

# 修正偶应力理论层合薄板自由振动模型及尺度效应

李 莉<sup>1,2</sup>, 陈万吉<sup>\*1,3</sup>, 李 小 鹏<sup>3</sup>

- (1. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;  
2. 中国医科大学 基础医学院 物理与生物物理教研室, 辽宁 沈阳 110001;  
3. 沈阳航空航天大学 辽宁省飞行器复合材料结构分析与仿真重点实验室, 辽宁 沈阳 110136)

**摘要:** 通过引入各向异性的细观尺度复合材料层合板的本构方程, 将各向同性修正偶应力理论推广到各向异性, 基于虚功原理首次建立了复合材料层合板新修正偶应力理论的自由振动模型. 该理论包含不同的两个材料细观参数, 偶应力曲率应变不对称. 但是, 用于各向同性材料与原修正偶应力理论等价, 为了便于工程应用, 建立了只含一个细观材料参数的偶应力层合薄板理论弯曲和振动的简化模型. 算例表明建立的偶应力层合薄板模型能用于分析层合板的自由振动尺度效应.

**关键词:** 修正偶应力理论; 各向异性本构方程; 尺度效应; 层合薄板; 自由振动  
**中图分类号:** O343.8 **文献标志码:** A

## 0 引言

金属材料当尺寸进入微米量级时, 试验得到的刚度较按传统理论分析的结果明显增大<sup>[1-2]</sup>, 这种现象被称为尺度效应. 这是传统力学无法解释和解决的问题. 为之发展的细观理论主要有偶应力理论和应变梯度理论. 值得一提的是对于细观理论的多种提法至今尚未统一, 而且存在一定差异. 本构方程中引入的细观材料长度参数  $l$  还与理论有关<sup>[3]</sup>. 用 3 种不同的细观理论计算 Stolken 的微弯曲试验, 发现不同理论拟合试验结果得到的细观材料长度参数  $l$  相差很大, 分别为 6.5、4.6、3.3  $\mu\text{m}$ . 目前, 细观理论的研究还限于参数  $l$  不仅与材料有关, 还与理论有关阶段.

本文只研究  $C^1$  偶应力理论, 不涉及应变梯度理论. 关于偶应力理论研究主要有文献[4-8]提出的偶应力理论, Yang 等<sup>[9]</sup>提出的修正对称偶应力理论(含 1 个细观材料长度参数). 近些年来有许多关于细观尺度的板的理论研究, 对此, Altenbach 等<sup>[10]</sup>给出了详细的评论. 按只含一个

细观材料长度参数的对称的修正的偶应力理论<sup>[9]</sup>( $C^1$  理论)建立偶应力板梁工程近似理论备受重视.  $C^0$  和  $C^1$  理论的区别首先表现在  $C^0$  理论至少含有两个细观材料参数, 而  $C^1$  理论可以只有一个细观材料参数.  $C^0$  理论可以分析细观尺度效应, 但是,  $C^0$  理论的转角变量会给建立梁和板的工程理论带来不便. 例如, Park 等<sup>[11]</sup>按  $C^1$  修正的偶应力理论建立的 Bernoulli-Euler 梁模型的方程为

$$(D + l_e^2 GA) \frac{d^4 w}{dx^4} = f_w$$

其中  $D = Eh^3/12$ ,  $A$  为梁截面面积,  $E$ 、 $G$  为弹性常数. 方程中没有出现转角  $\omega$ , 经典 Bernoulli-Euler 梁的解可以直接用于细观偶应力 Bernoulli-Euler 梁问题, 直接解释和分析 Bernoulli-Euler 梁的多尺度问题. 如果按  $C^0$  理论建立偶应力 Bernoulli-Euler 梁方程, 必然要引入两个材料参数, 而且除了挠度  $w$  以外, 还要出现另一个独立的转角  $\omega$ , 得不到  $C^1$  理论的结果. 因此, 近期的关于板、梁偶应力模型的研究中, 修正偶应力理论愈

收稿日期: 2012-02-09; 修回日期: 2013-03-20.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11072156).

作者简介: 李 莉(1967-), 女, 博士生; 陈万吉<sup>\*</sup>(1941-), 男, 教授, 博士生导师, E-mail: chenwj@dlut.edu.cn.

来愈受到关注. Park 等<sup>[11]</sup>首先开展偶应力工程理论研究,建立了 Bernoulli-Euler 梁模型,随后 Ma 等建立了偶应力 Timoshenko 梁模型<sup>[12]</sup>, Tsias 首先开展板的偶应力理论研究,建立了偶应力 Kirchhoff 板模型<sup>[13]</sup>, Reddy 等<sup>[14-15]</sup>基于偶应力理论分析了功能梯度材料梁,基于修正偶应力理论建立了功能梯度材料板的非线性三阶理论. 修正的偶应力理论属于各向同性理论,上述建立的偶应力梁、板模型都是各向同性模型.

工程中已经广泛采用复合材料层合板结构. 层合板复合材料在细观尺度下含纤维和机体的微裂纹等夹杂或缺陷,属于各向异性材料,至今尚未建立基于  $C^1$  修正偶应力理论的层合板模型. 本文首先建立修正偶应力理论的各向异性本构方程,由此建立适用于层合板/夹层板的修正偶应力理论模型,并用于自由振动多尺度分析.

