

非同质风险组合最优定价

宋立新^{*1}, 朱强²

(1. 大连理工大学 数学科学学院, 辽宁 大连 116024;

2. 南昌陆军学院, 江西 南昌 330103)

摘要: 对于一个包含非同质风险的保单组合, 制定保费时, 不仅要考虑到保险公司自身面临的风险, 还要考虑到投保人缴纳的保费的公平性, 可利用风险和保费之间距离的函数来体现这种公平性. 应用非线性优化方法证明了在一定风险水平下, 使距离函数负部达到最小时最优保费解的存在性; 并通过用二分法和计算机软件编程, 求出这个最优解的近似值. 最后数值实例验证了结果的正确性.

关键词: 非同质风险组合; 距离函数; 非线性规划方法

中图分类号: F840.6 **文献标志码:** A

0 引言

保险业之所以存在是因为人们愿意以高于他们期望索赔额的价格获得保险保障, 因此, 保险公司收取高于期望理赔额的保费. 而保险公司在对保单制定保费时, 需要综合考虑各方面的因素, 以使制定的保费更具市场竞争性. 当然, 保险公司在制定保费时也会遵循一定的原则, 通常要遵循如下两个原则:

(1) 总索赔额超过总保费的概率小于预先给定的小数 α , $0 < \alpha < 1$;

(2) 保费随着期望理赔额的增长而增长.

本文考虑包含 k 类的非同质风险组合, 每类包含一个固定数量独立同分布的风险. 目标是在一定条件下, 使所求得的保费尽可能低, 以具有尽可能强的竞争性. 当然“公平性”前提是必需的. 文献[1]讨论了在给定的风险水平下, 使风险和保费距离平方的期望达到最小时的最优保费. 它以原则(1)为出发点, 得出的结论同样符合原则(2). 而文献[2]研究了风险和保费距离的函数, 从而把文献[1]中的模型一般化, 将问题的结论进行了推广.

Bowers 等^[3]提出了期望值保费原理, 即第 j 类风险收取保费为 $\pi_j = (1 + \theta_a) \mu_j$, 其中 μ_j 为第 j 类风险的期望, θ_a 为使风险水平为 α 的参数. 其他一些保费的制定方法仅仅考虑了原则(2), 其收取的保费和风险的期望值成比例, 而并没有考虑原

则(1). 文献[1]综合考虑了原则(1)与原则(2), 讨论了风险与保费之间距离的函数, 并建立了非线性模型, 求出了使距离函数达到最小时的最优保费. 文献[2]引入受控与舒尔凸函数^[4-6]将距离函数一般化, 讨论了在更一般情形下的最优保费问题. 本文研究风险与保费之间距离函数的负部, 建立非线性模型, 讨论使负部达到最小时的保费.

1 同质风险组合模型及其解的讨论

定义 1 令 $0 < \alpha < 1$. 设一个保险公司面临 n 个风险 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 第 i 个风险收取的保费为 π_i , 如果该保险公司总的理赔额超过收取的总保费的概率为 α , 即 $P(\sum_{i=1}^n X_i \geq \sum_{i=1}^n \pi_i) = \alpha$, 则称该保险公司面临的风险水平为 α .

定理 1 设有 n 个独立同分布的风险 $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, 服从均值为 $\bar{X}$, 方差为 σ_X^2 的正态分布, 令 $S = \sum_{i=1}^n X_i$, 且每个风险收取相同的保费 π , 则非线性优化方程

$$\begin{aligned} F &= \min E\{[(S - n\pi)_-]^{2m}\} \\ \text{s. t. } P(S > n\pi) &\leq \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

有唯一解为

$$\pi = \bar{X} + z_{1-\alpha} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

其中 $z_{1-\alpha}$ 是标准正态分布的下分位点, $E[(S - n\pi)_-]$ 表示纯损失, 用 $2m$ 去表示纯损失期望的高次幂, m 越大纯损失就表现得更明显.

证明 由约束条件可得

$$\pi \geq \bar{X} + z_{1-\alpha} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

令

$$S - n\bar{X} = T, \quad n\pi - n\bar{X} = a, \quad n z_{1-\alpha} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \beta$$

原优化方程转化为

$$\begin{aligned} F &= \min E\{[(T-a)_-]^{2m}\} \\ \text{s. t. } a &\geq \beta \end{aligned} \quad (2)$$

由于

$$\begin{aligned} E\{[(T-a)_-]^{2m}\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a (a-t)^{2m} e^{-t^2/2m\sigma_X^2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (m\sigma_X^2)^{(2m+1)/2} \times \\ &= \int_0^{a/\sqrt{m\sigma_X^2}} \left[\left(\frac{a}{\sqrt{m\sigma_X^2}} - x \right)^{2m} e^{-x^2/2} \right] dx \end{aligned}$$

