第52卷第6期
2012年11月
大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology
Vol. 52, No. 6
Nov. 2012

文章编号：1000-8608(2012)06-0932-05

具有共同松弛时间的恶化型工件排序问题研究

王吉波*1，王建军2，何 平2

（1.沈阳航空航天大学 理学院，辽宁 沈阳 110136；
2.大连理工大学 系统工程研究所，辽宁 大连 116024）

摘要：研究工件加工时间具有恶化效应的单机松弛工期排序问题.其中恶化效应指的是工件的实际加工时间是其开工时间的递增函数且所有工件的恶化率相同，工件的松弛工期等于其实际加工时间加上共同的松弛时间.目标是确定工件的一个排序和工件工期的共同松弛时间使得工件的提前时间、延迟时间和工期的共同松弛时间的线性加权和达到最小.用运筹学方法证明了该问题可以转化为两个向量的乘积问题，从而多项式时间可解，并给出了求解的最优算法.

关键词：排序；恶化效应；松弛工期
中图分类号：O223；C934　　**文献标志码：**A

0 引 言

在传统的排序问题中，一般假设工件的加工时间为给定的常数，然而在现实生产中，存在着工件的加工时间是开工时间递增线性函数的情况，这一类问题称为具有恶化效应的排序问题.Gupta 等[1,2]首先研究了具有恶化效应的单机排序问题.Mosheiov[3]研究了总完工时间单机排序问题，其中假定工件的基本加工时间为常数，这个问题的复杂性还没有解决，是一个开放问题，不过其证明了此问题具有 V 形性质，并给出了启发式算法.Mosheiov[4]还研究了工件加工时间为简单恶化效应的单机问题，对几个正则目标函数分别给出了最优算法.Bachman 等[5]研究了工件具有一般线性恶化效应的最大延误单机排序问题，证明了此问题是 NP-难的，并给出两个启发式算法.Cheng 等[6]研究了工件具有线性恶化效应的工期指派单机排序模型，目标是使所有工件的提前成本、延迟成本和工期指定成本的线性加权和最小，证明了此问题是多项式时间可解决的.Ji 等[7]研究了机器具有到达约束的简单线性恶化效应的单机排序问题，证明了最大完工时间与总完工时间问题都是 NP-难的，并给出了拟多项式时间算法解决.Wu 等[8]研究了工件具有简单线性恶化效应的单机成组排序问题，证明了最大完工时间与总完工时间问题都是多项式时间可解的.Leung 等[9]研究了分批单机排序模型，其中工件的加工时间具有分段恶化效应，对总完工时间极小问题，证明了此问题是 NP-难的，并对一些特殊情况给出了多项式时间近似算法.Oron[10]研究了一类单机排序模型，其中工件的加工时间是开工时间的简单线性函数，对完工时间的总绝对差问题，证明了此问题具有 V 形性质，并用这个性质给出了两个多项式时间启发式算法.Wang 等[11]研究了工件具有线性递减恶化效应的两台机器的流水作业排序问题，对总完工时间问题给出了分支定界算法.Wang[12]研究了工件具有线性递减恶化效应的单机排序问题，其中工件间具有链优先约束和串并有向图优先约束，对最大完工时间问题给出了多项式时间最优算法.Valerie 等[13]研究了工件准备时间依赖资源的单机恶化型排序问题，对于最大完工时间问题给出了多项式时间算法.Ji 等[14]研究了具有恶化效应的单机分批排序.Ng 等[15]研究了具有恶化工件的流水作业排序问题，其中工件具有成比例恶化效应，对总完工时间问题给出了分支定界算法.Wang 等[16]研究了工件

收稿日期：2011-03-07；　**修回日期：**2012-09-21.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11001181,70902033,71271039)；辽宁省高等学校优秀人才支持计划资助项目(LJQ2011014).
作者简介：王吉波*(1975-)，男，大连理工大学 2005 届博士，教授，E-mail：wangjibo75@yahoo.com.cn.