## 1 偶应力理论

### 1.1 经典偶应力理论

Mindlin 建议了一种只含一个细观材料长度参数偶应力理论<sup>[6]</sup>,为了与修正偶应力理论区别,将其称之为经典偶应力理论. 该理论通过引入转动向量  $\omega_i$  表示曲率张量  $\tilde{\chi}_{ij}$ ,同时引入一个细观材料长度参数表示偶应力扭矩张量  $m_{ij}$  和曲率张量  $\tilde{\chi}_{ij}$  的本构关系.

经典偶应力理论的应变张量  $\epsilon_{ij}$  和曲率张量  $\tilde{\chi}_{ij}$  分别定义为

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}); \tilde{\chi}_{ij} = \omega_{ij} \quad (1)$$

其中  $\epsilon_{ij}$  是对称的 ( $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ );  $\tilde{\chi}_{ij}$  是不对称的 ( $\tilde{\chi}_{ij} \neq \tilde{\chi}_{ji}$ );  $u_i$  是位移向量;  $\omega_i = \frac{1}{2}e_{ijk}u_{kj}$ ,  $e_{ijk}$  是轮换算符.

本构方程为

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \\ \tilde{m}_{ij} = 4l^2 G \tilde{\chi}_{ij} \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\delta_{ij}$  是克罗内克符号,  $\lambda$  和  $G$  为弹性常数.

### 1.2 修正偶应力理论

Yang 等<sup>[9]</sup>提出修正偶应力理论,其中应变

张量的偶应力曲率张量  $\chi_{ij}$  是对称的,即  $\chi_{ij} = \chi_{ji}$ . 修正偶应力理论的应变张量  $\epsilon_{ij}$  和曲率张量  $\chi_{ij}$  分别定义为

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}); \chi_{ij} = \frac{1}{2}(\omega_{ij} + \omega_{ji}) \quad (3)$$

其中  $\epsilon_{ij}$  是对称的 ( $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ ),  $\chi_{ij}$  是对称的 ( $\chi_{ij} = \chi_{ji}$ ).

本构方程为

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \\ m_{ij} = 2l^2 G \chi_{ij} \end{cases} \quad (4)$$

该理论仅适用于各向同性材料.

为了保证应变的对称性,修正偶应力理论式(4)第2个式中的系数取2,不是取不对称偶应力理论的式(2)中的系数4. 两种理论的  $l$  取值将相差一个倍数.

## 2 修正偶应力理论层合薄板模型

下面的推导采用工程的表示法. 修正偶应力板的理论采用与传统板理论同样的假设. 层合薄板的中面法线始终垂直于中面假定. 用  $u, v, w$  表示板的任意点的  $x, y, z$  方向的位移(见图1),其中  $l_b$  是纤维方向的夹杂尺寸;  $l_m$  是机体的夹杂尺寸. 板的偶应力理论增加了  $x, y, z$  方向的转动位移  $\omega_x, \omega_y$  和  $\omega_z$ ,并假定与  $z$  无关,其中  $\omega_z$  被忽略<sup>[13]</sup>.

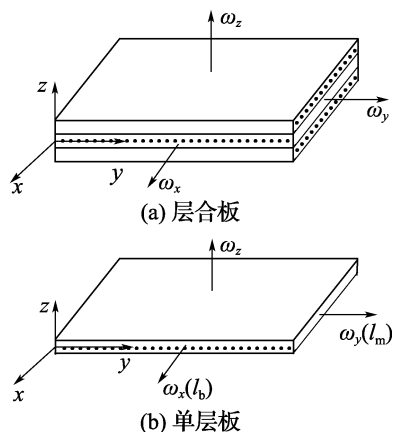


图1 板的位移和细观参数 ( $l_b, l_m$ ) 示意图

Fig. 1 Schematic diagram of plate displacements and micro-material's constants ( $l_b, l_m$ )

### 2.1 修正偶应力理论层合薄板位移

修正偶应力层合薄板变形满足直法线假

定<sup>[13]</sup>,位移为

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) \\ w = w(x, y) \end{cases} \quad (5)$$

其中  $u_0$ 、 $v_0$ 、 $w$  为中面位移。

转动位移为

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{1}{2}(\omega_{,y} - v_{,z}) = \frac{\partial w}{\partial y} \\ \omega_y = \frac{1}{2}(u_{,z} - w_{,x}) = -\frac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \quad (6)$$

其中  $\omega_x$ 、 $\omega_y$  为中面转动位移,与  $z$  无关。式(6)表明该模型的转动位移沿层合板的厚度方向是常数。

## 2.2 各向同性修正偶应力理论的应变

各向同性修正偶应力理论的应变张量见式

(3)。

按工程表示法,记

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u_{,x}; \epsilon_y = v_{,y}; \gamma_{xy} = 2\gamma_{12}; \\ \chi_x &= \chi_{11}; \chi_y = \chi_{22}; \chi_{xy} = 2\chi_{12} \end{aligned} \quad (7)$$

由于  $\omega_z = 0$ , 有  $\begin{bmatrix} \chi_{xz} \\ \chi_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ , 得

应变

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

## 2.3 修正偶应力层合板单层本构方程

碳纤维树脂基的层合板的宏观材料性质和细观材料性质都是各向异性的。单层断面如图2和3所示。

如果不计纤维与机体黏结缺陷和层间黏结缺

陷,图2表示的纤维方向的夹杂尺寸应当是纤维的直径  $l_b$ 。图3表示的夹杂尺寸应当是纤维或机体的夹杂尺寸  $l_m$ 。显然,  $l_b > l_m$ 。Koiter 建立了偶应力理论的本构方程<sup>[5]</sup>,文中提出,由于引入转动梯度,为了平衡应变和转动梯度之间的量纲,在本构模型中引入具有长度量纲的新的材料常数。由此,可以认定层合板的细观材料长度参数应当用  $l_b$  和  $l_m$  度量,当然,参数  $l_b$  和  $l_m$  不等于纤维和机体夹杂的尺寸,需要通过实验标定。

