

短峰波与圆弧型贯底式多孔介质防波堤相互作用研究

林 皋^{*1,2}, 刘 俊^{1,2}, 李建波^{1,2}

(1. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;
2. 大连理工大学 建设工程学部 水利工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 将比例边界有限元法(SBFEM)推广到短峰波与圆弧型贯底式多孔介质防波堤相互作用研究中. 将圆弧延伸构建一个虚拟圆柱面, 对于圆弧段与圆弧延伸段, 分别采用不同的孔隙影响系数. 该圆将整个流场划分成一个无限子域和一个有限子域, 并利用变分原理在各个子域上推导了 SBFEM 的基本方程. 然后, SBFEM 针对无限域和有限域分别采用汉开尔函数和贝塞尔函数作为基函数来求解对应域的解, 并在公共圆边界处加以匹配. 数值计算验证了该方法是一种利用很少单元离散虚拟圆便能得到精确结果的高效方法. 进一步给出了不同波向入射、相对波数、防波堤不同孔隙影响系数、不同张角等参数对防波堤波浪荷载、波浪爬升的影响, 这为该类防波堤水动力分析和结构设计提供了有价值的参考.

关键词: 比例边界有限元法; 短峰波; 多孔介质防波堤; 波浪绕射

中图分类号: O353.2 **文献标志码:** A

0 引言

在海岸工程和港口工程中, 多孔介质防波堤往往可以有效地减少海浪对海岸和近海结构的冲击. 相对不透水防波堤, 它们还可以更有效地降低共振^[1]. 近年来, 波浪与多孔介质防波堤相互作用研究已引起了众多近海与海岸工程研究人员的极大关注. 其中, Chwang^[2]研究过多孔介质板对造波装置的应用, Dalrymple 等^[3]研究了斜入射波与无限长多孔介质防波堤相互作用时的反射和透射特性, Twu 等^[4]和 Wang 等^[5]分别研究过刚性和弹性的多孔介质结构在防波堤中的使用, Huang 等^[6]报道基于 Biot 的多孔介质弹性理论下的多孔防波堤的惯性效应, Yu 和 Chwang^[7-9]分别对波穿过多孔介质防波堤的传输特性、多孔介质防波堤与海港受到任意角度入射波作用时所产生的共振特性以及过水波与水下水平多孔介质板的相互作用做了深入研究, Darwiche 等^[10]用解析的方法探讨了波浪与半透空式防波堤的相互作用, Williams 等^[11-13]分别分析了波浪与坐落于储油箱上半透空圆柱、浮式多孔介质圆柱以及贯底式多孔介质圆柱

防波堤的相互作用. 而圆弧型多孔介质防波堤受到的关注还很少. 程建生等^[14]曾通过解析方式研究圆弧型贯底式多孔介质防波堤的防浪效果. 同时, 在上述文献研究波浪与多孔防波堤的相互作用中, 大多假设波浪为二维平面波. 然而, 海浪在实际情况中非常复杂, 往往需要用三维短峰波来描述.

比例边界有限元法(scaled boundary finite element method, 简称 SBFEM)是由 Wolf 等^[15]首先提出的一种新的半解析方法. SBFEM 融合了有限元方法和边界元方法的优点, 它只需用有限元离散计算域部分边界, 从而达到降维的目的, 减少了工作量. 同时, 不需要基本解就能够满足无穷远处辐射条件, 进一步减少了工作量. 这种方法在径向是完全解析的. 目前这种方法已被广泛应用于求解弹性静、动力学问题、水库坝体与水体的相互作用、断裂力学、绕流场和势流场、声传播学、大坝前渗流以及电磁场等问题^[16]. 与此同时, Song 等^[17]在应用 SBFEM 求解波浪与非均匀多孔介质圆柱相互作用时, 充分利用圆的几何特性, 对比例坐标系统做了一定修改后推导出新的比例

收稿日期: 2011-04-04; 修回日期: 2012-05-04.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(重点项目 51138001); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(DUT12RCC3747); 中德合作研究项目(GZ566).

作者简介: 林 皋^{*}(1929-), 男, 教授, 博士生导师, 中国科学院院士, E-mail: gaolin@dlut.edu.cn.

边界有限元方程. 对非均匀多孔介质圆柱的孔隙影响系数问题, 引入了孔隙影响系数对角矩阵 $G^{[17]}$. 本文将在 Song 和 Tao 研究的基础上, 研究短峰波与圆弧型贯底式多孔介质防波堤的相互作用, 应用变分原理推导出对应问题的比例边界有限元方程并进行求解, 并进一步给出不同波向入射、防波堤不同孔隙影响系数、不同张角等参数对防波堤波浪荷载、波浪爬升的影响.

1 问题的描述

如图 1 所示, 设在均匀水深 h 的海域中设置有半径为 a 的圆弧型浮式防波堤, 堤为刚性垂直薄壁、空间固定. 对于坐标系 $Oxyz$, 其中 O 为原点, 选在中心处; Oxy 平面位于静水面上, 圆弧堤的圆心角为 θ , 垂直方向为 Oz 轴. 整个流场被虚拟圆柱面划分成两个子结构: 一个为无限子域 Ω_2 , 另外一个为有限子域 Ω_1 . 基于线性理论, 无限子域 Ω_2 中的速度总势 Φ_2 由入射势和散射势之和表示, 即 $\Phi_2 = \Phi_2^i + \Phi_2^s$; 有限域的速度总势用 Φ_1 表达. 用速度势 Φ 统一代表 Φ_1 、 Φ_2 、 Φ_2^i 以及 Φ_2^s . 应用分离变量法, 通过分离出时间项 t 和空间项 z , 可得速度势 $\Phi(x, y, z, t)^{[17]}$:

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y) Z(z) e^{-i\omega t} \quad (1)$$

其中 ω 为角频率. 满足边界条件的解为

$$Z(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (2)$$

$$\omega^2 = gh \tanh kh \quad (3)$$

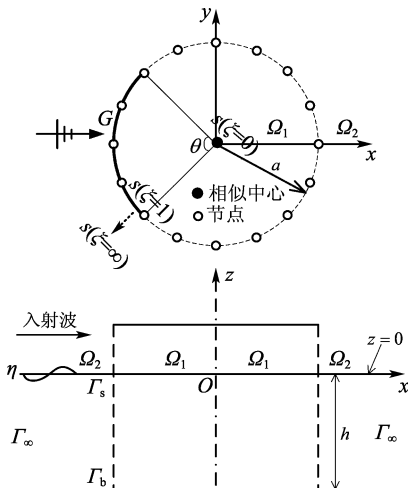


图 1 圆弧型贯底式多孔介质防波堤以及比例边界有限元方法模型

Fig. 1 Arc-shaped bottom-mounted porous breakwater and SBFEM model

同样无限域速度总势 ϕ_2 表示为 $\phi_2^i + \phi_2^s$, ϕ_2^i 、 ϕ_2^s 和 ϕ_1 均可由二维 Helmholtz 方程进行描述, 统一表达为 $\phi(x, y)$, 即

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi = 0 \quad (4)$$

两个域界面处的边界条件可由下式表达:

$$\phi_{1,n} = iGk(\phi_1 - \phi_2^s - \phi_2^i); r = a \quad (5)$$

在式(5)中, 对非多孔介质圆弧段 G 值取为无穷大.

无限子域的散射速度势 ϕ_2^s 还需满足无穷远处的 Sommerfeld 边界条件:

$$\lim_{k_r \rightarrow \infty} (k_r)^{1/2} (\phi_{2,r}^s - i k \phi_2^s) = 0; \text{在 } \Omega_2 \quad (6)$$

入射速度势 ϕ^i 可由下式表达^[17]:

$$\phi^i = -\frac{igA}{\omega} Z(z) e^{i(k_x x - \omega t)} \cos(k_y y) \quad (7)$$

待总场速度势 ϕ 得出后, 其他变量可通过以下公式求出:

$$v = \nabla \Phi \text{ (波速度)} \quad (8)$$

$$\eta = \frac{i\omega}{g} \phi \text{ (波面高度)} \quad (9)$$

$$p = -\rho \Phi_{,t} \text{ (波动压力)} \quad (10)$$

2 比例边界有限元方程推导

设 ϕ 在各子域边界上的法向导数为

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{v}_n \quad (11)$$

方程(4)和(11)的等效泛函变分可表达为

$$\delta F(\phi) = \delta \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - k \phi^2 \right] d\Omega - \oint_{\Gamma} \bar{v}_n \phi d\Gamma \right) = 0 \quad (12)$$

为了通过 SBFEM 求解上述变分问题, 需建立比例坐标. 如图 2 所示, 在域内选择一点 O 作为相似中心, 建立一个环向坐标 s 和从比例中心出发指向计算域边界的辐射坐标 ξ . 环向坐标从侧面 $s = s_b$ 开始, 到侧面 $s = s_a$ 结束, 当 s_a 和 s_b 重合时, 计算域封闭. 在比例中心处 $\xi = 0$, 在计算区域边界上 $\xi = 1$, 对于有限子域 Ω_1 , $0 = \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1 = 1$; 无限子域 Ω_2 , $1 = \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1 = \infty$. 笛卡儿坐标与相似坐标的变换关系(s 可以通过边界节点插值得出, 本文采用三节点二次曲线插值函数 $N(s)$, 即 $s = N(s) \mathbf{s}$, $\mathbf{s}$ 为三节点弧长向量)如下:

$$\hat{x} = x_0 + \xi a \cos(s/a) \quad (13)$$

$$\hat{y} = y_0 + \xi a \sin(s/a) \quad (14)$$

其中 $(\hat{x}, \hat{y})$ 为域内一点; (x, y) 为边界节点; $(x_0,$

y_0) 为相似中心.

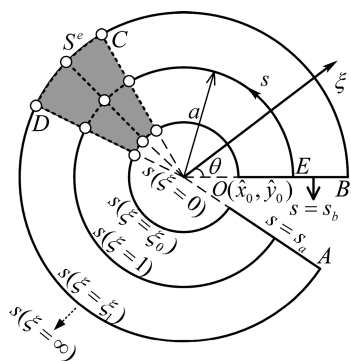


图2 SBFEM 基本模型

Fig. 2 The SBFEM model

两坐标系统的求导, 可通过雅克比矩阵加以联系:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{s}{a} \right) & -a \sin \left(\frac{s}{a} \right) \\ \sin \left(\frac{s}{a} \right) & a \cos \left(\frac{s}{a} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial s} \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中

$$|\mathbf{J}| = a(\cos^2(s/a) + \sin^2(s/a)) = a \quad (16)$$

在比例坐标下, 梯度算子可以表示为

$$\nabla = \mathbf{b}_1(s) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{b}_2(s) \frac{\partial}{\partial s} \quad (17)$$

其中

$$\mathbf{b}_1(s) = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \cos(s/a) \\ \sin(s/a) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}_2(s) = \begin{pmatrix} -\sin(s/a) \\ \cos(s/a) \end{pmatrix} \quad (18)$$

