

直线与高精度细分曲面交点快速计算方法

朱建宁, 王敏杰*, 魏兆成, 曹 斌

(大连理工大学 机械工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 为解决直线与高精度细分曲面求交效率低和稳定性差的问题, 利用细分曲面网格拓扑结构特性, 研究直线与 Catmull-Clark 细分曲面求交的高效方法. 首先, 构造一个新的数据结构, 实现 Catmull-Clark 细分曲面的分片表示. 然后, 对每个细分曲面面片创建轴对称包围盒, 结合包围盒干涉检测技术, 快速排除不与直线相交的细分曲面面片, 根据细分曲面面片网格拓扑结构特性, 提出细分曲面面片多级分割技术. 最后, 通过一定级别的分割并结合轴对称包围盒干涉检测技术, 快速锁定与直线相交的四边形面片并获得交点.

关键词: 直线与细分曲面求交; 数据结构; 分治策略; 多级分割

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A

0 引言

细分曲面是以初始控制网格和一定的细分规则为基础的, 当对控制网格实施一次细分操作后, 顶点数量会增加, 控制网格也会变得更加光滑. 由控制网格不断细分而得到的网格极限曲面即为细分曲面. 目前, 细分曲面已经广泛应用于计算机图形学、影视、动画等领域. 一些关键问题制约了细分曲面在工业领域更广泛的应用, 计算直线与细分曲面交点就是其中一个重要的问题. 直线与细分曲面求交不仅是计算机辅助几何设计领域中的关键问题, 同时也是解决数控加工、光影追踪、干涉检测等领域中问题的基础.

目前, 关于直线与细分曲面求交的研究还属于空白. 在细分曲面求交的研究中, 一些学者^[1-4]利用二部图理论和局部细分技术, 通过对低层次控制网格之间相交区域的逐次求精, 直到控制网格达到预设的最大细分次数时, 才进行细分曲面之间的求交. 这类方法通过缩小相交网格面的搜索范围来提高求交的效率. 但这类方法也存在一定的局限性, 由于控制网格的“收缩”特性, 可能会出现以下两种情况: 低层次控制网格之间相交而细分曲面之间并不相交; 低层次控制网格之间不相交而细分曲面之间相交. 还有一些学者^[5-6]基

于细分曲面的参数化表示, 研究了细分曲面求交、裁剪问题. 由于细分曲面没有整体解析表达式, 在实际应用中, 常采用一定细分次数的控制网格代替细分曲面进行各种操作. 理论上, 一些直线与多边形网格求交的方法也适用于解决直线与细分曲面求交的问题. 但在高精度细分曲面庞大的数据量和复杂拓扑结构的情况下, 这种把细分曲面当作一般多边形网格的做法并不能获得较好的计算性能.

对于基于网格模型的求交计算, 如何快速、准确和稳定地搜索出相交的网格面是最基础也是最重要的问题. 高精度细分曲面庞大的数据量, 不仅消耗大量计算机内存, 也为高效搜索相交网格面增加了困难. 为解决以上问题, 本文重点分析和研究 Catmull-Clark^[7]细分曲面控制网格的拓扑结构, 创建细分曲面数据结构和细分曲面面片多级分割技术, 结合包围盒干涉检测技术和分治策略, 提出高效的直线与 Catmull-Clark 细分曲面求交的方法.

1 Catmull-Clark 细分曲面

Catmull-Clark 细分模式采用 1-4 面分裂的细分规则生成新网格, 属于四边形网格的逼近型

细分模式. Catmull-Clark 细分模式生成的新点可以分为新面点、新边点和新顶点 3 种类型. 图 1 所示为包括边界情况的 Catmull-Clark 细分算法的

细分模板. 空心方点表示新生成的顶点, 圆点表示原网格顶点.