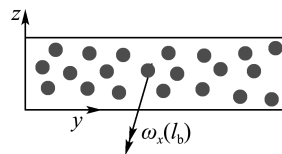


图2  $y$ - $z$  平面内的纤维

Fig. 2 Fiber within  $y$ - $z$  plane

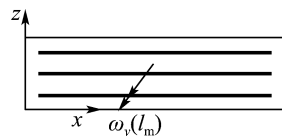


图3  $x$ - $z$  平面内的纤维

Fig. 3 Fiber within  $x$ - $z$  plane

材料长度参数可以理解为材料细观尺度的夹杂或缺陷的尺度的度量参数。对于细观颗粒相同的材料可以认为是细观各向同性材料,宏观上这种材料可以是各向同性的也可以是各向异性的, Tsias 等基于修正偶应力理论建立正交板的各向异性模型,其中经典应力和应变关系采用各向异性本构方程,但是偶应力弯矩和曲率应变关系采用各向同性的本构方程<sup>[16]</sup>。

在偶应力理论本构模型中引进的细观材料长度参数仅与转动有关,这就意味着对应图2表示纤维断面的夹杂尺寸是  $l_b$ , 对应本构模型中转动梯度  $\frac{\partial \omega_x}{\partial x}$  和  $\frac{\partial \omega_x}{\partial y}$  为一个具有长度量纲的新的材料常数  $l_b$ , 对应图2中的  $\frac{\partial \omega_y}{\partial x}$  和  $\frac{\partial \omega_y}{\partial y}$  的细观材料长度参数为  $l_m$ 。由此可见,细观各向异性不但与缺陷的尺寸有关还与形状和分布有关。按经典不对称偶应力理论,层合板偶应力部分各向异性的本构方程为

$$\begin{cases} \tilde{m}_x = 2C_{44} l_b^2 \frac{\partial \omega_x}{\partial x} \\ \tilde{m}_y = 2C_{55} l_m^2 \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \\ \tilde{m}_{xy} = 2C_{44} l_b^2 \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \\ \tilde{m}_{yx} = 2C_{55} l_m^2 \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \end{cases} \quad (10)$$

其中  $C_{44} = G_{12}$ ,  $C_{55} = G_{22}$  分别为  $y$ - $z$  和  $x$ - $z$  平面的剪切模量. 偶应力理论的本构方程只对剪应力有贡献, 关于剪切模量的细观参数不耦合, 而应变梯度理论的本构方程中细观参数有耦合作用.

本文建议的两个细观材料长度参数需通过实验标定. 经典力学中用于标定弹性常数拉伸试验很简单、实用, 但是, 由于拉伸试验产生均匀变形, 没有应变梯度的变化, 不能有效地用于确定细观理论的材料长度参数.

细观材料长度参数可以通过梁的试验标定, 树脂基的碳纤维层合板已被广泛应用, 这种材料没有明显的塑性, 梁大变形理论可以提高标定材料的长度参数的精度. 用3层  $0^\circ$  铺设  $[0^\circ/0^\circ/0^\circ]$  的梁可以标定  $l_m$ , 用3层  $90^\circ$  铺设  $[90^\circ/90^\circ/90^\circ]$  的梁可以标定  $l_b$ . 后面将进行修正偶应力层合梁的弹性大变形理论的研究. 根据各向同性修正偶应力理论方法, 按式(10) 建立新的本构方程:

$$\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ m_{yx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_{44} l_b^2 & & & \\ & 2C_{55} l_m^2 & & \\ & & C_{44} l_b^2 & C_{55} l_m^2 \\ & & C_{44} l_b^2 & C_{55} l_m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (11)$$

其中坐标  $x$  方向为纤维的铺设方向. 各向异性修正偶应力理论的曲率应变表达式为

$$\chi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

式(12) 的曲率应变不对称, 但是偶应力弯矩对称, 即  $m_{xy} = m_{yx}$ . 对于各向同性材料式(12) 与修正偶应力理论相同.

### 3 偶应力层合板本构方程

层合板的本构方程在第  $k$  层的局部坐标  $(x', y', z')$  下表示为

$$\bar{\sigma}^k = C^k \epsilon^k \quad (13)$$

其中

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^k = (\sigma_{x'}^k & \sigma_{y'}^k & \tau_{x'y'}^k & m_{x'}^k & m_{y'}^k & m_{x'y'}^k & m_{y'x'}^k)^T \\ \epsilon^k = (\epsilon_{x'}^k & \epsilon_{y'}^k & \gamma_{x'y'}^k & \chi_{x'}^k & \chi_{y'}^k & \chi_{x'y'}^k & \chi_{y'x'}^k)^T \end{cases} \quad (14)$$

$$C^k = \begin{pmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & & & & & \\ C_{21}^k & C_{22}^k & & & & & \\ & & C_{66}^k & & & & \\ & & 2l_{kb}^2 C_{44}^k & & & & \\ & & & 2l_{km}^2 C_{55}^k & & & \\ & & & & l_{kb}^2 C_{44}^k & l_{km}^2 C_{55}^k & \\ & & & & l_{kb}^2 C_{44}^k & l_{km}^2 C_{55}^k & \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中  $x'$  为第  $k$  层纤维的方向;  $C_{11}^k = \frac{1 - \nu_{22}^k \nu_{22}^k}{E_2^k E_2^k \Delta}$ ;

