebraic equations for the discretized control variables. For compulsory boundaries, they are given by the method of dividing groups. Numerical example of electrostatic field problems in a rectangular domain is carried out, and it is shown that the present method yields more excellent computational results, less amount of DOFs, quicker convergence than traditional one. Then, the characteristic impedance of elliptical stripline is calculated by the present method.

Key words: electrostatic field; isogeometric analysis; NURBS; elliptical stripline; characteristic impedance