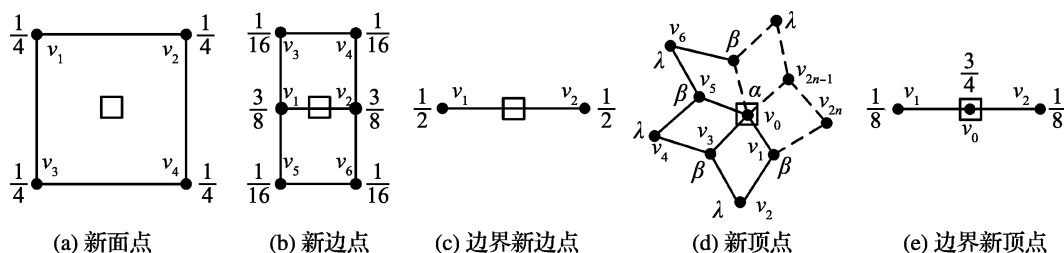


图 1 Catmull-Clark 细分模板

Fig. 1 Catmull-Clark subdivision masks

如图 2 所示, 对初始控制网格实施 2 次 Catmull-Clark 细分操作后, 初始控制网格中的各个四边形面片都转变为呈方阵排列的四边形面片组, 这样的面片组称为细分曲面面片 (subdivision surface patch, SSP). 对于 Catmull-Clark 细分曲面的控制网格, 不论整体上拓扑结构多么复杂, 都可以有机地分解为若干个具有相同拓扑结构的 SSP. 与其他网格模型相比, 这可以认为是 Catmull-Clark 细分曲面所具有的拓扑结构特性. 对于逼近型细分模式, 相同细分次数的极限网格比控制网格具有更高的表示精度. 因此, 本文以一定细分次数的极限网格代替细分曲面与直线求交, 有利于降低计算机内存消耗和提高求交效率. Halstead 等^[8]给出了 Catmull-Clark 细分曲面极限网格顶点位置的计算方法. Huang 等^[9]给出了满足一定精度要求的极限网格细分次数的计算方法.

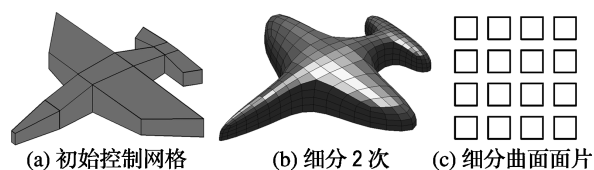


图 2 Catmull-Clark 细分曲面拓扑结构

Fig. 2 Topological structure of Catmull-Clark subdivision surface

2 数据结构

合适的数据结构不仅有利于细分曲面实现, 而且也可以在根本上提高细分曲面相关应用算法

的性能. 目前, 基于边^[10]和四叉树^[11]的结构是细分曲面常用的数据结构. 由于这两种数据结构都采用指针, 当细分曲面的次数较高时, 过多的指针引用会造成计算机内存消耗过大和数据搜索效率过低的问题. Settgaest 等^[12]采用二维数组分片表示 Catmull-Clark 细分曲面. 但在 Settgaest 的结构中, 二维数组不仅包含了 SSP 的信息, 还包含了 SSP 的邻域信息. 当 SSP 的角点为奇异点时, SSP 及其邻域网格的拓扑结构并不是方阵结构, 这超出了二维数组的表达能力, 不利于数据结构的建立和细分算法的实现. 同时, 二维数组中的非 SSP 信息会影响细分曲面应用算法开发, 特别是当 SSP 存在边界情况时.

为了更好地表示 Catmull-Clark 细分曲面, 本文采用一个二维数组表示 SSP, 称其为元胞数组 (Ac); 采用若干一维数组表示 SSP 的邻域结构. 邻域结构的作用主要是为了确保 SSP 的边界可以顺利细分. 根据辅助细分作用的不同, 将这些邻域结构分为两类: 辅助 SSP 角点细分结构 (Av) 和辅助 SSP 边界细分结构 (Ae). 本文创建的结构由元胞数组和辅助细分结构组合而成, 将其称为元胞数据结构. 如图 3 所示, 图 3(a) 为 SSP 及其邻域结构所组成的控制网格, 图 3(b) 表明了控制网格顶点与元胞数据结构的对应关系, 其中 Av_1 、 Av_2 、 Av_3 、 Av_4 分别为 4 种辅助 SSP 角点细分结构, Ae_1 、 Ae_2 、 Ae_3 、 Ae_4 分别为 4 种辅助 SSP 边界细分结构, 各个结构所包含的网格顶点均在图中标明. 因此, Catmull-Clark 细分曲面的整体细分可以通过各个元胞的局部细分实现.