速度势函数也用插值函数 $\mathbf{N}(s)$ 来进行离散:

$$\phi(\xi, s) = \mathbf{N}(s) \boldsymbol{\phi}(\xi) \quad (19)$$

将式(17)和(19)代入式(12), 经整理后可得

$$\begin{aligned} \delta F(\phi) = & \int_{\Omega} \left[\mathbf{B}_1(s) \delta \boldsymbol{\phi}(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_2(s) \delta \boldsymbol{\phi}(\xi) \right]^T \times \\ & \left[\mathbf{B}_1(s) \boldsymbol{\phi}(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_2(s) \boldsymbol{\phi}(\xi) \right] d\Omega - \\ & \int_{\Omega} k^2 \delta \boldsymbol{\phi}^T(\xi) \mathbf{N}^T(s) \mathbf{N}(s) \boldsymbol{\phi}(\xi) d\Omega - \\ & \oint_{\Gamma} \delta \boldsymbol{\phi}^T(\xi) \mathbf{N}^T(s) \bar{v}_n d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$\mathbf{B}_1(s) = \mathbf{b}_1(s) \mathbf{N}(s), \quad \mathbf{B}_2(s) = \mathbf{b}_2(s) \mathbf{N}(s), \quad (21)$$

引入以下系数矩阵 $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{M}_0$ 和 $\mathbf{F}_s(\xi)$:

$$\mathbf{E}_0 = \int_s \mathbf{B}_1^T(s) \mathbf{B}_1(s) |\mathbf{J}| ds = \int_s \frac{1}{a} \mathbf{N}^T(s) \mathbf{N}(s) ds \quad (22)$$

$$\mathbf{E}_1 = \int_s \mathbf{B}_2^T(s) \mathbf{B}_1(s) |\mathbf{J}| ds = 0 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 = & \int_s \mathbf{B}_2^T(s) \mathbf{B}_2(s) |\mathbf{J}| ds = \\ & a \int_s (\mathbf{N}(s),_{ss})^T \mathbf{N}(s),_{ss} ds \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 = & \int_s \mathbf{N}^T(s) \mathbf{N}(s) |\mathbf{J}| ds = \\ & a \int_s \mathbf{N}^T(s) \mathbf{N}(s) ds = a^2 \mathbf{E}_0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s(\xi) = & \mathbf{N}^T(s_a) (-\bar{v}_n(\xi, s_a)) |\mathbf{J}(s_a)| + \\ & \mathbf{N}^T(s_b) (-\bar{v}_n(\xi, s_b)) |\mathbf{J}(s_b)| \end{aligned} \quad (26)$$

式中: $\mathbf{F}_s(\xi)$ 为侧面边界处产生的通量, 注意到本文中 $\mathbf{F}_s(\xi) = \mathbf{0}$.

对式(20)中含 $\delta \boldsymbol{\phi}(\xi)_{,\xi}$ 的项做分部积分, 由 $\delta \boldsymbol{\phi}(\xi)$ 任意性最终可得(假设 $\zeta = ka\xi$)

$$\begin{aligned} \zeta^2 \boldsymbol{\phi}(\zeta)_{,\zeta\zeta} + \zeta \boldsymbol{\phi}(\zeta)_{,\zeta} - \mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_2 \boldsymbol{\phi}(\zeta) + \zeta^2 \boldsymbol{\phi}(\zeta) = \\ \mathbf{F}_s(\zeta) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\mathbf{E}_0 \xi \boldsymbol{\phi}(\xi)_{,\xi} \big|_{\xi=\xi_0} = - \int_s \mathbf{N}^T(s) \bar{v}_n(\xi_0, s) \xi_0 ds \quad (28)$$

$$\mathbf{E}_0 \xi \boldsymbol{\phi}(\xi)_{,\xi} \big|_{\xi=\xi_1} = \int_s \mathbf{N}^T(s) \bar{v}_n(\xi_1, s) \xi_1 ds \quad (29)$$

方程(27)即为 SBFEM 的基本方程, 而式(28)和(29)为 SBFEM 内、外边界条件.

3 比例边界有限元方程求解

3.1 求无限子域 Ω_2 的解

方程(27)的解可以 $H_{r_j}(\zeta) T_j$ 作为基函数来表示:

$$\boldsymbol{\phi}_2(\zeta) = \sum_{j=1}^n c_j H_{r_j}(\zeta) T_j = \mathbf{TH}(\zeta) \mathbf{C} \quad (30)$$

式中: r_j 为汉开尔函数的阶数, T_j 为 n 阶向量, c_j 为参与系数, $H_{r_j}(\zeta)$ 为第一类汉开尔(Hankel)函数.

$$\mathbf{T} = (\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{T}_n) \quad (31)$$

$$\mathbf{C} = (c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n) \quad (32)$$

将式(30)代入(27), 并且考虑到汉开尔函数的导数性质, 经整理后可得^[17]

$$(\mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_2 - r_j^2 \mathbf{I}) T_j = \mathbf{0} \quad (33)$$

上述方程为一特征值问题, λ_j 为 $\mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_2$ 的特征值($r_j = \sqrt{\lambda_j}$), 而 T_j 为 λ_j 对应的特征向量.