$C_{12}^k = C_{21}^k = \frac{\nu_{21}^k + \nu_{22}^k \nu_{21}^k}{E_2^k E_2^k \Delta}$ ;  $C_{22}^k = \frac{1 - \nu_{21}^k \nu_{12}^k}{E_1^k E_2^k \Delta}$ ;  $C_{44}^k = G_{12}^k$ ;  $C_{55}^k = G_{22}^k$ ;  $C_{66}^k = G_{12}^k$ ;  $\Delta = \frac{1 - \nu_{22}^k \nu_{22}^k - 2\nu_{12}^k \nu_{21}^k - 2\nu_{21}^k \nu_{22}^k \nu_{12}^k}{E_1^k E_2^k E_2^k}$ , 和  $E_1^k, E_2^k$  为第  $k$  层的弹性常数;  $G_{12}^k, G_{22}^k$  为第  $k$  层的剪切模量;  $\nu_{12}^k, \nu_{21}^k$  是第  $k$  层的泊松比, 且  $\nu_{21}^k = \frac{E_2^k \nu_{12}^k}{E_1^k}$ , 下标 1、2 分别表示纤维和基体的方向;  $l_{kb}^2, l_{km}^2$  分别为层合板第  $k$  层的纤维和基体的细观材料长度参数.

经坐标变换, 第  $k$  层在整体坐标  $(x, z)$  下的本构方程为

$$\sigma^k = Q^k \epsilon \quad (16)$$

其中

$$\begin{cases} \sigma^k = (\sigma_x^k & \sigma_y^k & \tau_{xy}^k & m_x^k & m_y^k & m_{xy}^k & m_{yx}^k)^T \\ \epsilon = (\epsilon_x & \epsilon_y & \gamma_{xy} & \chi_x & \chi_y & \chi_{xy} & \chi_{yx})^T \end{cases} \quad (17)$$

$Q^k$  的表达式为

$$Q^k = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k & 0 & 0 & 0 \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k & 0 & 0 & 0 \\ 2l_k^2 \widetilde{Q}_{44}^k & 2l_k^2 \widetilde{Q}_{45}^k & 2l_k^2 \widetilde{Q}_{46}^k & 2l_k^2 \widetilde{Q}_{47}^k & 0 & 0 \\ 2l_k^2 \widetilde{Q}_{45}^k & 2l_k^2 \widetilde{Q}_{55}^k & 2l_k^2 \widetilde{Q}_{56}^k & 2l_k^2 \widetilde{Q}_{57}^k & 0 & 0 \\ -2l_k^2 \widetilde{Q}_{57}^k & -2l_k^2 \widetilde{Q}_{46}^k & l_k^2 \hat{Q}_{44}^k & l_k^2 \hat{Q}_{55}^k & 0 & 0 \\ -2l_k^2 \widetilde{Q}_{57}^k & -2l_k^2 \widetilde{Q}_{46}^k & l_k^2 \hat{Q}_{44}^k & l_k^2 \hat{Q}_{55}^k & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} Q_{11}^k &= m^4 C_{11}^k + n^4 C_{22}^k + 2m^2 n^2 C_{12}^k + 4m^2 n^2 C_{66}^k; \\ Q_{22}^k &= n^4 C_{11}^k + m^4 C_{22}^k + 2m^2 n^2 C_{12}^k + 4m^2 n^2 C_{66}^k; \\ Q_{12}^k &= m^2 n^2 (C_{11}^k + C_{22}^k - 4C_{66}^k) + (m^4 + n^4) C_{12}^k; \\ Q_{16}^k &= m^3 n (C_{11}^k - C_{22}^k - 2C_{66}^k) + mn^3 (C_{12}^k - C_{22}^k + 2C_{66}^k); \\ Q_{26}^k &= mn^3 (C_{11}^k - C_{22}^k - 2C_{66}^k) + m^3 n (C_{12}^k - C_{22}^k + 2C_{66}^k); \\ Q_{66}^k &= m^2 n^2 (C_{11}^k + C_{22}^k - 2C_{12}^k) + (m^2 - n^2)^2 C_{66}^k \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} l_k^2 \widetilde{Q}_{44}^k &= l_{kb}^2 C_{44}^k m^4 + l_{km}^2 C_{55}^k n^4 + 4m^2 n^2 (l_{kb}^2 C_{44}^k + l_{km}^2 C_{55}^k); \\ l_k^2 \widetilde{Q}_{45}^k &= -3m^2 n^2 (l_{kb}^2 C_{44}^k + l_{km}^2 C_{55}^k); \\ l_k^2 \widetilde{Q}_{55}^k &= n^4 l_{kb}^2 C_{44}^k + m^4 l_{km}^2 C_{55}^k + 4m^2 n^2 (l_{kb}^2 C_{44}^k + l_{km}^2 C_{55}^k); \\ l_k^2 \widetilde{Q}_{46}^k &= mn(m^2 l_{kb}^2 C_{44}^k - n^2 l_{km}^2 C_{55}^k); \\ l_k^2 \widetilde{Q}_{47}^k &= -mn(m^2 + 2n^2) l_{kb}^2 C_{44}^k + mn(n^2 + 2m^2) l_{km}^2 C_{55}^k; \\ l_k^2 \widetilde{Q}_{56}^k &= -mn(n^2 + 2m^2) l_{kb}^2 C_{44}^k + mn(m^2 + 2n^2) l_{km}^2 C_{55}^k; \\ l_k^2 \widetilde{Q}_{57}^k &= mn(n^2 l_{kb}^2 C_{44}^k - m^2 l_{km}^2 C_{55}^k); \\ l_k^2 \hat{Q}_{44}^k &= l_{kb}^2 C_{44}^k m^4 + l_{km}^2 C_{55}^k n^4 + m^2 n^2 (l_{kb}^2 C_{44}^k + l_{km}^2 C_{55}^k); \\ l_k^2 \hat{Q}_{55}^k &= n^4 l_{kb}^2 C_{44}^k + m^4 l_{km}^2 C_{55}^k + m^2 n^2 (l_{kb}^2 C_{44}^k + l_{km}^2 C_{55}^k) \end{aligned} \quad (20)$$

