

环扇形薄板弯曲问题辛本征解及 V 形切口应力奇异性讨论

王 珊*

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 通过引入弯矩函数和恰当的变换, 环扇形薄板弯曲问题可导入到二类变量的辛空间, 应用分离变量以及辛本征函数展开的数学物理方法进行解析求解. 首先, 从环扇形薄板弯曲问题的通解出发, 讨论了两直边固支, 以及一直边自由、另一直边固支边界条件的板, 给出了这两种边界条件下相关问题的辛本征解. 其次, 对相应边界条件下 V 形切口尖端应力奇异性进行了讨论. 环扇形薄板弯曲问题的成功求解再次验证了辛对偶体系方法的有效性.

关键词: 薄板弯曲; V 形切口; 辛空间; 辛本征解; 应力奇异性

中图分类号: O343.4 **文献标志码:** A

0 引言

薄板作为一种重要的结构构件在工程中有广泛的应用. 含有裂纹以及 V 形切口的薄板弯曲问题因其具有应力奇异性质而备受关注.

Williams 早在 20 世纪 50 年代初即对 V 形切口问题进行了研究, 推导出在拉伸以及弯曲作用下薄板边缘奇点附近应力场的本征函数展开式, 并讨论了不同边界条件下所产生的应力奇异性^[1-2]. Hasebe 等利用保角映射以及复应力函数对自由和固定边界条件下的平面和弯曲问题的奇异性进行了大量研究工作^[3-6]. 杨春林等^[7]研究了 V 形切口问题的应力奇异性, 指出在一边自由、另一边固支的边界条件下, 存在振荡奇异性.

裂纹以及边缘奇点问题其本性是解析的, 而且其应力强度因子等断裂参数的计算也必须借助解析结果, 通常的数值方法可能影响其精度. 这些表明在奇异性问题的分析中, 解析方法占有重要的地位. 基于结构力学与最优控制的模拟关系, 文献^[8-9]首先将辛对偶求解方法应用于弹性力学问题, 提供了弹性力学解析求解的一个新思路. 应用辛对偶求解方法, Yao 等给出了两侧边自由的环扇形薄板弯曲的辛本征展开解^[10-11].

本文在已有工作基础之上, 对两直边固支以

及一直边自由、另一直边固支的环扇形薄板弯曲问题进行分析, 推导该问题的辛本征解, 继而对相应的 V 形切口尖端应力奇异性进行讨论.

1 环扇形薄板弯曲问题的辛对偶体系^[10-11]

对如图 1 所示的用极坐标描述的环扇形板, 设内径和外径分别为 R_1 和 R , 而 α 表示环扇形板半顶角 ($-\alpha < \varphi < \alpha$), 记板的弯曲刚度与泊松比分别为 D 和 ν .

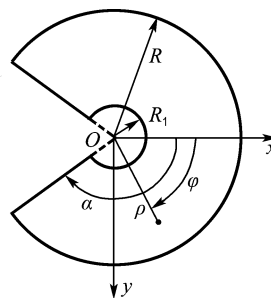


图 1 极坐标下的环扇形板

Fig. 1 An annular sector plate in the polar coordinate system

在极坐标系下, 板的曲率与挠度 w 的关系如

下:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \kappa_\rho \\ \kappa_\varphi \\ \kappa_{\rho\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \\ -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \end{bmatrix} \quad (1)$$

根据文献[10-11],通过引入变换

$$\xi = \ln \rho, \quad s_\rho = \rho \kappa_\rho, \quad s_\varphi = \rho \kappa_\varphi, \quad s_{\rho\varphi} = \rho \kappa_{\rho\varphi} \quad (2)$$

并消去变量

$$s_\rho = \frac{1}{D} \left[\phi_\rho + \frac{\partial \phi_\varphi}{\partial \varphi} \right] - \nu s_\varphi \quad (3)$$