同时具有恶化效应和学习效应的单机排序问题，对一个所有工件具有共同工期的排序问题给出了多项式时间最优算法. 文献[17]研究了机器具有维修时间的单机排序问题，对所有工件具有共同松弛工期的排序问题给出了多项式时间最优算法. Wang 等[18]研究了具有恶化工件的单机排序问题，其中工件间具有链优先约束，并对加权完工时间平方和问题给出了多项式时间最优算法. Wang 等[19]研究了工件具有递减恶化效应的流水作业排序问题，目标函数为极小化最大完工时间，证明了一些特殊情况下该问题是多项式时间可解的. Zhao 等[20,21]研究了工件具有恶化效应的单机排序问题，其中机器有一个恶化维修时间，对一个所有工件具有共同窗口的排序问题给出了多项式时间最优算法. Alidaee 等[22,23]分别综述了工件恶化效应. 文献[24]总结了近年来工件加工时间与开工时间有关的研究成果，及一些尚未解决的问题和未来研究的方向.

Cheng 等[6]研究了工件具有线性恶化效应的单机排序问题，其中所有工件的恶化率都相同，所有工件的工期也相同(CON 模型). 目标函数为最小化提前成本、延迟成本和工期成本的加权和，证明了此问题是多项式时间可解的. 本文讨论工期的另外一种情况，即所有工件的工期由其加工时间加上共同的松弛时间(SLK 模型)组成，这个模型最先由 Adamopoulos 等[25]提出，研究了工件具有松弛工期的单机排序问题，目标函数为最小化提前成本、延迟成本和工期的共同松弛时间的加权和，对此问题他们给出了多项式时间最优算法. 本文将此问题推广到工件具有恶化效应的情况，证明此问题仍然多项式时间可解.

1　问题描述

假定 n 个工件 $J=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$ 要在一台机器上加工，此机器在同一时刻只能加工一个工件，且工件的加工过程不允许中断. 同 Cheng 等[6]一样，假定工件 $J_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的实际加工时间为

$$p_j = a_j + bt \tag{1}$$

其中 a_j 为工件 J_j 的基本加工时间，$b\geqslant 0$ 为工件的恶化率，t 为工件的开工时间. 对于工件的一个排序(即加工顺序)π，令 $C_j=C_j(\pi)$ 表示工件 J_j 的完工时间，$W_j=W_j(\pi)=C_{j-1}(\pi)$ 表示工件 J_j 的等待时间. 同文献[25]一样，假定工件 J_j 的工期 $d_j=p_j+q$，其中 q 为所有工件工期的共同松弛时间，是一个决策变量. 记 $E_j=\max\{0,d_j-C_j\}$，为工件 J_j 的提前成本，$T_j=\max\{0,C_j-d_j\}$ 表示工件 J_j 的延迟成本. 目标是确定工件的一个排序 π 和工件工期的共同松弛时间 q 使提前成本、延迟成本和工期的共同松弛时间的加权和最小，即 $f(q,\pi)=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma q)$，用三参数表示法可表示为 $1\mid p_j=a_j+bt\mid\sum(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma q)$，其中 α、β 和 γ 分别表示每一时间单元的提前、延迟和松弛时间的惩罚因子.

2　主要定理

引理 1　如果 $C_{[j]}\geqslant d_{[j]}$，则 $C_{[j+1]}\geqslant d_{[j+1]}$，其中$[j]$表示排在第 j 个位置.

证明　对于一个给定的排序 π，如果 $C_{[j]}\geqslant d_{[j]}$，能够得到 $C_{[j]}\geqslant d_{[j]}\Leftrightarrow C_{[j-1]}+p_{[j]}\geqslant p_{[j]}+q\Rightarrow C_{[j-1]}+p_{[j]}\geqslant q\Leftrightarrow C_{[j-1]}+p_{[j]}+p_{[j+1]}\geqslant q+p_{[j+1]}\Leftrightarrow C_{[j]}+p_{[j+1]}\geqslant d_{[j+1]}$，即 $C_{[j+1]}\geqslant d_{[j+1]}$.