令

$$g(a) = E\{[(T-a)_-]^{2m}\}$$

因为当 $a > 0$ 时, $g'(a) > 0$, 所以 $g(a)$ 为关于自变量 $a (a > 0)$ 单调递增的函数. 从而得出优化方程(2)的最优解为 $a = \beta$, 因此原优化方程(1)有唯一解为

$$\pi = \bar{X} + z_{1-\alpha} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \quad (3)$$

2 非同质风险组合模型及其解的讨论

对于一个保险公司来说, 随着保险公司业务规模的不断扩大, 以及保险市场竞争的日益激烈, 单一险种对于公司自身的经营来说是不相符合的. 为了保险公司自身的生存和发展, 需要制定多种类的保单来适应市场需求. 下面讨论非同质风险组合问题.

考虑一个非同质风险组合含有 k 类风险, 第 j 类包含 n_j 个独立同分布的风险 $X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jn_j}$, 其服从均值为 $\mu_j (j = 1, 2, \dots, k)$, 方差为 $\sigma_j^2 (j = 1, 2, \dots, k)$ 的正态分布, 第 j 类风险收取的保费为 π_j , 令保险公司承担的风险总数为 $n = \sum_{j=1}^k n_j$.

本文始终设

$$S_j = \sum_{h=1}^{n_j} X_{jh}, \quad S = \sum_{j=1}^k S_j,$$

$$\mu = E[S] = \sum_{j=1}^k n_j \mu_j, \quad \sigma^2 = \sum_{j=1}^k n_j \sigma_j^2$$

则有下列的定理:

定理 2 设 $r_1, r_2, \dots, r_k$ 为一组任意给定的正数, 非线性优化方程

$$\begin{aligned} F &= \min \sum_{j=1}^k \frac{1}{r_j} E\{[(S_j - n_j \pi_j)_-]^{2m}\} \\ \text{s. t. } P\left(\sum_{j=1}^k S_j > \sum_{j=1}^k n_j \pi_j\right) &\leq \alpha \end{aligned} \quad (4)$$

有唯一解.

证明 由优化条件可得

$$\sum_{j=1}^k n_j \pi_j \geq \sum_{j=1}^k n_j \mu_j + z_{1-\alpha} \sigma$$

令

$$S_j - n_j \mu_j = X_j, \quad n_j \pi_j - n_j \mu_j = a_j, \quad z_{1-\alpha} \sigma = q_{1-\alpha}$$

原优化方程(4)转化为

$$\begin{aligned} F &= \min \sum_{j=1}^k \frac{1}{r_j} E\{[(X_j - a_j)_-]^{2m}\} \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^k a_j &\geq q_{1-\alpha} \end{aligned} \quad (5)$$

由假设可知 X_j 服从 $EX_j = 0, DX_j = n_j \sigma_j^2$ 的正态分布, 从而有

$$\begin{aligned} E\{[(X_j - a_j)_-]^{2m}\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a_j} [(a_j - x_j)^{2m} \times \\ &= e^{-x_j^2/2n_j\sigma_j^2}] dx_j = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (n_j \sigma_j^2)^{(2m+1)/2} \times \\ &= \int_0^{a_j/\sqrt{n_j\sigma_j^2}} \left[\left(\frac{a_j}{\sqrt{n_j\sigma_j^2}} - t_j \right)^{2m} \times \right. \\ &= \left. e^{-t_j^2/2} \right] dt_j \end{aligned}$$

令

$$h(a) = \int_0^a (a-x)^{2m} e^{-x^2/2} dx$$

则优化方程(5)转化为

$$\begin{aligned} F &= \min \sum_{j=1}^k \frac{1}{r_j} (n_j \sigma_j^2)^{(2m+1)/2} h\left(\frac{a_j}{\sqrt{n_j \sigma_j^2}}\right) \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^k a_j &\geq q_{1-\alpha} \end{aligned} \quad (6)$$

先考虑下面的优化方程

$$\begin{aligned} F &= \min \sum_{j=1}^k \frac{1}{r_j} (n_j \sigma_j^2)^{(2m+1)/2} h\left(\frac{a_j}{\sqrt{n_j \sigma_j^2}}\right) \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^k a_j &= \beta \end{aligned} \quad (7)$$

对于优化方程(7), 应用拉格朗日乘数法求解.