考虑 SBFEM 在 $\xi = 1$ 处的边界条件(28)(汉开尔函数在无穷远处的边界条件自动满足, 其边界为式(33)):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 ka \mathbf{TH}' \mathbf{C} = & - \int_s \mathbf{N}^T(s) \bar{v}_{2n}(\xi_0, s) \xi_0 ds = \\ & - \int_s \mathbf{N}^T(s) \mathbf{N}(s) \bar{v}_{2n} ds = -a \mathbf{E}_0 \bar{v}_{2n} \end{aligned} \quad (34)$$

其中 $\bar{\mathbf{v}}_{2n}$ 为 Ω_2 中在虚拟圆边界的散射波节点速度, 并且

$$\mathbf{H}' = \text{diag}[H'_{r_1}(ka), H'_{r_2}(ka), \dots, H'_{r_n}(ka)] \quad (35)$$

3.2 求有限子域 Ω_1 的解并与无限子域 Ω_2 耦合
与无限子域求解类似, 有限子域 Ω_1 中的总场 ϕ_1 的解可表示为

$$\phi_1(\zeta) = \sum_{j=1}^n c_j^1 J_{r_j}(\zeta) \mathbf{T}_j = \mathbf{TJ}(\zeta) \mathbf{C}^1 \quad (36)$$

其中

$$\mathbf{C}^1 = (c_1^1 \quad c_2^1 \quad \dots \quad c_n^1) \quad (37)$$

$$\mathbf{J}(\zeta) = \text{diag}[J_{r_1}(ka\zeta), J_{r_2}(ka\zeta), \dots, J_{r_n}(ka\zeta)] \quad (38)$$

同时考虑比例边界有限元的边界条件(29) 可得

$$ka\mathbf{E}_0 \mathbf{TJ}'_a \mathbf{C}^1 = \int_s \mathbf{N}^T(s) \bar{\mathbf{v}}_{1n}(\xi_1, s) \xi_1 ds = \int_s \mathbf{N}^T(s) \mathbf{N}(s) \bar{\mathbf{v}}_{1n} ds = a\mathbf{E}_0 \bar{\mathbf{v}}_{1n} \quad (39)$$

其中

$$\mathbf{J}'_a = \text{diag}[J'_{r_1}(ka), J'_{r_2}(ka), \dots, J'_{r_n}(ka)] \quad (40)$$

考虑方程(34)、(39) 和虚拟圆作为 Ω_1 和 Ω_2 界面的边界条件(5), 并注意到

$$\bar{\mathbf{v}}_{2n} + \bar{\mathbf{v}}_{2n} = \bar{\mathbf{v}}_{2n} = -\bar{\mathbf{v}}_{1n} \quad (41)$$

可以解出

$$\phi_1(\xi) = \mathbf{TJ}(\xi) \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{H}_{ah} \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{v}}_{2n} / k_2 + \mathbf{T}^{-1} \phi_2^i) \quad (42)$$

$$\phi_2(\xi) = \mathbf{TH}_h(\xi) (\mathbf{H}')^{-1} (\mathbf{J}'_a \mathbf{W}^{-1} \mathbf{T}^{-1} \phi_2^i + \mathbf{H}_{ah}^{-1} \mathbf{VW}^{-1} \mathbf{H}_{ah} \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{v}}_{2n} / k) \quad (43)$$

其中 $\bar{\mathbf{v}}_{2n}$ 为 Ω_2 中在虚拟圆边界的入射波节点速度, 并且

$$\mathbf{H}_{ah} = \text{diag}[H_{r_1}(ka)/H'_{r_1}(ka), H_{r_2}(ka)/H'_{r_2}(ka), \dots, H_{r_n}(ka)/H'_{r_n}(ka)] \quad (44)$$

$$\mathbf{H}_h(\xi) = \text{diag}[H_{r_1}(ka\xi)/H'_{r_1}(ka), H_{r_2}(ka\xi)/H'_{r_2}(ka), \dots, H_{r_n}(ka\xi)/H'_{r_n}(ka)] \quad (45)$$

$$\mathbf{J}_a = \text{diag}[J_{r_1}(ka), J_{r_2}(ka), \dots, J_{r_n}(ka)] \quad (46)$$

$$\mathbf{V} = i\mathbf{T}^{-1} \mathbf{GTJ}'_a + \mathbf{J}_a \quad (47)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} - \mathbf{H}_{ah} \mathbf{J}'_a \quad (48)$$

其中 $\mathbf{G}$ 为对角矩阵, 其对角元素为每个 SBFEM 单元对应的孔隙影响系数. 而且对于非多孔介质圆弧段, 其值为无穷大.

单位长度上的力可由下式获得:

$$\frac{dF}{dz} = -a \int_0^{2\pi} p \cdot \cos \theta d\theta =$$

$$P_x(k_x, k_y, k, a) \cdot \rho g A \cdot Z(z) e^{-i\alpha z} \quad (49)$$

总力可按下式求得^[17]:

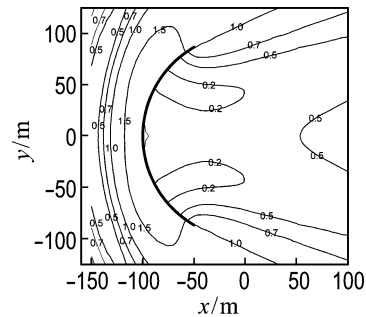
$$F = \int_{-h}^0 \frac{dF_x}{dz} dz =$$

$$P_x(k_x, k_y, k, a) \cdot \rho g A e^{-i\alpha} \cdot \tanh(kh) / k \quad (50)$$

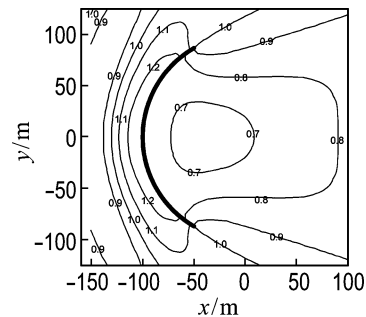
由此可看出归一化的 $P_x(k_x, k_y, k, a)$ 使用更方便.