引理 2　如果 $C_{[j]}\leqslant d_{[j]}$，则 $C_{[j-1]}\leqslant d_{[j-1]}$.

证明　对于一个给定的排序 π，如果 $C_{[j]}\leqslant d_{[j]}$，能够得到 $C_{[j]}\leqslant d_{[j]}\Leftrightarrow C_{[j-1]}+p_{[j]}\leqslant p_{[j]}+q\Leftrightarrow C_{[j-1]}\leqslant q\Rightarrow C_{[j-1]}\leqslant q+p_{[j-1]}$，即 $C_{[j-1]}\leqslant d_{[j-1]}$.

由引理 1 和 2 可知，排在 $J_{[k]}$ 之前的工件都是提前完成的，排在 $J_{[k]}$ 之后的工件都没有按工期时间完成.

引理 3　对于给定排序 $\pi=(J_1,J_2,\cdots,J_n)$，第 j 个工件 J_j 的加工时间为

$$p_j = a_j+\sum_{l=1}^{j-1}b(1+b)^{j-l-1}a_l \tag{2}$$

证明　用数学归纳法很容易证明此引理.

引理 4　令 x_j、$y_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是两个数值序列，如果 x_j 和 y_j 是两个相反序列，则乘积和 $\sum_{j=1}^{n}x_jy_j$ 最小.

证明　见文献[26].

定理 1　在问题 $1\mid p_j=a_j+bt\mid\sum(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma q)$ 的最优排序中，$q=C_{[k-1]}=W_{[k]}$.

证明　在最优排序中，假设 $W_{[k-1]}\leqslant q\leqslant W_{[k]}$，令 $\Delta=q-W_{[k-1]}$，可知 $0\leqslant\Delta\leqslant p_{[k-1]}$.

工件 $J_{[j]}(j=1,2,\cdots,k-2,k-1)$ 的提前完工成本为

$$\begin{aligned}Z_{[1]}&=\alpha(d_{[1]}-C_{[1]})=\\&\alpha[p_{[1]}+q-(W_{[k-1]}-(p_{[2]}+\\&p_{[3]}+\cdots+p_{[k-3]}+p_{[k-2]}))]=\\&\alpha(\Delta+p_{[1]}+p_{[2]}+p_{[3]}+\cdots+\\&p_{[k-3]}+p_{[k-2]})\\Z_{[2]}&=\alpha(d_{[2]}-C_{[2]})=\\&\alpha[p_{[2]}+q-(W_{[k-1]}-(p_{[3]}+\cdots+\\&p_{[k-3]}+p_{[k-2]}))]=\\&\alpha(\Delta+p_{[2]}+p_{[3]}+\cdots+p_{[k-3]}+\\&p_{[k-2]})\\&\vdots\\Z_{[k-2]}&=\alpha(\Delta+p_{[k-2]})\\Z_{[k-1]}&=\alpha\Delta\end{aligned}$$

工件 $J_{[j]}(j=k,k+1,\cdots,n)$ 的延迟完工成本描述如下：

$$\begin{aligned}Z_{[k]}&=\beta(C_{[k]}-d_{[k]})=\\&\beta(W_{[k-1]}+p_{[k-1]}+p_{[k]}-p_{[k]}-q)=\\&\beta(p_{[k-1]}-\Delta)\\Z_{[k+1]}&=\beta(C_{[k+1]}-d_{[k+1]})=\\&\beta(W_{[k-1]}+p_{[k-1]}+p_{[k]}+p_{[k+1]}-\\&p_{[k+1]}-q)=\beta(p_{[k-1]}+p_{[k]}-\Delta)\\&\vdots\\Z_{[n-1]}&=\beta(p_{[k-1]}+p_{[k]}+\cdots+p_{[n-2]}-\Delta)\\Z_{[n]}&=\beta(p_{[k-1]}+p_{[k]}+\cdots+p_{[n-2]}+\\&p_{[n-1]}-\Delta)\end{aligned}$$