这里  $m = \cos \phi^k$ ,  $n = \sin \phi^k$ .

上述表达式同时适用于各向同性和各向异性材料,既适用于层合板也适用于夹层板,对于各向同性材料

$$Q_{ij}^k = C_{ij}^k, l_{kb} = l_{km} = l_k$$

#### 4 修正偶应力理论薄板的虚功原理

虚功原理可以用来推导平衡方程和边界条件.偶应力理论层合薄板的虚功原理为

$$\delta U - \delta W = 0 \quad (21)$$

其中内力虚功为

$$\begin{aligned} \delta U &= \sum_{k=1}^n \delta U^k = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \int_{V^k} (\boldsymbol{\sigma}^k)^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dxdydz \right) = \\ &= \int_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^n \int_{-\frac{h^k}{2}}^{\frac{h^k}{2}} (\boldsymbol{\sigma}^k)^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dz \right) dxdy \end{aligned} \quad (22)$$

外力虚功为

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{\Omega} (f_w \delta w + f_{cx} \delta u_x + f_{cy} \delta u_y) dxdy + \\ &= \int_{\partial \Omega} (\bar{V} \delta w + \bar{M}_n \delta \theta_n) ds \end{aligned} \quad (23)$$

其中  $f_w$  是  $z$  向的体积力;  $f_{cx}$  和  $f_{cy}$  是沿  $x$  和  $y$  轴转动域内分布扭矩;  $\bar{V}$  和  $\bar{M}_n$  是横向边界力和边界分布弯矩.

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^n \int_{-\frac{h^k}{2}}^{\frac{h^k}{2}} (\boldsymbol{\sigma}^k)^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dz \right) dxdy = \\ &= \int_{\Omega} (N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + N_{xy} \delta \gamma_{xy} + (m_x \delta \chi_x + \\ &= m_y \delta \chi_y) + m_{xy} \delta \chi_{xy} + m_{yx} \delta \chi_{yx}) dxdy = \\ &= \int_{\Omega} \left[ \left( N_x \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + N_y \delta \frac{\partial u_0}{\partial y} + N_{xy} \left( \delta \frac{\partial u_0}{\partial y} + \right. \right. \right. \\ &= \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} \left. \right) - M_x \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_y \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \\ &= 2M_{xy} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left. \right) + \left( Y_x \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \right. \\ &= Y_y \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + Y_{xy} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \\ &= Y_{yx} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left. \right] dxdy \end{aligned} \quad (24)$$

其中  $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$  是经典的板的内力;  $Y_x, Y_y, Y_{xy}, Y_{yx}$  是板的偶应力扭矩的内力矩,表达式为

$$\begin{aligned} &(N_x \ N_y \ N_{xy} \ M_x \ M_y \ M_{xy} \ Y_x \ Y_y \ Y_{xy} \ Y_{yx}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x^k \ \sigma_y^k \ \tau_{xy}^k \ z \sigma_x^k \ z \sigma_y^k \ z \tau_{xy}^k \ m_x^k \ m_y^k \ m_{xy}^k \ m_{yx}^k) dz \end{aligned} \quad (25)$$

记

$$\begin{cases} M_x^* = M_x + Y_{yx} \\ M_y^* = M_y - Y_{xy} \\ M_{xy}^* = M_{xy} + \frac{1}{2}(Y_y - Y_x) \end{cases} \quad (26)$$

将式(26)代入式(24),得用内力表示的方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + f_u = 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + f_v = 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^*}{\partial x \partial y} - \left( \frac{df_{cx}}{dy} - \frac{df_{cy}}{dx} \right) + f_w = 0 \end{cases} \quad (27)$$

力的边界条件为

$$\begin{cases} N_x l + N_{xy} m = \bar{N}_{nx} \\ N_{xy} l + N_y m = \bar{N}_{ny} \\ Q_n^* + \frac{\partial}{\partial s} M_{nt}^* = \bar{V} \\ M_n^* = \bar{M}_n \\ \sum_k [M_{nt}^*]_k = 0 \end{cases} \quad (28)$$

位移边界条件是

$$\begin{cases} u_0 = \bar{u}_0 \\ v_0 = \bar{v}_0 \\ w = \bar{w}, \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}, w_k = \bar{w}_k \end{cases} \quad (29)$$