4 计算结果及分析

文献[17]已经验证了在非均匀多孔介质圆柱问题中, SBFEM 只需采用 16 个三节点单元就能取得非常高的计算精度. 与此同时, 为了验证 SBFEM 分析该类问题的有效性和精确性, 文献[14]给出入射波波长 200 m, 正向入射平面波作用下, 单圆弧型贯底式多孔介质防波堤张角 $\theta = 120^\circ$ 时的流域波幅分布等高线的计算结果 (其中圆弧型贯底式多孔介质防波堤半径 $R = 100$ m, 水深为 20 m, 入射波波幅 $A = 1$, 多孔介质孔隙影响系数分别选取为 $G = 0.001$ 和 0.1), 如图 3 所示. 图 4 为本文 SBFEM 模拟的等高线图 (计算条件和图 3 一致). 其中, 文献[14]中的多孔介质圆弧内外匹配边界条件为 $\partial \phi_{in} / \partial r = -i\alpha G (\phi_{out} - \phi_{in})$ (ϕ_{in} 和 ϕ_{out} 分别为圆弧内外速度势), 而本文采用的为式(5), 即 $\phi_{1,n} = -\phi_{2,n} = iGk(\phi_1 - \phi_2^s - \phi_2^i)$ (大多数文献常采用). 为了得出可与文献[14]



(a) $G = 0.001$



(b) $G = 0.1$

图 3 文献[14]绕射波波幅分布

Fig. 3 Diffracted wave amplitude distribution in Lit. [14]

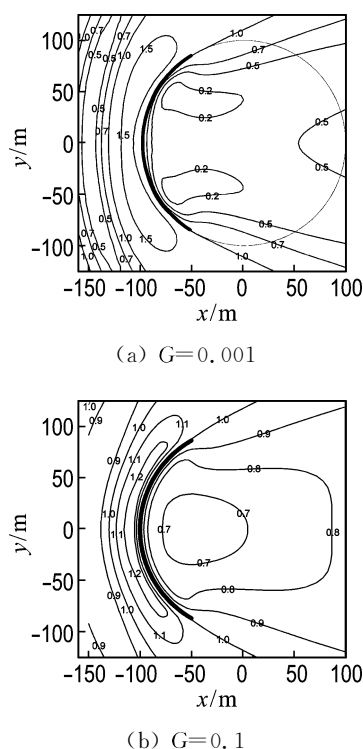


图4 SBFEM 绕射波波幅分布

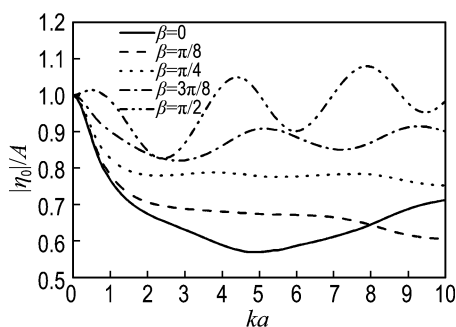
Fig. 4 Diffracted wave amplitude distribution with SBFEM

相比较的结果,只需在最终推导出的式(47)中将 $\mathbf{G}$ 换为 $(\omega/k)\mathbf{G}$. 模拟计算中,为了能更好地描述出等高线图,SBFEM 在虚拟圆边界处采用了相对较多的 24 个节点即 12 个单元. 比较图 3 和 4 可以看出,两者所展示的波绕射规律非常相似,表明该方法使用较少的单元就能取得较高的精度. 同时,对计算时间进行测试(采用 Intel Core Q8200(2.33 GHz)计算机),其总的计算时间不到 2 s,由此可得出其计算效率也非常高.

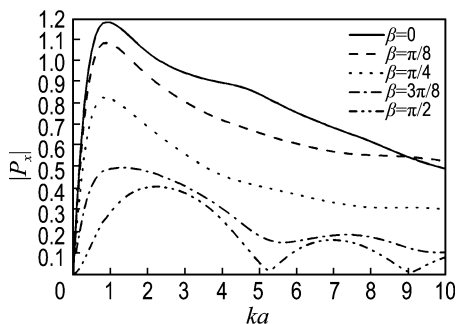
研究了 5 种不同角度入射波作用下的绕射波的波幅分布 ($\beta = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$, 其中 $\beta = \arctan(k_y/k_x)$, $\beta = 0$ 对应为平面波; $\beta = \pi/2$ 则为驻波),如图 5 所示. 与此同时,圆弧堤的张角仍选取为 $\theta = 120^\circ$. 半径 $a = 1$ m,水深为 15 m,入射波波幅 $A = 1$,而多孔介质的孔隙影响系数取为 $G = 1.0$. 图 5 给出了以上 5 种不同角度入射波作用下,掩护区中心点(0,0)处的归一化的波浪爬升和圆弧段上的归一化总水平力随相对波数 ka ($k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$)变化的规律.