总成本可以被描述为

$$\begin{aligned}Z=&\sum_{j=1}^{n}Z_{[j]}+n\gamma q=\\&\alpha(k-1)\Delta+\alpha\sum_{j=1}^{k-2}jp_{[j]}-\beta(n-k+1)\Delta+\\&\beta\sum_{j=k-1}^{n}(n-j)p_{[j]}+\gamma n\Delta+\gamma n\sum_{j=1}^{k-2}p_{[j]}=\\&A\Delta+B\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $A=\alpha(k-1)-\beta(n-k+1)+\gamma n$，$B=\alpha\sum_{j=1}^{k-2}jp_{[j]}+\beta\sum_{j=k-1}^{n}(n-j)p_{[j]}+\gamma n\sum_{j=1}^{k-2}p_{[j]}$. B 是一个独立于 Δ 的数，由线性函数的性质（Z 是关于 Δ 的线性函数），当 $\Delta=0$ 或 $\Delta=p_{[k-1]}$ 时，Z 达到最小，定理得证.

定理 2 $q=C_{[k-1]}=W_{[k]}$，其中 $k=\left\lceil\dfrac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta}\right\rceil$.

证明 当改变 q 时，由扰动技术测量总成本的变化.

(a) 将 q 向左移动 Δ 个单位时，总成本变化

$$-\alpha(k-1)\Delta+\beta(n-k+1)\Delta-n\gamma\Delta$$

(b) 将 q 向右移动 Δ 个单位时，总成本变化

$$\alpha k\Delta-\beta(n-k)\Delta+n\gamma\Delta$$

因为 q 未移动时的目标函数 $f(q,\pi)=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma q)$ 最优，所以式(4)和(5)分别为非负数：

$$-\alpha(k-1)\Delta+\beta(n-k+1)\Delta-n\gamma\Delta\geqslant0\Rightarrow$$

$$k\leqslant\frac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta}+1$$

$$\alpha k\Delta-\beta(n-k)\Delta+n\gamma\Delta\geqslant0\Rightarrow k\geqslant\frac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta}$$

整理后得到 $k=\left\lceil\dfrac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta}\right\rceil$.

定理 3 最优总成本函数可以被写为

$$f(q,\pi)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j a_{[j]}$$

其中 $\omega_j=\theta_j+\sum_{l=j+1}^{n}b(1+b)^{l-j-1}\theta_l$，$\theta_j=\min\{\alpha j+n\gamma,\beta(n-j)\}$.

证明 根据定理 1，可知最优的目标函数为式(3)，即

$$\begin{aligned}f(q,\pi)=&\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma q)=\\&\alpha\sum_{j=1}^{k-2}jp_{[j]}+\beta\sum_{j=k-1}^{n}(n-j)p_{[j]}+\\&\gamma n\sum_{j=1}^{k-2}p_{[j]}=\\&\sum_{j=1}^{k-2}(\alpha j+n\gamma)p_{[j]}+\sum_{j=k-1}^{n}\beta(n-j)p_{[j]}=\\&\sum_{j=1}^{n}\theta_j p_{[j]}\end{aligned}$$

其中 $\theta_j=\min\{\alpha j+n\gamma,\beta(n-j)\}$. 将式(2)代入上式得

$$\begin{aligned}f(q,\pi)=&\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma q)=\\&\sum_{j=1}^{n}\theta_j[a_{[j]}+\sum_{l=1}^{j-1}b(1+b)^{j-l-1}a_{[l]}]=\\&\sum_{j=1}^{n}[\theta_j+\sum_{l=j+1}^{n}b(1+b)^{l-j-1}\theta_l]a_{[j]}=\\&\sum_{j=1}^{n}\omega_j a_{[j]}\end{aligned}$$

其中 $\omega_j = \theta_j + \sum_{l=j+1}^{n} b(1+b)^{l-j-1}\theta_l$.

3　求解算法

由上面的 3 个定理和引理 4，可以给出问题 $1 \mid p_j = a_j + bt \mid \sum(\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q)$ 的最优求解算法步骤如下.