其中 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, 是板的弯曲刚度; 而 ϕ_ρ 、 ϕ_φ 是弯矩函数, 它与弯矩的关系为

$$M_\varphi = \partial \phi_\rho / \partial \rho, \quad M_\rho = (\phi_\rho + \partial \phi_\varphi / \partial \varphi) / \rho \quad (4)$$

$$M_{\rho\varphi} = (\partial \phi_\rho / \partial \varphi + \rho \partial \phi_\varphi / \partial \rho - \phi_\varphi) / 2\rho$$

则环扇形薄板弯曲问题可导入到下面的辛空间进行求解:

$$\mathbf{v} = (\phi_\rho \quad \phi_\varphi \quad s_\varphi \quad s_{\rho\varphi})^T \quad (5)$$

其对应的域内无体力项的辛对偶方程为

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \nu & \nu \frac{\partial}{\partial \varphi} & D(1-\nu^2) & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial \varphi} & 1 & 0 & 2D(1-\nu) \\ \frac{1}{D} & \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \varphi} & -\nu & -\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ -\frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{D} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} & \nu \frac{\partial}{\partial \varphi} & -1 & \end{bmatrix} \mathbf{v} \quad (6)$$

方程(6)可用分离变量和辛本征展开法求解, 即

$$\mathbf{v}(\xi, \varphi) = \exp(\mu \xi) \boldsymbol{\Psi}(\varphi), \quad \mathbf{H} \boldsymbol{\Psi}(\varphi) = \mu \boldsymbol{\Psi}(\varphi) \quad (7)$$

其中 μ 是辛本征值, $\mathbf{H}$ 是哈密顿算子矩阵, 而 $\boldsymbol{\Psi}(\varphi) = (\tilde{\phi}_\rho \quad \tilde{\phi}_\varphi \quad \tilde{s}_\varphi \quad \tilde{s}_{\rho\varphi})^T$, 是辛本征函数向量, 它只是 φ 的函数。

对一般的非零本征值的本征解, 辛本征函数向量 $\boldsymbol{\Psi}(\varphi)$ 的通解如下:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_\rho &= A_1 \cos[(1+\mu)\varphi] + B_1 \sin[(1+\mu)\varphi] + \\ &\quad C_1 \cos[(1-\mu)\varphi] + D_1 \sin[(1-\mu)\varphi]; \\ \tilde{\phi}_\varphi &= A_2 \sin[(1+\mu)\varphi] + B_2 \cos[(1+\mu)\varphi] + \\ &\quad C_2 \sin[(1-\mu)\varphi] + D_2 \cos[(1-\mu)\varphi]; \\ \tilde{s}_\varphi &= A_3 \cos[(1+\mu)\varphi] + B_3 \sin[(1+\mu)\varphi] + \\ &\quad C_3 \cos[(1-\mu)\varphi] + D_3 \sin[(1-\mu)\varphi]; \\ \tilde{s}_{\rho\varphi} &= A_4 \sin[(1+\mu)\varphi] + B_4 \cos[(1+\mu)\varphi] + \\ &\quad C_4 \sin[(1-\mu)\varphi] + D_4 \cos[(1-\mu)\varphi] \end{aligned} \quad (8)$$

其中的 16 个待定常数并不是全部独立的, 独立的常数只有 4 个, 这里取 A_2 、 B_2 、 C_2 、 D_2 作为独立常数, 则其他常数可以表示为

$$A_1 = -A_2;$$

$$A_3 = -\mu/D(1-\nu) \times A_2;$$

$$A_4 = \mu/D(1-\nu) \times A_2;$$

$$C_1 = -(3+\nu-\mu+\nu\mu)/(3+\nu+\mu-\nu\mu) \times C_2;$$

$$C_3 = -\mu(3-\mu)/D(3+\nu+\mu-\nu\mu) \times C_2;$$

$$C_4 = -\mu(1-\mu)/D(3+\nu+\mu-\nu\mu) \times C_2 \quad (9a)$$

$$B_1 = B_2;$$

$$B_3 = \mu/D(1-\nu) \times B_2;$$

$$B_4 = \mu/D(1-\nu) \times B_2;$$

$$D_1 = (3+\nu-\mu+\nu\mu)/(3+\nu+\mu-\nu\mu) \times D_2;$$

$$D_3 = \mu(3-\mu)/D(3+\nu+\mu-\nu\mu) \times D_2;$$

$$D_4 = -\mu(1-\mu)/D(3+\nu+\mu-\nu\mu) \times D_2 \quad (9b)$$

此外, 两直边还应有相应的边界条件, 通常可取为自由、简支或固支边界条件. 对两直边为自由的环扇形板, 文献[10-11]已经做了系统的研究. 这里要讨论的环扇形板弯曲问题的边界条件分别取为两直边固支; 一直边自由、另一直边固支。