## 5 简化的正交铺设层合薄板偶应力模型

层合板偶应力模型含两个固有的细观材料参数:层合板的纤维的参数  $l_{kb}$  和基体的参数  $l_{km}$ . 横观各向同性截面( $y', z'$ ) 内的纤维(断面) 可以看成是夹杂, 该夹杂的尺度远远大于横观各向异性截面( $x', z'$ ) 内的长纤维和基体的夹杂尺度, 因此, 层合板的纤维的  $l_{kb}$  远大于基体的  $l_{km}$ , 为便于工程应用, 可以忽略  $l_m$  建立简化的正交铺设层合薄板偶应力模型. 本构方程(18) 成为

$$Q^k = \begin{pmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & & & & \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & & & & \\ & & Q_{66}^k & & & \\ & & & 2l_k^2 \tilde{Q}_{44}^k & & \\ & & & & 2l_k^2 \tilde{Q}_{55}^k & \\ & & & & & l_k^2 \hat{Q}_{44}^k & l_k^2 \hat{Q}_{55}^k \\ & & & & & l_k^2 \hat{Q}_{44}^k & l_k^2 \hat{Q}_{55}^k \end{pmatrix} \quad (30)$$

其中

$$\begin{cases} Q_{11}^k = m^4 C_{11}^k + n^4 C_{22}^k \\ Q_{22}^k = n^4 C_{11}^k + m^4 C_{22}^k \\ Q_{66}^k = C_{44}^k n^2 + C_{55}^k m^2 \end{cases} \begin{cases} l_k^2 \tilde{Q}_{44}^k = m^4 l_{kb}^2 C_{44}^k \\ l_k^2 \tilde{Q}_{55}^k = n^4 l_{kb}^2 C_{44}^k \\ l_k^2 \hat{Q}_{44}^k = l_k^2 \tilde{Q}_{44}^k = m^4 l_{kb}^2 C_{44}^k \\ l_k^2 \hat{Q}_{55}^k = l_k^2 \tilde{Q}_{55}^k = n^4 l_{kb}^2 C_{44}^k \end{cases} \quad (31)$$

这里  $l_k^2 = l_{kb}^2$ .

用位移表示的内力为

$$\begin{aligned} N_x &= \bar{Q}_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \bar{Q}_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \bar{J}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \bar{J}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ N_y &= \bar{Q}_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \bar{Q}_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \bar{J}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \bar{J}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ N_{xy} &= \bar{Q}_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - (\bar{J}_{66} + \bar{J}_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ M_x &= \bar{J}_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \bar{J}_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \bar{I}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \bar{I}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ M_y &= \bar{J}_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \bar{J}_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - \bar{I}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \bar{I}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ M_{xy} &= \bar{J}_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - (\bar{I}_{66} + \bar{I}_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ Y_x &= 2l^2 \tilde{\tilde{Q}}_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ Y_y &= -2l^2 \tilde{\tilde{Q}}_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ Y_{xy} &= l^2 \tilde{\tilde{Q}}_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - l^2 \tilde{\tilde{Q}}_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ Y_{yx} &= l^2 \tilde{\tilde{Q}}_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - l^2 \tilde{\tilde{Q}}_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (32)$$

式中

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{Q}}_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\tilde{Q}_{ij}^k (z_{k+1} - z_k)); \\ \bar{Q}_{ij} &= \sum_{k=1}^n (Q_{ij}^k (z_{k+1} - z_k)); \\ \bar{J}_{ij} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{Q_{ij}^k (z_{k+1}^2 - z_k^2)}{2} \right); \\ \bar{I}_{ij} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{Q_{ij}^k (z_{k+1}^3 - z_k^3)}{3} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

$l^2 = \sum_{k=1}^n [l_k^2 \tilde{\tilde{Q}}_{ij}^k (z_{k+1} - z_k)] / \tilde{\tilde{Q}}_{ij}$ , 对于各层材料相同的层合板有  $l = l_k$ .

将内力方程(32) 代入式(27), 得用位移表示的正交铺设偶应力层合薄板平衡方程:

$$\begin{aligned} &\bar{Q}_{11} u_{0,xx} + 2\bar{Q}_{16} u_{0,xy} + \bar{Q}_{66} u_{0,yy} + \bar{Q}_{16} v_{0,xx} + (\bar{Q}_{12} + \\ &\bar{Q}_{66}) v_{0,xy} + \bar{Q}_{26} v_{0,yy} - \bar{J}_{11} w_{,xxx} - 3\bar{J}_{16} w_{,xxy} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{J}_{12} + 2\bar{J}_{66})w_{,xyy} - \bar{J}_{26}w_{,yy} + f_u = 0; \\
& \bar{Q}_{16}u_{0,xx} + (\bar{Q}_{66} + \bar{Q}_{12})u_{0,xy} + \bar{Q}_{26}u_{0,yy} + \bar{Q}_{66}u_{0,xx} + \\
& 2\bar{Q}_{26}u_{0,xy} + \bar{Q}_{22}u_{0,yy} - \bar{J}_{22}w_{,yyy} - 3\bar{J}_{26}w_{,xyy} - \\
& (2\bar{J}_{66} + \bar{J}_{12})w_{,xxy} - \bar{J}_{16}w_{,xxx} + f_v = 0; \\
& \bar{J}_{11}u_{0,xxx} + 3\bar{J}_{16}u_{0,xxy} + (\bar{J}_{12} + 2\bar{J}_{66})u_{0,xyy} + \\
& \bar{J}_{26}u_{0,yyy} + \bar{J}_{16}u_{0,xxx} + (\bar{J}_{12} + 2\bar{J}_{66})u_{0,xxy} + \\
& 3\bar{J}_{26}u_{0,xyy} + \bar{J}_{22}u_{0,yyy} - \bar{I}_{11}w_{,xxx} - 4\bar{I}_{16}w_{,xxy} - \\
& 2(\bar{I}_{12} + 2\bar{I}_{66})w_{,xxy} - 4\bar{I}_{26}w_{,xyy} - \bar{I}_{22}w_{,yyy} + \\
& l^2\left(\left(\frac{7}{2}\tilde{\tilde{Q}}_{45} - \tilde{\tilde{Q}}_{55} - \tilde{\tilde{Q}}_{44}\right)w_{,xxy} - \tilde{\tilde{Q}}_{55}w_{,xxx} - \right. \\
& \left. \tilde{\tilde{Q}}_{44}w_{,yyy}\right) + f_{c,y,x} - f_{c,x,y} + f_w = 0 \quad (34)
\end{aligned}$$