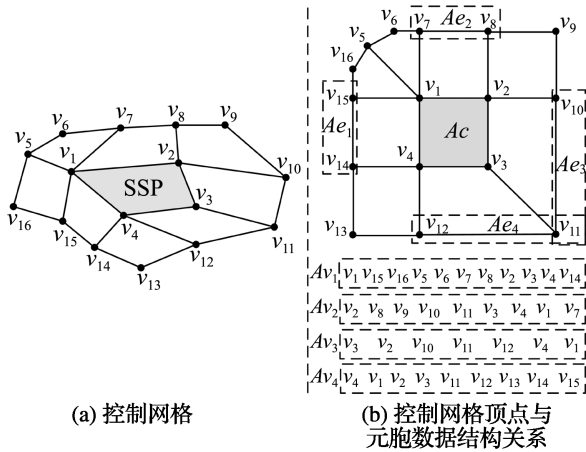


图3 元胞数据结构

Fig. 3 Cell data structure

3 算法描述

3.1 SSP 多级分割

经过 N 次细分后, SSP 网络的拓扑结构是一个大小为 $(2^N + 1)^2$ 的方阵, 所包含四边形的数

量为 4^N . 如果把细分 N 次的 SSP 均匀分割成四部分, 则每部分网格的拓扑结构都是一个大小为 $(2^{N-1} + 1)^2$ 的方阵, 其中包含四边形的数量为 4^{N-1} . 由此可见, 细分 N 次的 SSP 进行第 1 级分割后, 所获得的子面片网格的拓扑结构与细分 $N-1$ 次的 SSP 网络的拓扑结构相同. 同时, 所获得的子面片网格可以再次进行 1-4 分割, 将这次分割定义为第 2 级分割. 因此, 细分 N 次的 SSP 可以进行 N 级 1-4 分割. 图 4(a) 为细分 3 次的 SSP, 图 4(b) ~ (d) 分别为第 1、2 和 3 级分割后得到的子面片. 假设黑色的四边形面与直线相交, 经过 3 级分割后, 与直线相交的四边形面就会被判定.

3.2 分治策略

为快速锁定与直线相交的网格面, 结合 SSP 多级分割和轴对称包围盒 (axis aligned bounding box, AABB) 干涉检测技术, 提出如下分治策略: SSP 进行 1 级分割后, 对获得的子面片建立 AABB. 通过 AABB 与直线的相交检测快速锁定

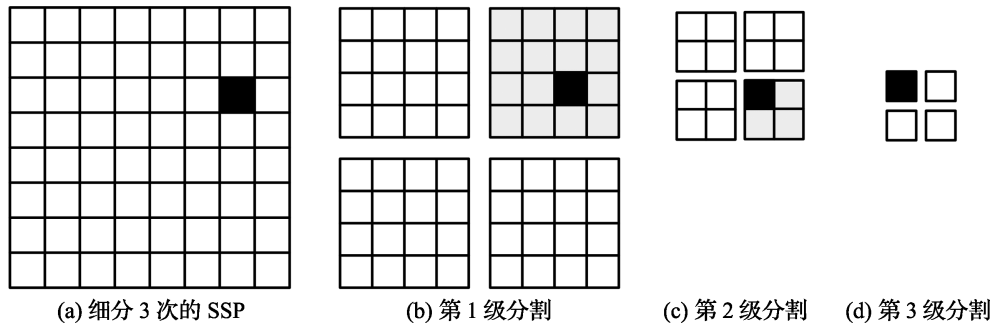


图4 SSP 多级分割

Fig. 4 SSP multi-segmentation

可能含有相交网格面的子面片. 对于细分 N 次的 SSP, 通过 N 级分割并结合 AABB 干涉检测技术, 就会锁定与直线相交的网格面. 在这个过程中, 如果某一级分割后的所有子面片的 AABB 与直线均不相交则说明此 SSP 与直线不相交. SSP 多级分割并不是将网格真正地分割, 而是为了提取特定范围内的网格顶点创建 AABB. 由于 SSP 顶点的坐标存储在 Ac 中, 通过确定 Ac 行列索引的范围提取对应的顶点. 多级分割的子面片可以采用如下方法表示:

$$\begin{aligned} A_1^n &= Ac(i_1^n : i_1^n + l^n, j_1^n : j_1^n + l^n); \\ A_2^n &= Ac(i_2^n : i_2^n + l^n, j_2^n : j_2^n + l^n); \\ A_3^n &= Ac(i_3^n : i_3^n + l^n, j_3^n : j_3^n + l^n); \\ A_4^n &= Ac(i_4^n : i_4^n + l^n, j_4^n : j_4^n + l^n); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l^n &= 2^{N-n}; \\ i_1^n &= i^{n-1}; \\ j_1^n &= j^{n-1}; \\ i_2^n &= i^{n-1} + l^{n-1}; \\ j_2^n &= j^{n-1}; \\ i_3^n &= i^{n-1} + l^{n-1}; \\ j_3^n &= j^{n-1} + l^{n-1}; \\ i_4^n &= i^{n-1}; \\ j_4^n &= j^{n-1} + l^{n-1} \end{aligned} \quad (1)$$