显然, 若令环扇形板内径 $R_1 = 0$, 则问题归结为含 V 形切口的薄板弯曲问题. 此外, 其应力奇异性的分析关心的是满足 $-1 < \operatorname{Re}(\mu-1) < 0$ 的辛本征值 μ , 它表示其对应的本征解有阶次为 $\operatorname{Re}(\mu-1)$ 的应力奇异性。

2 两直边固支的辛本征解析解

两直边固支边界条件为

$$s_\rho|_{\varphi=a} = s_{\rho\varphi}|_{\varphi=a} = s_\rho|_{\varphi=-a} = s_{\rho\varphi}|_{\varphi=-a} = 0 \quad (10)$$

对当前的边界条件, 可以证明它不存在零本征值. 与两直边自由环扇形薄板弯曲问题求解类似^[10-11], 两直边固支环扇形薄板弯曲问题非零本征值的本征解也可以分解为关于 x 轴($\varphi = 0$) 对称和反对称两组. 从通解(8)可以看出, A 和 C 组的解为对称变形解, 而 B 和 D 组的解为反对称变形解。

将通解(8)只采用 A 与 C 组的解, 代入两直边固支边界条件(10)中, 并令其系数行列式为零, 则可以得到两直边固支板对称变形的非零本征值超越方程

$$\sin 2\mu\alpha + \mu \sin 2\alpha = 0 \quad (11)$$

而其相应的本征解为

$$\Psi_s = \begin{pmatrix} D\{(1-\mu)(1-\nu)\sin[(1-\mu)\alpha]\cos[(1+\mu)\varphi] + (3+\nu-\mu+\nu\mu)\sin[(1+\mu)\alpha]\cos[(1-\mu)\varphi]\} \\ D\{-(1-\mu)(1-\nu)\sin[(1-\mu)\alpha]\sin[(1+\mu)\varphi] - (3+\nu+\mu-\nu\mu)\sin[(1+\mu)\alpha]\sin[(1-\mu)\varphi]\} \\ \mu\{(1-\mu)\sin[(1-\mu)\alpha]\cos[(1+\mu)\varphi] + (3-\mu)\sin[(1+\mu)\alpha]\cos[(1-\mu)\varphi]\} \\ \mu(1-\mu)\{-\sin[(1-\mu)\alpha]\sin[(1+\mu)\varphi] + \sin[(1+\mu)\alpha]\sin[(1-\mu)\varphi]\} \end{pmatrix} \quad (12)$$

即原问题(6)的解为

$$\mathbf{v}_s = \rho^\mu \Psi_s \quad (13)$$

该解的挠度为

$$w_s = -\rho^{\mu+1} \left\{ \frac{1-\mu}{1+\mu} \sin[(1-\mu)\alpha] \cos[(1+\mu)\varphi] - \sin[(1+\mu)\alpha] \cos[(1-\mu)\varphi] \right\} \quad (14)$$