## 6 正交铺设偶应力层合简支薄方板振动分析

将  $u_0(x, y) = 0, v_0(x, y) = 0, \bar{Q}_{16} = 0, \bar{Q}_{26} = 0, \tilde{\tilde{Q}}_{45} = 0$  和  $\bar{J}_{16} = 0, \bar{J}_{26} = 0, \bar{I}_{16} = 0, \bar{I}_{26} = 0$  和  $f_u = f_v = f_{cx} = f_{cy} = 0$  代入式(34), 得用位移表示的简化偶应力正交层合薄方板的自由振动方程:

$$\begin{aligned}
& \bar{I}_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(\bar{I}_{12} + 2\bar{I}_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \bar{I}_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \\
& l^2((\tilde{\tilde{Q}}_{55} + \tilde{\tilde{Q}}_{44}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \tilde{\tilde{Q}}_{55} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \tilde{\tilde{Q}}_{44} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}) + \\
& \bar{\rho} \ddot{w} = 0 \quad (35)
\end{aligned}$$

其中  $\bar{\rho}$  为板的分布密度,  $\bar{\rho} = \sum_{k=1}^n \rho^k h^k$ ,  $\rho^k$  为第  $k$  层的材料密度.

简支方板边界条件:

$$\begin{cases} w|_{\Gamma} = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0 \text{ 或 } x=L} = 0, \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{y=0 \text{ 或 } y=L} = 0 \end{cases} \quad (36)$$

由方程(35)和(36)可以求得偶应力正交层合薄方板的自振频率.

满足全部边界条件的板的振动位移函数为

$$w(x, y) = w_0 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{L} e^{i\omega_{mn} t} \quad (37)$$

将式(37)代入式(35)得非零解条件下的自振频率方程

$$\left(\bar{D}_{11} \frac{m^4 \pi^4}{L^4} + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66}) \frac{m^2 n^2 \pi^4}{L^4} + \right.$$

$$\left. \bar{D}_{22} \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \right) - \bar{\rho} \omega^2 = 0 \quad (38)$$

即

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4}{\bar{\rho} L^4} (\bar{D}_{11} m^4 + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66}) m^2 n^2 + \bar{D}_{22} n^4) \quad (39)$$

其中

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{11} &= \bar{I}_{11} + l^2 \tilde{\tilde{Q}}_{55}; \\
2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66}) &= 2((\bar{I}_{12} + 2\bar{I}_{66}) + \\
&\quad \frac{1}{2} l^2 (\tilde{\tilde{Q}}_{55} + \tilde{\tilde{Q}}_{44})); \\
\bar{D}_{22} &= \bar{I}_{22} + l^2 \tilde{\tilde{Q}}_{44} \quad (40)
\end{aligned}$$

当  $l=0$  时, 式(39)退化成经典正交铺设层合薄板自振频率方程<sup>[17]</sup>.

式(39)表明细观尺度板的弯曲刚度和扭曲刚度将随着  $l$  的增加而增强, 相应的自振频率也会增加.

本算例的数据为  $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$  的3层正交铺设的方板(见图4); 边长  $L = 2 \times 10^{-4}$  m, 板厚  $h = 2.5 \times 10^{-5}$  m; 材料常数<sup>[18]</sup>:  $E_2 = 6.9 \times 10^9$  Pa,  $E_1 = 25E_2$ ,  $G_{12} = 0.5E_2$ ,  $G_{22} = 0.2E_2$ ,  $\rho = 1.578 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.

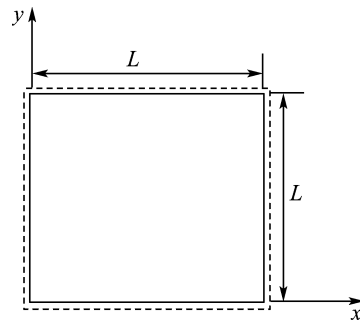
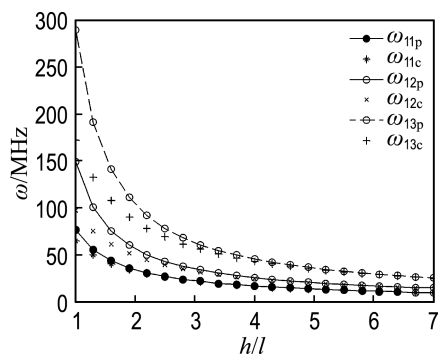
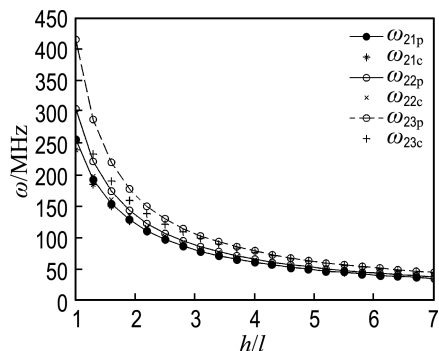


图4 四边简支方板

Fig. 4 Simple supported square plate

材料常数和铺设角仍与上例相同, 边长取  $L=10h$ , 取材料尺度参数  $l=5 \times 10^{-6}$  m, 由于纤维方向的  $l=l_b$  不会超过单层板的厚度, 这里只是为了说明尺度效应,  $h/l$  取  $1 \sim 5$ . 偶应力理论和经典薄板理论计算的频率随  $h/l$  的变化的对比关系如图5所示.