设

$$F(a_1,a_2,\cdots,a_k,\lambda)=\sum_{j=1}^k\frac{1}{r_j}(n_j\sigma_j^2)^{(2m+1)/2}\times h\left(\frac{a_j}{\sqrt{n_j\sigma_j^2}}\right)+\lambda\left(\beta-\sum_{j=1}^ka_j\right)$$

令

$$\frac{\partial F}{\partial a_j}=0,\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0;j=1,\cdots,k$$

可得

$$\frac{1}{r_j}(n_j\sigma_j^2)^mh'\left(\frac{a_j}{\sqrt{n_j\sigma_j^2}}\right)=\lambda;j=1,2,\cdots,k$$
$$\sum_{j=1}^ka_j=\beta$$

$h''(a)>0(a>0)$,所以 $h'(a)$ 严格单调递增, a_j 与 λ 之间是一一对应的关系,存在严格单调递增的函数 $f_j:\lambda\rightarrow a_j$,使 $a_j=f_j(\lambda)$,式(8)可变为 $\sum_{j=1}^kf_j(\lambda)=\beta$,显然函数 $\sum_{j=1}^kf_j(\lambda)$ 也是严格单调递增的,方程 $\sum_{j=1}^kf_j(\lambda)=\beta$ 有唯一解.因此方程(8)有唯一解 $a_j(j=1,2,\cdots,k)$.

下证解 a_j 关于 β 递增.

由 $\sum_{j=1}^kf_j(\lambda)$ 关于 λ 单调递增,若 $\beta'>\beta$,则有 $\lambda'>\lambda$,从而解 $a'_j>a_j(j=1,\cdots,k)$,因此解 a_j 关于 β 递增.

由于 $h(x)$ 为单调递增函数,有

$$\sum_{j=1}^k\frac{1}{r_j}(n_j\sigma_j^2)^{(2m+1)/2}h\left(\frac{a'_j}{\sqrt{n_j\sigma_j^2}}\right)>\sum_{j=1}^k\frac{1}{r_j}(n_j\sigma_j^2)^{(2m+1)/2}h\left(\frac{a_j}{\sqrt{n_j\sigma_j^2}}\right)$$

因此取 $\beta=q_{1-\alpha}$,则方程(7)与方程(6)同解.即原优化方程(4)有唯一解.特别地,若对任意的 i,j ,满足

$$\frac{1}{r_i}(n_i\sigma_i^2)^m=\frac{1}{r_j}(n_j\sigma_j^2)^m$$

则原方程有最优解

$$\pi_j=\mu_j+\frac{\sigma_j\varphi_{1-\alpha}\sigma}{\sqrt{n_j}\sum_{j=1}^k\sqrt{n_j\sigma_j^2}}\tag{9}$$

对于一般给定的 $r_j,m,n_j,\sigma_j,\alpha$ 很难给出优化方程(4)最优解的解析表达式,但可以借助计算机软件(如 Matlab、R 语言)编程求出最优解的近似值.

下面给出求优化方程(4)最优解近似值的具体算法.

(1) 用数学软件 Matlab 编程

解积分方程 $\int_0^a(a-x)^{2m-1}e^{-x^2/2}dx=t$,当 t 和

m 给定后,可通过编程求 a 的近似解.对于优化方程(4),当给定 λ 及系数 $r_j,m,n_j,\sigma_j,\alpha$ 时,就可由已编的程序算出 $a_j=f_j(\lambda)$ 的值.

$$(2)\text{ 求解方程 }\sum_{j=1}^kf_j(\lambda)=\beta$$

用二分法求 λ 的近似解:编制程序,找区间 $[a,b]$,使得 $\sum_{j=1}^kf_j(a)<\beta,\sum_{j=1}^kf_j(b)>\beta$,取区间 $[a,b]$ 的中点 $x_0=\frac{a+b}{2}$,若 $\sum_{j=1}^kf_j(x_0)=\beta$,则 x_0 即为所求解;若 $\sum_{j=1}^kf_j(x_0)<\beta$,则解在区间 $[x_0,b]$ 内;若 $\sum_{j=1}^kf_j(x_0)>\beta$,则解在区间 $[a,x_0]$ 内,不妨设解在区间 $[a,x_0]$ 内,则取区间 $[a,x_0]$ 的中点继续上面的步骤.如此继续下去,不断将区间缩小,当区间充分小时,即可将区间的中点作为 λ 的近似解.

(3) 求优化方程(4)最优解的近似值

将求得的 λ 回代,得出 a_j 的近似解.再由 $n_j\pi_j-n_j\mu_j=a_j$ 得出优化方程(4)最优解的近似值.对保险公司来讲,研究风险与保费的负部就是研究理赔额不超过所收取保费的那部分保单,这部分可以说是保险公司生存的命脉,因为一个保险公司从保单中获得的收益全部来源于这一部分,保险公司研究这个负部函数的目的就是研究在最不利的情形下,保险公司对每份保单应该收取的最少保费.这样做可以为每份保单的定价提供一些理论依据,从而使保险公司制定出的保单更具有市场竞争力.