从图 5 可以看出,总的来说,对于中心点处的波浪爬升,驻波的值最大,而平面波的值最小. 其中,随着 ka 的增大,驻波的波浪爬升震荡增大; β

$= 3\pi/8$ 波的波浪爬升也呈现震荡趋势,但震荡幅度相对驻波要小,并且初始段明显减少,波浪爬升的最大值不超过 1.0; $\beta = \pi/4$ 波的波浪爬升在 $ka = 1.5$ 之前单调下降,而在 $ka = 1.5$ 之后变化不大,即 ka 对波浪爬升其后的影响不大; $\beta = \pi/8$ 波与 $\beta = \pi/4$ 波有点相似,不过在 $ka = 1.5$ 之后,波浪爬升有缓慢变小的趋势;平面波的波浪爬升先是逐渐变小,在 $ka = 5.0$ 附近开始又逐渐增大,并且在 $ka = 8.0$ 附近和以后要大过 $\beta = \pi/8$ 波的波浪爬升. 对于圆弧段的总水平力,驻波最小,而平面波最大. 随着 ka 的增大, $\beta = 0, \pi/8, \pi/4$ 三种波的受力情况先从零开始,而后近乎直线增长到 $ka = 1.0$ 时达到最大,在这之后又逐渐变小;而 $\beta = 3\pi/8, \pi/2$ 的波浪力随 ka 的变化震荡并随 ka 的增大震荡有逐步减小的趋势. $\beta = 3\pi/8$ 的震荡幅度较 $\beta = \pi/2$ 的震荡幅度小,变化相对缓和.



(a) 中心点(0,0)处波浪爬升



(b) 圆弧段上的归一化总水平力

图5 相对波数 ka 变化下的防波堤波浪爬升和总水平力Fig. 5 Variation of wave run-up and wave force on the breakwater versus relative wave number ka

图 6 进一步给出了以上 5 种不同角度入射波作用下,掩护区中心点(0,0)处的归一化的波浪爬升和圆弧段上的归一化总水平力随多孔介质的孔隙影响系数 G 变化的规律,模拟计算中的参数选取和图 5 一致.

从图6可以看出,对于中心点处的波浪爬升,总体上,平面波的值最小,而驻波的值最大. 随着 G 的逐渐增大,驻波的波浪爬升快速下降至 $G = 0.5$ 附近之后逐步回升并趋于稳定,当 G 值足够大时,其对波浪爬升影响不大. 而对于其他几种波,趋势

基本类似,但随着 β 值的减小,变化更为缓和. 对于圆弧段的总水平力,平面波的受力最大,而驻波的受力最小,各种波都呈现随着 G 的增大,先是快速减小,尔后趋于平缓并趋于各自的渐近值.

图7进一步表明了不同波在不同孔隙影响系

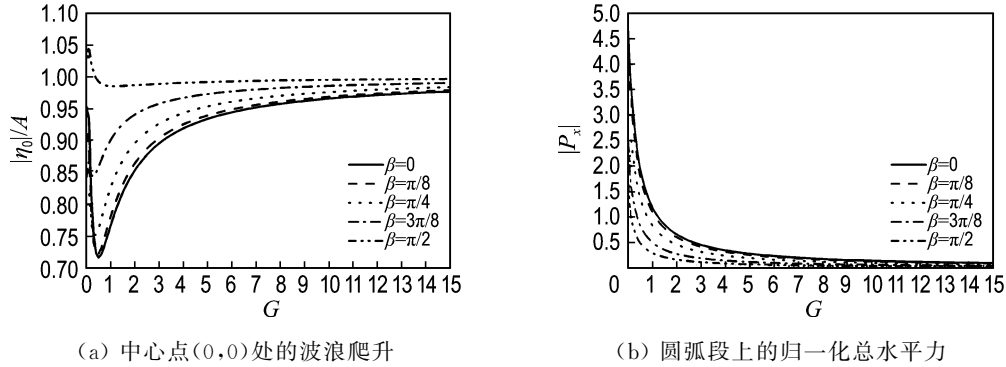


图6 孔隙影响系数 G 变化下防波堤的波浪爬升和总水平力

Fig. 6 Variation of wave run-up and wave force on the breakwater versus porous-effect coefficient G