在式(1)中, 二维数组 A_1^n 、 A_2^n 、 A_3^n 和 A_4^n 分别表示经过第 n 级分割所获得的 4 个子面片; i_1^n 、 j_1^n 、 i_2^n 、 j_2^n 、 i_3^n 、 j_3^n 、 i_4^n 和 j_4^n 分别表示对应二维数组的起始行列索引; l^n 表示第 n 级分割子面片的二维数组中终止行列索引与起始行列索引之差; i^{n-1} 和

j^{n-1} 分别表示第 n 级被分割面片的二维数组的起始行列索引; i^0 和 j^0 分别表示 A_c 的起始行列索引. 因此, 只要确定第 n 级被分割面片的二维数组的起始行列索引, 就可以推导出由第 n 级分割所获得的 4 个子面片.

3.3 直线与 Catmull-Clark 细分曲面求交

直线与 Catmull-Clark 细分曲面求交的算法流程图如图 5 所示.

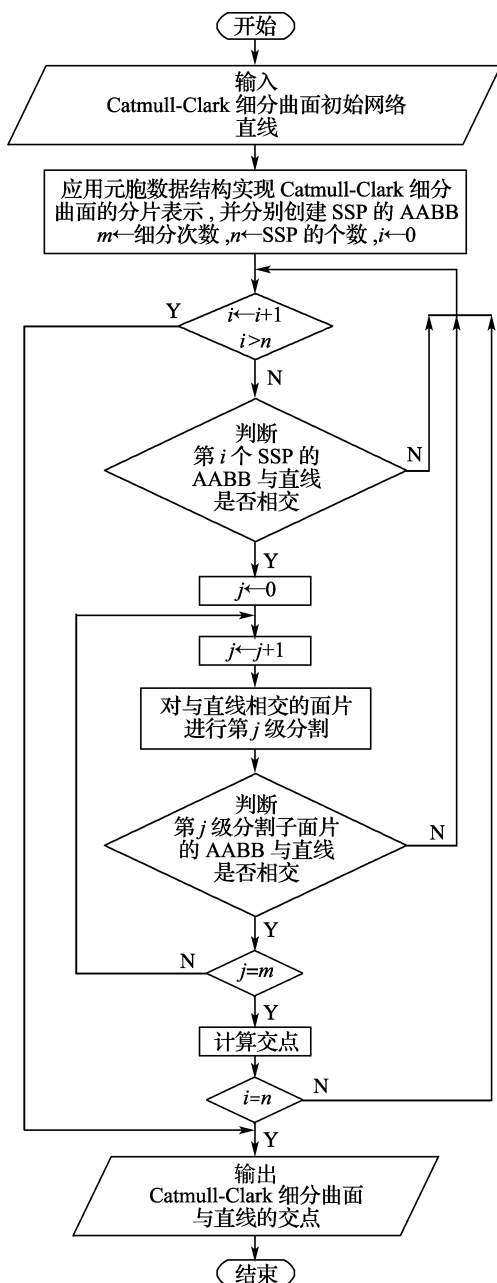


图 5 直线与 Catmull-Clark 细分曲面求交的算法流程图

Fig. 5 Flowchart of algorithm for computing line/Catmull-Clark subdivision surface intersection

快速计算直线与高精度细分曲面交点的算法详细描述如下:

Step 1 根据用户指定的精度, 计算 Catmull-Clark 细分曲面极限网格的细分次数. 应用元胞数据结构实现 Catmull-Clark 细分曲面的分片表示并对每个 SSP 创建 AABB, 以 m 表示细分次数, n 表示 SSP 的个数并设置参数 i 的初值为 0.

Step 2 $i = i + 1$, 如果 $i > n$, 则中止计算程序并输出计算结果.