3 数值实例

例 1 本文考虑用 6 类非同质风险组合来对前面的结果进行计算检验.当然保险公司的实际数据远远大于 6 类,可能有 200 组、300 组甚至更多,但这并不影响对结论的检验分析.这里第 k 类包含 n_k 个风险 $X_{k,1},\cdots,X_{k,n_k}$,均值和方差分别为 μ_k 和 σ_k^2 ,其值由表 1 给出,第 k 类收取的保费为 π_k .假设所有的 $X_{i,j}$ 是独立同分布的随机变量,并服从正态分布,取定 $m=2,r_j=n_j\sigma_j^2/\sigma^2$,当给定风险水平 α 分别为 0.05 和 0.01 时,由于给定的数值满足式(3)的条件,可以利用式(3)来求定理 2 给出的模型的最优解 π_k .其结果由表 1 给出.如果取定的风险标准为 3.79% 和 0.23%,即与文献[2]数值实例中的风险标准一样,就可以得出与文献[2]表 1 中相同的结果.

表 1 同质风险组合模型的模拟结果
Tab. 1 The results of homogeneous risks portfolio model

k	n_k	μ_k	σ_k^2	π_k	
				$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
1	4 000	105	9 000	106.01	106.42
2	2 400	1 000	15 000	1 001.68	1 002.37
3	900	2 730	40 000	2 734.48	2 736.33
4	1 500	2 775	24 000	2 777.69	2 778.80
5	900	4 250	40 000	4 254.48	4 256.33
6	500	5 700	72 000	5 708.06	5 711.40

例 2 仍取例 1 所示的 6 类风险组合,其均值、方差和分布也都不变,这里取定 $m=2, r_j=1/n_j$,此时给出的数值不满足式(3)的条件,没有定理 2 给出模型解 π_k 的解析表达式,这时可通过上面给出的计算方法求定理 2 给出模型的近似解.其结果由表 2 给出.

表 2 非同质风险组合模型的模拟结果
Tab. 2 The results of heterogeneous risks portfolio model

k	n_k	μ_k	σ_k^2	π_k	
				$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
1	4 000	105	9 000	105.75	106.06
2	2 400	1 000	15 000	1 001.43	1 002.02
3	900	2 730	40 000	2 734.88	2 736.90
4	1 500	2 775	24 000	2 777.57	2 778.64
5	900	4 250	40 000	4 254.88	4 256.90
6	500	5 700	72 000	5 710.18	5 714.43

对表 1 和 2 的数据结果进行比较可以看出,表 1 对方差较大的保单收取比纯保费更多一些的保费,而对方差较小的收取相应较少的保费,这与实际情况是符合的.从保险公司的角度来看,对不同种类的保单,方差较大的保单会使保险公司面临更大的风险.保险公司也可以通过调节 r_j 来灵

活调整每类保单应收取的保费,从而规避某些潜在的风险,保证公司正常的运营.

4 结 论

非同质风险组合模型主要研究了包含非同质风险的保单组合求最优保费的问题.应用非线性优化方法可以证明,在一定风险水平下,使距离函数负部取得最小值的最优保费解是存在的;并可以通过二分法,利用计算机软件编程,求出这个最优解的近似值,从而为保险公司保费的制定提供一定的理论依据.

参考文献:

[1] Zaks Y, Frostig E, Levikson B. Optimal pricing of a heterogeneous portfolio for a given risk level [J]. *ASTIN Bulletin*, 2006, **36**(1):161-185.

[2] Frostig E, Zaks Y, Levikson B. Optimal pricing for a heterogeneous portfolio for a given risk factor and convex distance measure [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2007, **40**(3):459-467.

[3] Bowers N L, Gerber H U, Hickman J C, *et al.* *Actuarial Mathematics* [M]. Washington D C: Society of Actuaries, 1997.

[4] Dahan M, Frostig E, Langberg N A. Insurance contracts portfolios with heterogeneous insured ages [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2004, **35**(1):137-153.

[5] Denuit M, Frostig E. Heterogeneity and the need for capital in the individual model [J]. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2006(1):42-66.

[6] Frostig E, Denuit M. Monotonicity results for portfolios with heterogeneous claims arrival process [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2006, **38**(3):484-494.

Optimal pricing for heterogeneous portfolio

SONG Li-xin^{*1}, ZHU Qiang²

(1. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. Nanchang Military Academy, Nanchang 330103, China)

Abstract: In view of a portfolio containing heterogeneous risks, when setting premium, the insurance company should consider their own risks. On the other hand, the premium that the insured pays has to be fair. This fairness is measured by the distance between the risk and the premium paid. A non-linear optimizing method is applied to prove the existence of optimal premium to make the negative part of the distance function minimized for a given risk level. And the approximation of the optimal solution is obtained by dichotomy and computer programming. Finally, some numerical examples are given to prove the correctness of the results.

Key words: heterogeneous portfolio; distance function; non-linear programming formulation