如果通解(8)只采用B与D组的解,代入两直边固支边界条件(10)中,并令其系数行列式为零,则可以得到两直边固支板反对称变形的非零本征值超越方程

$$\sin 2\mu\alpha - \mu \sin 2\alpha = 0 \quad (15)$$

而其相应的本征解为

$$\Psi_a = \begin{pmatrix} D\{(1-\mu)(1-\nu)\cos[(1-\mu)\alpha]\sin[(1+\mu)\varphi] + (3+\nu-\mu+\nu\mu)\cos[(1+\mu)\alpha]\sin[(1-\mu)\varphi]\} \\ D\{(1-\mu)(1-\nu)\cos[(1-\mu)\alpha]\cos[(1+\mu)\varphi] + (3+\nu+\mu-\nu\mu)\cos[(1+\mu)\alpha]\cos[(1-\mu)\varphi]\} \\ \mu\{(1-\mu)\cos[(1-\mu)\alpha]\sin[(1+\mu)\varphi] + (3-\mu)\cos[(1+\mu)\alpha]\sin[(1-\mu)\varphi]\} \\ \mu(1-\mu)\{\cos[(1-\mu)\alpha]\cos[(1+\mu)\varphi] - \cos[(1+\mu)\alpha]\cos[(1-\mu)\varphi]\} \end{pmatrix} \quad (16)$$

即原问题(6)的解为

$$\mathbf{v}_a = \rho^\mu \Psi_a \quad (17)$$

该解的挠度为

$$w_a = \rho^{\mu+1} \left\{ -\frac{1-\mu}{1+\mu} \cos[(1-\mu)\alpha] \sin[(1+\mu)\varphi] + \cos[(1+\mu)\alpha] \sin[(1-\mu)\varphi] \right\} \quad (18)$$

求得了所有的辛本征值及辛本征函数向量后,则可根据展开定理给出两侧边固支环扇形板的通解

$$\mathbf{v} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \mathbf{v}_{si} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \mathbf{v}_{aj} \quad (19)$$

若令环扇形板内径 $R_1 = 0$,则问题归结为两直边固支的V形切口问题.从方程(11)与(15)可以看出,两直边固支薄板弯曲V形切口问题的辛本征值 μ 与材料性质无关,而仅依赖于V形切口张开的角度^[1,7],并且在V形切口尖端存在应力奇异性.

图2给出了两直边固支薄板弯曲V形切口问题的应力奇异性阶次 $\mu-1$ 随 α 的变化.从图中可看出,(1)当 $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ 时,均只有一个含应力奇异性的对称变形模式;(2)当 $\alpha > \tilde{\alpha}$ ($\tilde{\alpha} \approx 129^\circ$) 时,有一个含应力奇异性的反对称变形模式.这里要说明的是,对两直边固支板,含应

力奇异性变形模式的本征值均为实数,即其应力均没有振荡奇异性.

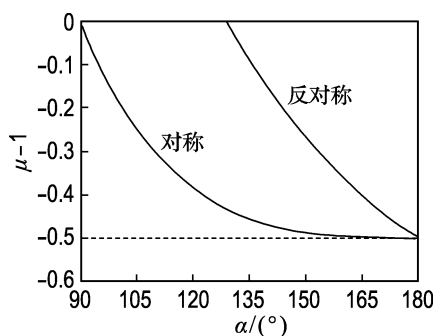


图2 两直边固支板的应力奇异性阶次

Fig. 2 Stress singularity orders of a plate with both straight sides clamped

3 一直边自由、另一直边固支环扇形薄板弯曲问题的辛本征解析解

一直边自由、另一直边固支边界条件为

$$\phi_\rho|_{\varphi=\alpha} = \phi_\varphi|_{\varphi=\alpha} = s_\rho|_{\varphi=-\alpha} = s_{\varphi\varphi}|_{\varphi=-\alpha} = 0 \quad (20)$$

对当前的边界条件,可以证明它不存在零本征值.将通解(8)代入上面的边界条件,可以得到

$$\begin{cases} -A_2 \cos [(1+\mu)\alpha] + B_2 \sin [(1+\mu)\alpha] - m_1 C_2 \cos [(1-\mu)\alpha] + m_1 D_2 \sin [(1-\mu)\alpha] = 0 \\ A_2 \sin [(1+\mu)\alpha] + B_2 \cos [(1+\mu)\alpha] + C_2 \sin [(1-\mu)\alpha] + D_2 \cos [(1-\mu)\alpha] = 0 \\ A_2 \cos [(1+\mu)\alpha] + B_2 \sin [(1+\mu)\alpha] + m_2 C_2 \cos [(1-\mu)\alpha] + m_2 D_2 \sin [(1-\mu)\alpha] = 0 \\ -A_2 \sin [(1+\mu)\alpha] + B_2 \cos [(1+\mu)\alpha] + m_3 C_2 \sin [(1-\mu)\alpha] - m_3 D_2 \cos [(1-\mu)\alpha] = 0 \end{cases} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} m_1 &= (3+\nu-\mu+\nu\mu)/(3+\nu+\mu-\nu\mu) \\ m_2 &= -(1-\nu)(1+\mu)/(3+\nu+\mu-\nu\mu) \\ m_3 &= (1-\nu)(1-\mu)/(3+\nu+\mu-\nu\mu) \end{aligned} \quad (22)$$