Step 3 判断第 i 个 SSP 的 AABB 与直线是否相交, 如果相交, 设置参数 j 的初值为 0, 否则进行 Step 2.

Step 4 $j = j + 1$, 对与直线相交的面片进行第 j 级分割, 为每个分割得到的子面片创建 AABB 并分别与直线进行相交检测. 记录相交的子面片, 如果不存在相交子面片, 进行 Step 2.

Step 5 如果 $j = m$, 将相交面片的网格离散成三角面片, 以直线与三角面片的交点作为直线与 Catmull-Clark 细分曲面的交点, 否则进行 Step 4.

Step 6 如果 $i = n$, 输出 Catmull-Clark 细分曲面与直线的交点, 否则进行 Step 2.

4 算法测试与分析

算法测试共分为两部分: 第一部分主要测试直线与 SSP 交点计算的稳定性; 第二部分主要测试直线与复杂细分曲面模型交点计算的效率. 算法测试的软、硬件环境分别如下: Windows 7 64-bit 操作系统和 Matlab 2012b 软件; CPU i5-3570k, RAM 8 GB.

第一部分算法的测试模型是一个细分 10 次的 Catmull-Clark 细分曲面面片. 以图 6(a)~(f) 所示的不同相交情况的直线和 SSP 作为测试样本. 各个测试样本的直线与 SSP 的相交情况、交点坐标、在计算交点的过程中所需进行的 SSP 分割等级和算法计算时间等测试数据见表 1.

从表 1 中的测试数据可以看出, 对于图 6 所示的直线与 SSP 的相交、相切和相离的各种情况, 算法均能给出正确的计算结果, 测试结果表明直线与 SSP 交点计算的稳定性较强. 同时, 在 SSP 的顶点个数达到百万级的情况下, 计算耗时均为 0.01 s 左右, 这也表明直线与 SSP 交点计算的速度较快. SSP 是构成细分曲面模型的基本数据元素, 理论上, 直线与细分曲面模型在全局范围内的交点必然存在于局部 SSP 之中, 因此可以将

直线与复杂细分曲面模型的求交问题转化为直线与拓扑结构简单的 SSP 的求交问题,有利于提高直线与复杂细分曲面模型交点计算的稳定性.

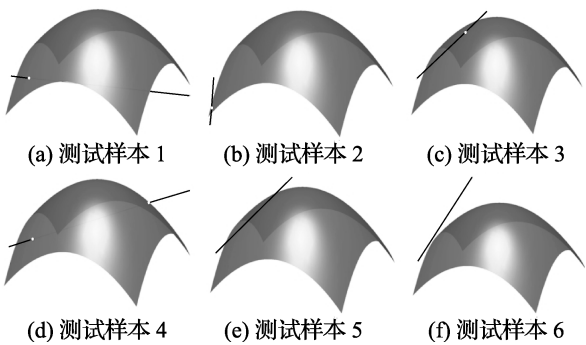


图 6 SSP 与直线求交

Fig. 6 Computing intersection between SSP and line

表 1 SSP 与直线求交的测试数据

Tab.1 Test data of computing intersection between SSP and line

测试 样本	相交 情况	交点坐标	SSP 分割 等级	计算耗时/s
1	相交	(5.663,5.483,47.228)	10	0.011 985
2	相交	(5.069,5.131,42.742)	10	0.011 850
3	相切	(6.441,6.858,53.730)	10	0.011 416
4	相交	(5.818,5.644,48.515) (8.923,8.878,51.102)	10	0.017 569
5	相离	无	10	0.011 367
6	相离	无	4	0.003 584

第二部分算法的测试模型是一个由 196 个 SSP 构成的复杂细分曲面模型,在表示精度设置为 0.001 mm 时,测试模型细分次数的计算结果为 9.以图 7 所示的不同相交情况的直线和复杂细分曲面模型作为测试样本,测试直线与复杂细分曲面模型交点计算的效率,各个测试样本的交点个数、最初可能相交的 SSP 数量、最终确定相交的 SSP 数量和算法计算时间等测试数据见表 2.