(a)  $m=1; n=1,2,3$ (b)  $m=2; n=1,2,3$ 图5 四边简支方板的自振频率  $\omega_m$  随  $h/l$  的变化Fig. 5 Frequency  $\omega_m$  variation of simple supported square plate with  $h/l$ 

由图5可以看出,修正偶应力理论计算的频率( $\omega_{mp}$ )总是大于相应各阶经典层合板理论计算的频率( $\omega_{mc}$ )。随着  $h/l$  的减小,  $\omega_{mp}$  将会远大于  $\omega_{mc}$ ;随着  $h/l$  的增大,  $\omega_{mp}$  与  $\omega_{mc}$  将逐渐接近。这表明修正偶应力层合板模型能够分析层合板动力问题的尺度效应。

## 7 结 论

本文首次将各向同性修正偶应力理论推广到各向异性,提出各向异性的细观尺度的复合材料层合板的本构方程,基于虚功原理推导了复合材料层合板偶应力理论的自由振动方程。

本文建立的正交铺设偶应力层合简支薄方板振动方程和自振频率解与传统简支薄方板振动方程和解一致,可以由经典解直接给出偶应力理论的解,这是  $C^0$  理论办不到的。本文建立的模型有待通过试验验证,其中包括层合板的细观材料参数的测量,涉及微米尺度层合板试验设备和技术条件要求很高,应另属专门研究的课题。

## 参考文献:

- [1] Fleck N A, Muller G M, Ashby M F, *et al.* Strain gradient plasticity: Theory and experiment [J]. *Acta Metallurgica et Materialia*, 1994, **42**(2):475-487.
- [2] Stolken J S, Evans A G. A microbend test method for measuring the plasticity length-scale [J]. *Acta Materialia*, 1998, **46**(14):5109-5115.
- [3] JI Bin, CHEN Wan-ji. On the nonlocal theory of microstructures and its implementation of finite element methods [J]. *Recent Patents on Engineering*, 2010, **4**(1):63-72.
- [4] Toupin R A. Elastic materials with couple stresses [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, **11**(1):385-414.
- [5] Koiter W T. Couple stresses in the theory of elasticity I & II [J]. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, 1964, **67**:17-44.
- [6] Mindlin R D. Influence of couple-stresses on stress concentrations [J]. *Experimental Mechanics*, 1963, **3**(1):1-7.
- [7] Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua [C] // *Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics*. Berlin: Springer, 1965:153-158.
- [8] Fleck N A, Hutchinson J W. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993, **41**(12):1825-1857.
- [9] Yang F, Chong A M, Lam D C C, *et al.* Couple stress based strain gradient theory for elasticity [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**(10):2731-2743.
- [10] Altenbach J, Altenbach H, Eremeyev V A. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: A short review and bibliography [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2010, **80**(1):73-92.
- [11] Park S K, Gao X L. Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory [J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*,



- 2006, **16**(11):2355-2359.
- [12] Ma H M, Gao X L, Reddy J N. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory [J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 2008, **56**(12): 3379-3391.
- [13] Tsiatas G C. A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory [J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2009, **46**(13): 2757-2764.
- [14] Reddy J N. Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams [J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 2011, **59**(11):2382-2399.
- [15] Reddy J N, Kim J. A nonlinear modified couple stress-based third-order theory of functionally graded plates [J]. **Composite Structures**, 2012, **94**(3):1128-1143.
- [16] Tsiatas G C, Yiotis A J. A microstructure-dependent orthotropic plate model based on a modified couple stress theory [M]// **Recent Developments in Boundary Element Methods**. Sapountzakis: Wessex Institute of Technology Press, 2010.
- [17] Reddy J N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis** [M]. 2nd ed. New York: Chemical Rubber Company Press, 2006.
- [18] Pagano N J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites [J]. **Journal of Composite Materials**, 1970, **4**(1):20-34.

## Free vibration model of composite laminated thin plate based on modified couple stress theory and scale effects

LI Li<sup>1,2</sup>, CHEN Wan-ji<sup>\*1,3</sup>, LI Xiao-peng<sup>3</sup>

- ( 1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;  
2. Physics and Biophysics Department, College of Basic Medical Science, China Medical University, Shenyang 110001, China;  
3. Key Laboratory of Liaoning Province for Composite Structural Analysis of Aircraft and Simulation, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China )

**Abstract:** By introducing the anisotropic constitute equation of the composite laminated plate in the micro-scale, the modified couple stress theory in the isotropic elasticity is extended to anisotropic elasticity. Based on virtual principle, a new model of free vibration for composite laminated thin plate containing two materials' characteristic length constants is established for the first time. In this theory, the form of new curvature tensor is asymmetric. However under the case of isotropic, this theory can be identical to the original modified couple stress theory. In order to be convenient for engineering application, a simplified model for composite laminated thin plate of couple stress theory with one material's length constant is proposed for analysis of bending and free vibration. Numerical results show that the present thin plate model can capture the scale effects of free vibration in the microstructures.

**Key words:** modified couple stress theory; anisotropic constitute equation; scale effects; composite laminated thin plate; free vibration