要使齐次方程(21)有非零解,其系数行列式应等于零,则可以得到一直边自由、另一直边固支边界条件下本征值超越方程为

$$(3+\nu)(1-\nu)\sin^2 2\mu\alpha + \mu^2(1-\nu)^2\sin^2 2\alpha - 4 = 0 \quad (23)$$

将由上式所求出的辛本征值代入式(21)即可求出其所对应的独立待定常数 A_2 、 B_2 、 C_2 、 D_2 的一组非平凡解,从而给出对应的辛本征向量 $\Psi(\varphi)$,即原问题(6)的解为

$$\mathbf{v}_i = \rho^i \Psi(\varphi) \quad (24)$$

再利用式(1)~(3),可以得到辛本征向量所对应的挠度表达式为

$$w = \rho^{i+1} F(\varphi) \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \frac{1}{(1+\mu)(1-\nu)} \{ A_2 \cos [(1+\mu)\varphi] - B_2 \sin [(1+\mu)\varphi] \} - \\ &\quad \frac{1}{3+\nu+\mu-\nu\mu} \{ C_2 \cos [(1-\mu)\varphi] - D_2 \sin [(1-\mu)\varphi] \} \end{aligned} \quad (26)$$

同样,求得了所有的辛本征值及辛本征函数向量后,按照展开定理即可给出一边自由、另一边固支环扇形板的通解

$$\mathbf{v} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \mathbf{v}_{ti} \quad (27)$$

若令环扇形板内径 $R_1 = 0$,则问题归结为一直边自由、另一直边固支的薄板弯曲 V 形切口问题.从辛本征值超越方程(23)不难看出,对于此类 V 形切口问题,其辛本征值 μ 仅与材料泊松比 ν 以及张开角 α 有关.

表 1 列出了泊松比 $\nu = 0.3$ 时,对应不同角度 α 的含应力奇异性变形模式的辛本征值.在当前情况下,其辛本征值均为复数,表明其应力奇异性均有振荡性.

图 3 给出了泊松比 $\nu = 0.3$ 时,一直边自由、

另一直边固支板的应力奇异性阶次 $\text{Re}(\mu_i - 1)$ 随 α 的变化.从图中可看出:(1)当 $\alpha \leq \tilde{\alpha}_1$ ($\tilde{\alpha}_1 \approx 48^\circ$) 时,没有应力奇异性存在;(2)当 $\tilde{\alpha}_1 < \alpha \leq \tilde{\alpha}_2$ ($\tilde{\alpha}_2 \approx 137^\circ$) 时,具有二重振荡应力奇异性(有一对共轭复本征值);(3)当 $\alpha > \tilde{\alpha}_2$ 时,具有四重振荡应力奇异性(有两对共轭复本征值).

表 1 一直边自由、另一直边固支板的辛本征值 ($\nu = 0.3$)

Tab. 1 Symplectic eigenvalues for a plate with one straight side free and the other one clamped ($\nu = 0.3$)

$\alpha/^\circ$	μ_1, μ_2	μ_3, μ_4
180	0.250 000±0.123 393i	0.750 000±0.123 393i
165	0.273 028±0.134 379i	0.819 096±0.131 896i
150	0.301 209±0.147 142i	0.903 807±0.136 651i
135	0.335 557±0.162 812i	—
120	0.377 373±0.183 263i	—
105	0.429 743±0.210 631i	—
90	0.500 000±0.246 785i	—
75	0.603 234±0.293 656i	—
60	0.769 812±0.354 739i	—