步骤 1　指派第 $k-1$ 个位置的工件的完工时间为松弛工期 q，即 $q = C_{[k-1]}$，并且 $k = \left\lceil \frac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta} \right\rceil$.

步骤 2　计算各个工件的位置权数 $\omega_r, r = 1,2,\cdots,n$.

步骤 3　对 ω_r 和 a_j 进行重新安排，安排原则为对最大的 a_j 分配给最小的 ω_r，将第二大的 a_j 分配给第二小的 ω_r，依次类推.

显然该算法的复杂性为 $O(n\log n)$.

下面给出一个算例来说明算法的可行性.

例 1　7 个工件 $J = \{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6, J_7\}$，$a_1 = 10, a_2 = 8, a_3 = 7, a_4 = 15, a_5 = 14, a_6 = 3, a_7 = 9, \alpha = 10, \beta = 15, \gamma = 5, b = 0.05$.

解

步骤 1　$k = \lceil n(\beta-\gamma)/(\alpha+\beta) \rceil = \lceil 7\times(15-5)/(10+15) \rceil = 3$

步骤 2　$\theta_1 = 50, \theta_2 = 65, \theta_3 = 80, \theta_4 = 60, \theta_5 = 40, \theta_6 = 20, \theta_7 = 0$.

$\omega_1 = 64.288\,3$，$\omega_2 = 75.512\,6$，$\omega_3 = 86.202\,5$，$\omega_4 = 63.05$，$\omega_5 = 41$，$\omega_6 = 20$，$\omega_7 = 0$.

步骤 3　最优排序为 $[J_2, J_3, J_6, J_7, J_1, J_5, J_4]$，$q^* = 15.4$，$f(q^*, \pi^*) = 2\,558.952$.

4　结　语

本文研究了工件加工时间具有恶化效应的单机排序问题，其中工件的恶化率都相同，工件的工期具有共同的松弛时间. 目标是确定工件的一个排序和工件工期的共同松弛时间，使工件的提前时间、延迟时间和工期的共同松弛时间的线性加权和达到最小，证明了该问题仍然多项式时间可解. 探讨其他的非正则目标函数，研究多机问题或研究更一般的恶化函数等是要进一步研究的课题.

参考文献：

[1] Gupta J N D, Gupta S K. Single facility scheduling with nonlinear processing times [J]. **Computers and Industrial Engineering**, 1988, **14**(4): 387-393.

[2] Browne S, Yechiali U. Scheduling deteriorating jobs on a single processor [J]. **Operations Research**, 1990, **38**(3): 495-498.

[3] Mosheiov G. V-shaped policies to schedule deteriorating jobs [J]. **Operations Research**, 1991, **39**(6): 979-991.

[4] Mosheiov G. Scheduling jobs under simple linear deterioration [J]. **Computers and Operations Research**, 1994, **21**(6): 653-659.

[5] Bachman A, Janiak A. Minimizing maximum lateness under linear deterioration [J]. **European Journal of Operational Research**, 2000, **126**(3): 557-566.

[6] Cheng T C E, Kang L, Ng C T. Due-date assignment and single machine scheduling with deteriorating jobs [J]. **Journal of the Operational Research Society**, 2004, **55**(2): 198-203.

[7] Ji M, He Y, Cheng T C E. Scheduling linear deteriorating jobs with an availability constraint on a single machine [J]. **Theoretical Computer Science**, 2006, **362**(1-3): 115-126.

[8] Wu C C, Shiau Y R, Lee W C. Single-machine group scheduling problems with deterioration consideration [J]. **Computers and Operations Research**, 2008, **35**(5): 1652-1659.

[9] Leung J Y T, Ng C T, Cheng T C E. Minimizing sum of completion times for batch scheduling of jobs with deteriorating processing times [J]. **European Journal of Operational Research**, 2008, **187**(3): 1090-1099.

[10] Oron D. Single machine scheduling with simple linear deterioration to minimize total absolute deviation of completion times [J]. **Computers and Operations Research**, 2008, **35**(6): 2071-2078.