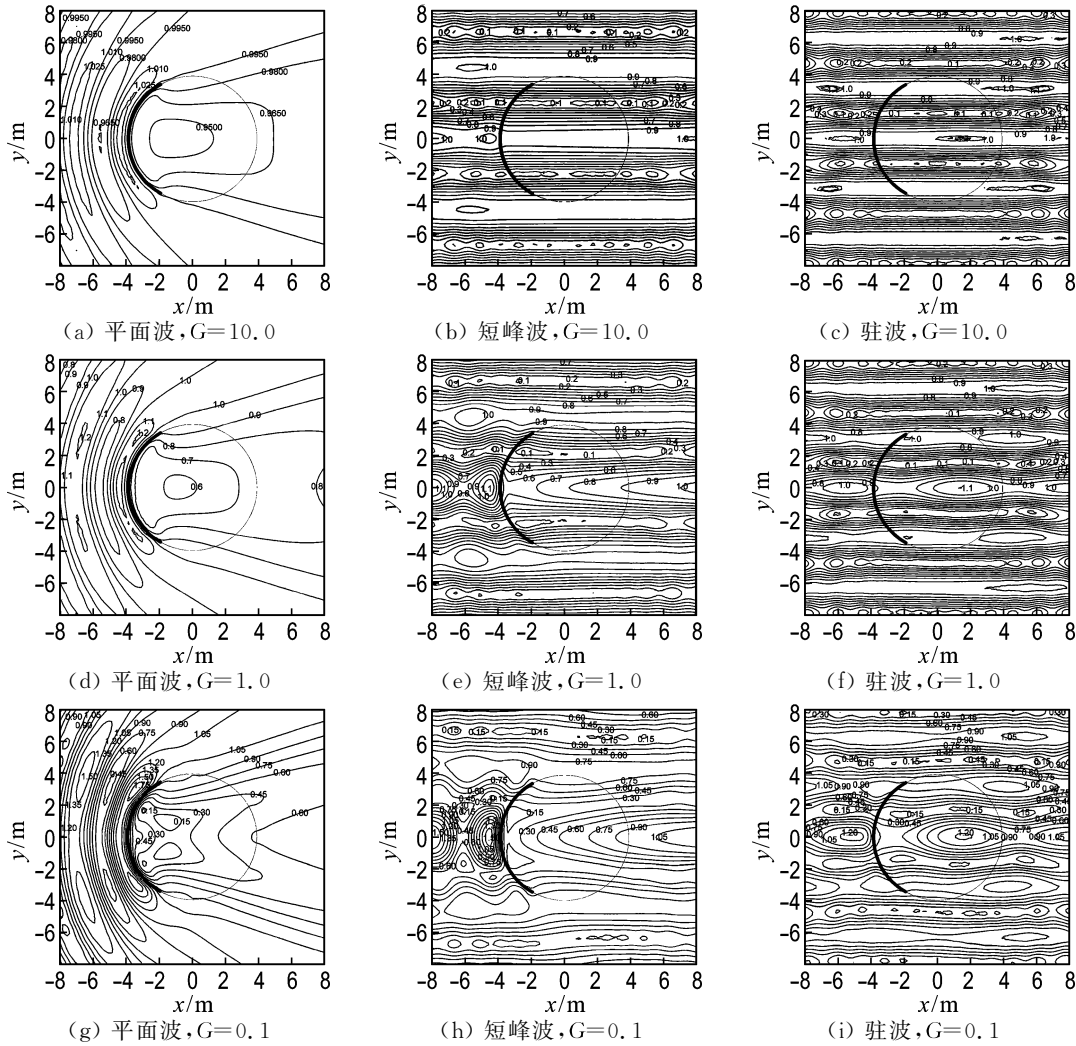


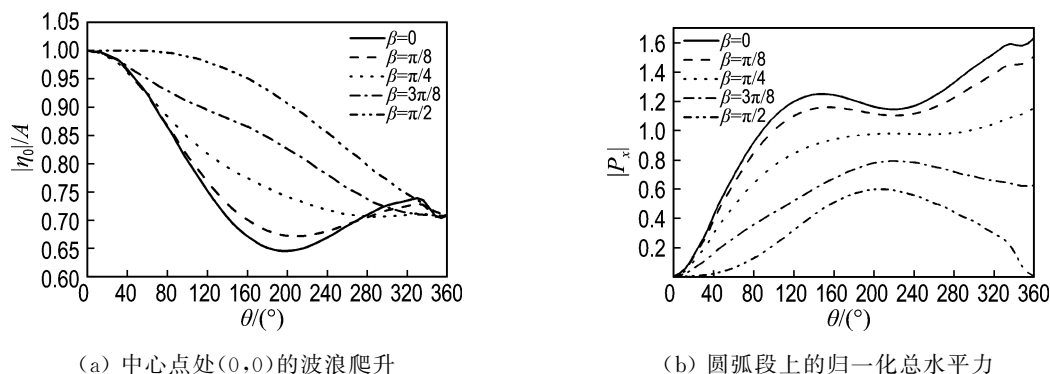
图7 不同短峰波在不同孔隙影响系数 G 下绕射波的波幅分布

Fig. 7 Diffracted wave amplitude distribution with different incident wave and different porous-effect coefficient G

数 G 情况下对域内绕射波轮廓的影响. 其中, 分别选取 3 种波: (1) 平面波 ($k_x a = 1.0, k_y a = 0$), (2) 短峰波 ($k_x a = \sqrt{2}/2, k_y a = \sqrt{2}/2$) 和 (3) 驻波 ($k_x a = 0, k_y a = 1.0$). 同时, 孔隙影响系数 G 分别为 0.1、1.0 和 10.0 的情况也一并加以考虑, 其他计算参数与图 6 一致. 从图中可以看出, 结果曲线都关于 x 轴对称; 对于平面波, 当 G 不断减小时, 可以明显看出圆弧内波浪高度逐渐减小; G 越小, 圆弧外反射特性越明显, 防波效果越明显; 而随着

$\beta (= k_y/k_x)$ 的增大 (即逐渐由平面波向驻波靠近), 绕射波相对平面波变得逐渐复杂些, 掩护区域内中心附近的波幅变大, 等高线间的间隔变小, 防波效果也相对逐渐变差.

图 8 进一步给出了和图 5 一样的 5 种不同角度入射波作用下, 掩护区中心点 $(0,0)$ 处的归一化的波浪爬升和圆弧段上的归一化总水平力随圆弧段张角 θ 变化的规律, 模拟中的参数选取和图 5 一致.



(a) 中心点处 $(0,0)$ 的波浪爬升

(b) 圆弧段上的归一化总水平力

图 8 随张角 θ 变化下的防波堤波浪爬行和总水平力

Fig. 8 Variation of wave run-up and wave force on the breakwater versus opening angle θ

从图 8 可以看出, 对于中心点处的波浪爬升, 总体上, 也是平面波的值最小, 而驻波的值最大. 随着张角 θ 逐渐增大, 驻波的波浪爬升在初始阶段变化比较平缓, 而在 $\theta=80^\circ \sim 120^\circ$ 之后下降趋势变得明显; $\beta=3\pi/8$ 波的波浪爬升基本上趋于直线下降; $\beta=\pi/4$ 波的波浪爬升先是逐渐变小, 到 $\theta=240^\circ$ 附近之后趋于平缓; 而其他两种波波浪爬升先是快速变小再逐渐变大, 两者的波谷都出现在 $\theta=200^\circ$ 附近. 对于圆弧段的总水平力, 平面波的受力最大, 而驻波的受力最小. 随着张角 θ 逐渐增大, $\beta=0, \pi/8$ 两种波的波浪力先快速增长, 增长到 140° 附近后再缓慢减小, 到了 230° 附近后又快速增大; $\beta=\pi/4$ 波的受力呈现缓慢增大的趋势; 其他两种波的波浪力先是快速增大, 增大到 205° 左右又逐渐减小, 但 $\beta=3\pi/8$ 减小趋势缓慢, $\beta=\pi/2$ 波则快速下降并最终减小到零.