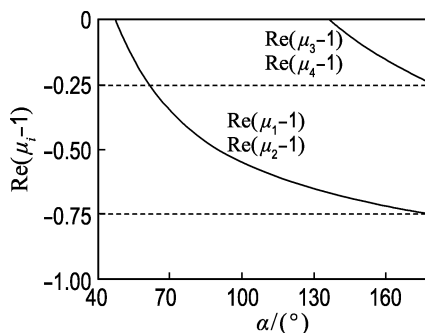


图 3 一直边自由、另一直边固支板的应力奇异性阶次

Fig. 3 Stress singularity orders of a plate with one straight side free and the other one clamped

4 结 语

本文讨论了两直边固支以及一直边自由、另一直边固支边界条件下环扇形薄板弯曲问题,求解给出了相关问题的辛本征值超越方程以及对应的辛本征解.在此基础上,讨论了相关边界条件下

含 V 形切口薄板弯曲问题的应力奇异性.

本文工作表明辛体系的求解方法对含应力奇异性问题的理论分析是十分有效的,并为辛方法在相关问题数值方法的应用奠定了基础.

参考文献:

- [1] Williams M L. Surface stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending [C] // **Proceedings of the First U. S. National Congress of Applied Mechanics**. New York: ASME, 1952:325-329.
- [2] Williams M L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension [J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1952, **19**(4):526-528.
- [3] Hasebe N, Iida J. Intensity of corner and stress concentration factor [J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1983, **109**(1):346-356.
- [4] Hasebe N. Stress analysis of a blunted notch in a clamped edge [J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1986, **112**(1):142-153.
- [5] Hasebe N, Sugimoto T, Nakamura T. Stress concentration in clamped edge of thin plate [J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1986, **112**(7): 642-653.
- [6] Hasebe N, Iida J. Notch mechanics for plane and thin plate bending problems [J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 1990, **37**(1):87-99.
- [7] 杨春林, 郑百林, 嵇醒. 单材料 V 型缺口尖端振荡性奇异应力场产生的条件[J]. 应用力学学报, 2001, **18**(2):65-69.
YANG Chun-lin, ZHENG Bai-lin, JI Xing. Singularity stress analysis near the tip of V notch in homogeneous materials [J]. **Chinese Journal of Applied Mechanics**, 2001, **18**(2): 65-69. (in Chinese)
- [8] ZHONG Wan-xie. Plane elasticity in sectorial domain and the Hamiltonian system [J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 1994, **15**(12):1113-1123.
- [9] 钟万勰. 弹性力学求解新体系 [M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995.
ZHONG Wan-xie. **A New Systematic Methodology for Theory of Elasticity** [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1995. (in Chinese)
- [10] YAO Wei-an, ZHONG Wan-xie, SU Bin. New solution system for circular sector plate bending and its application [J]. **Acta Mechanica Sinica**, 1999, **12**(4):307-315.
- [11] YAO Wei-an, ZHONG Wan-xie, Lim C W. **Symplectic Elasticity** [M]. 1st ed. Singapore: World Scientific Publishing, 2009.

Symplectic eigensolutions for bending problems of a circular sector thin plate and discussions on stress singularities of V-shaped notches

WANG Shan*

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology,
Dalian 116024, China)

Abstract: By introducing bending moment functions and appropriate transformations, the bending problem of a circular sector thin plate can be led into the symplectic space with two kinds of variables and solved using the methods of mathematical physics of a scheme of separation of variables and symplectic eigenexpansion. Firstly, based on the general solution for the bending problem of the circular sector thin plate, plates with both straight sides clamped, and with one straight side free and the other straight side clamped are discussed, and their symplectic eigensolutions are obtained. Secondly, the stress singularities around the V-shaped notch in a thin plate are analyzed. The validity of methodology of symplectic duality system is verified by the successful solution of bending problem of a circular sector thin plate.

Key words: thin plate bending; V-shaped notch; symplectic space; symplectic eigensolution; stress singularity