[11] WANG Ji-bo, LIU Li-li. Two-machine flow shop scheduling with linear decreasing job deterioration [J]. **Computers and Industrial Engineering**, 2009, **56**(4): 1487-1493.

[12] WANG Ji-bo. Single machine scheduling with decreasing linear deterioration under precedence constraints [J]. **Computers and Mathematics with Applications**, 2009, **58**(1): 95-103.

[13] Valerie C Y, ZHU Lin-yan, SUN Lin-hui, *et al*. Single machine scheduling time-dependent jobs with resource-dependent ready times [J]. **Computers and Industrial Engineering**, 2010, **58**(1):84-87.

[14] Ji M, Cheng T C E. Batch scheduling of simple linear deteriorating jobs on a single machine to minimize makespan [J]. **European Journal of Operational Research**, 2010, **202**(1):90-98.

[15] Ng C T, WANG Ji-bo, Cheng T C E, *et al*. A branch-and-bound algorithm for solving a two-machine flow shop problem with deteriorating jobs [J]. **Computers and Operations Research**, 2010, **37**(1):83-90.

[16] WANG Ji-bo, GUO Qian. A due-date assignment problem with learning effect and deteriorating jobs [J]. **Applied Mathematical Modeling**, 2010, **34**(2):309-313.

[17] WANG Xiao-yuan, WANG Ming-zheng. Single machine common flow allowance scheduling with a rate-modifying activity [J]. **Computers and Industrial Engineering**, 2010, **59**(4):898-902.

[18] WANG J B, WANG J J, JI P. Scheduling jobs with chain precedence constraints and deteriorating jobs [J]. **Journal of the Operational Research Society**, 2011, **62**(9):1765-1770.

[19] WANG Xiao-yuan, WANG Ming-zheng, WANG Ji-bo. Flow shop scheduling to minimize makespan with decreasing linear deterioration [J]. **Computers and Industrial Engineering**, 2011, **60** (4):840-844.

[20] ZHAO Chuan-li, TANG Heng-yong. A note to due-window assignment and single machine scheduling with deteriorating jobs and a rate-modifying activity [J]. **Computers and Operations Research**, 2012, **39**(6):1300-1303.

[21] Cheng T C E, Yang S J, Yang D L. Common due-window assignment and scheduling of linear time-dependent deteriorating jobs and a deteriorating maintenance activity [J]. **International Journal of Production Economics**, 2012, **135**(1):154-161.

[22] Alidaee B, Womer N K. Scheduling with time dependent processing times: Review and extensions [J]. **Journal of the Operational Research Society**, 1999, **50**(7):711-720.

[23] Cheng T C E, Ding Q, Lin B M T. A concise survey of scheduling with time-dependent processing times [J]. **European Journal of Operational Research**, 2004, **152**(1):1-13.

[24] Gawiejnowicz S. **Time-Dependent Scheduling** [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

[25] Adamopoulos G I, Pappis C P. Single machine scheduling with flow allowances [J]. **Journal of the Operational Research Society**, 1996, **47**(10):1280-1285.

[26] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. **Inequalities** [M]. London: Cambridge University Press, 1967.

Research on common slack time scheduling problem with deteriorating jobs

WANG Ji-bo*[1], WANG Jian-jun[2], HE Ping[2]

(1. School of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China;
2. Institute of Systems Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The single-machine slack due date scheduling problem with deteriorating jobs is researched, where the deterioration effect means that the actual processing time of jobs is defined as increasing function of their starting time and the deteriorating rates of all jobs are identical, and due date of the job is equal to its actual processing time plus the common slack time. The objective is to determine the optimal scheduling and the common slack time simultaneously to minimize the sum of earliness, tardiness and common slack time. It is proved that the problem can be transformed into the product of two vectors by the operations research method, thus can be solved in polynomial time, and the optimal algorithm to solve the problem is given.

Key words: scheduling; deteriorating jobs; slack (SLK) due date

（第 52 卷卷终）