5 结 论

本文拓展了 SBFEM 波浪与圆弧型贯底式多孔介质防波堤的相互作用问题的研究. 引入了多孔介质孔隙影响系数矩阵 $\mathbf{G}$, 基于变分原理和比例边界坐标变换, 推导出比例边界有限元表示的圆弧型贯底式防波堤基本方程. 在求解过程中, 通过

引入特征值问题, 对于有限域的解用贝塞尔函数来表达, 而对于无限域的解则用汉开尔函数来表达. 数值结果表明该方法具有很高的精度和计算效率. 进一步分析表明, 圆弧型贯底式多孔介质防波堤的防浪效果与短波峰的波向、防波堤的孔隙影响系数、张角等因素有关. 以上参数的研究为圆弧型贯底式多孔介质防波堤的工程设计提供了理论参考.

参考文献:

- [1] Chwang A T, Chan A T. Interaction between porous media and wave motion [J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1998, **30**:53-84.
- [2] Chwang A T. A porous wavemaker theory [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, **132**:395-406.
- [3] Dalrymple R A, Losada M A, Martin P A. Reflection and transmission from porous structures under oblique wave attack [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1991, **224**:625-644.
- [4] Twu S W, LIN D T. On a highly effective wave absorber [J]. *Coastal Engineering*, 1991, **15**(4): 389-405.
- [5] WANG K H, REN X. Water waves on flexible and porous breakwaters [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1993, **119**(5):1025-1047.
- [6] HUANG L H, CHAO H I. Reflection and

- transmission of water wave by porous breakwater [J]. **Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering**, 1992, **118**(5):437-452.
- [7] YU X, Chwang A T. Wave motion through porous structures [J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1994, **120**(5):989-1008.
- [8] YU X, Chwang A T. Wave-induced oscillation in harbor with porous breakwaters [J]. **Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering**, 1994, **120**(2):125-144.
- [9] YU X, Chwang A T. Water waves above a submerged porous plate [J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1994, **120**(6):1270-1282.
- [10] Darwiche M K M, Williams A N, WANG K H. Wave interaction with a semi-porous cylindrical breakwater [J]. **Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering**, 1994, **120**(4):382-403.
- [11] Williams A N, LI W. Wave interaction with a semi-porous cylindrical breakwater mounted on a storage tank [J]. **Ocean Engineering**, 1998, **25**(2-3):195-219.
- [12] Williams A N, LI W, WANG K H. Water wave interaction with a floating porous cylinder [J]. **Ocean Engineering**, 2000, **27**(1):1-28.
- [13] Williams A N, LI W. Water wave interaction with an array of bottom-mounted surface-piercing porous cylinders [J]. **Ocean Engineering**, 2000, **27**(8):841-866.
- [14] 程建生, 缪国平, 王景全, 等. 圆弧型贯底式多孔介质防波堤防浪效果的解析研究[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2008, **29**(1):5-10.
- CHENG Jian-sheng, MIAO Guo-ping, WANG Jing-quan, *et al.* Wave-prevention efficiency of an arc-shaped bottom-mounted porous breakwater [J]. **Journal of Harbin Engineering University**, 2008, **29**(1):5-10.
- [15] Wolf J P, SONG Chong-mi. Consistent infinitesimal finite element cell method; three-dimensional vector wave equation [J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1996, **39**(13):2189-2208.
- [16] LIU Jun, LIN Gao, WANG Fu-ming, *et al.* The scaled boundary finite element method applied to electromagnetic field problems [C] // **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**, Sydney, WCCM/APCOM 2010, July. Sydney: IOP, 2010.
- [17] SONG Hao, TAO Long-bin. An efficient scaled boundary FEM model for wave interaction with a non-uniform porous cylinder [J]. **International Journal for Numerical Method in Fluid**, 2010, **63**:96-118.

Study of interaction of short-crested waves with arc-shaped bottom-mounted porous breakwater

LIN Gao^{*1,2}, LIU Jun^{1,2}, LI Jian-bo^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. School of Hydraulic Engineering, Faculty of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology,
Dalian 116024, China)

Abstract: The scaled boundary finite element method (SBFEM) is applied to the solution of short-crested wave interaction with arc-shaped bottom-mounted porous breakwater. The fluid domain is divided into two sub-domains by introducing an imaginary circular interface. The outer one is an unbounded sub-domain and the inner one is a bounded sub-domain. Various porous coefficients for the arc and the imaginary arc are considered. A new variational principle formulation to derive the SBFEM equations for the two sub-domains is developed. Hankel function and Bessel function are chosen as the basis functions for the solution of the unbounded and bounded domains, respectively and matched at public circle boundary. Numerical examples show that the presented method yields excellent results with quite few nodes discretized on the imaginary circle. The effects of the wave parameters and structure configuration including porosity of the arc, the relative wave number and the annular spacing on the wave forces, wave run-up are examined. The experimental results provide valuable reference for the hydrodynamic analyses and structure design of arc-shaped bottom-mounted porous breakwater.

Key words: scaled boundary finite-element method; short-crested wave; porous breakwater; wave diffraction