从表 2 的数据可以看出,对于图 7 所示的直线与复杂细分曲面模型的各种相交情况,算法均能给出正确的结果,在测试模型的顶点个数达到千万级的情况下,计算耗时仍很小.其中,最大耗时为 0.067 661 s,最小耗时为 0.035 632 s,测试结果表明直线与复杂细分曲面模型交点计算的效率较高.基于元胞数据结构分片表示 Catmull-Clark 细分曲面主要是为了在交点计算的过程中实施分治策略.以 AABB 包围盒干涉检测为基础的第 1 级分治可以快速排除绝大多数与直线不相交的 SSP,如表

2 所示,可能与直线相交的 SSP 数量仅占测试模型 SSP 总数的 5%左右.以 SSP 多级分割为基础的第 2 级分治可以快速排除与直线不相交的子面片.第 1 级分治显著降低交点计算的规模,第 2 级分治快速锁定与直线相交的子面片,这都有利于提高直线与复杂细分曲面模型交点计算的效率.

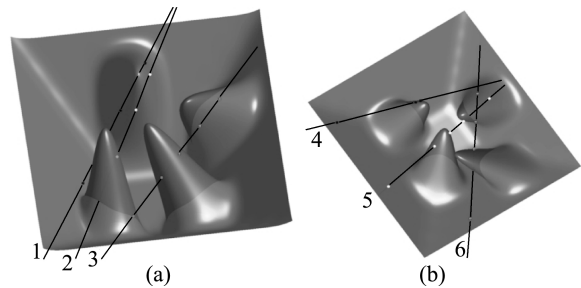


图 7 复杂细分曲面模型与直线求交

Fig. 7 Computing intersection between complicated subdivision surface model and line

表 2 复杂细分曲面模型与直线求交的测试数据

Tab.2 Test data of computing intersection between complicated subdivision surface model and line

测试 样本	交点 个数	可能相交的 SSP 数量	相交的 SSP 数量	计算耗时/s
1	3	9	3	0.038 614
2	3	11	3	0.041 406
3	5	13	5	0.067 661
4	3	6	3	0.035 632
5	5	8	5	0.047 043
6	5	14	5	0.070 234

5 结 论

采用元胞数据结构实现 Catmull-Clark 细分曲面的分片表示不仅降低了高精度细分曲面的计算机内存消耗,而且为分治策略的实施提供了基础.第 1 级分治将复杂细分曲面模型与直线的求交问题转化为简单细分曲面面片与直线的求交问题,提高了交点计算的稳定性和效率.第 2 级分治利用了细分曲面面片方阵拓扑结构,提出细分曲面面片多级分割的方法,在此基础上实现了直线与细分曲面面片交点的快速计算.通过实例测试了算法的性能,测试结果表明本文提出的直线与 Catmull-Clark 细分曲面求交的算法实用、高效.如何将本文算法的核心理论和方法扩展到平面与细分曲面求交的研究中将是未来的研究方向.

参考文献:

- [1] 袁 鸿, 廖文和. 给定精度条件下的 Catmull-Clark 细分曲面求交研究[J]. 机械科学与技术, 2008, **27**(4):486-489.
YUAN Hong, LIAO Wen-he. On Catmull-Clark subdivision surface intersection with a given precision [J]. **Mechanical Science and Technology**, 2008, **27**(4):486-489. (in Chinese)
- [2] 郑立垠, 张 丽. 基于凸包特征的细分曲面求交研究[J]. 计算机工程与设计, 2008, **29**(1):102-104.
ZHENG Li-yin, ZHANG Li. Study of intersections for subdivision surface with convex hull [J]. **Computer Engineering and Design**, 2008, **29**(1):102-104. (in Chinese)
- [3] Nasri A. Polyhedral subdivision methods for free form surfaces [J]. **ACM Transactions on Graphics**, 1987, **6**(1):29-73.
- [4] Lanquetin S, Foufou S, Kheddouci H, *et al.* A graph based algorithm for intersection of subdivision surfaces [C] // **Proceedings of Computational Science and Its Applications — ICCSA**. Berlin: Springer-Verlag, 2003:387-396.
- [5] 李 涛, 周来水. 细分曲面求交裁剪算法研究[J]. 计算机工程与应用, 2009, **45**(30):177-184.
LI Tao, ZHOU Lai-shui. Research on intersection and trimming algorithms for subdivision surfaces [J]. **Computer Engineering and Applications**, 2009, **45**(30):177-184. (in Chinese)
- [6] ZHU Xu-ping, HU Shi-ming, Tai Chiew-lan, *et al.* A marching method for computing intersection curves of two subdivision solids [M] // **Mathematics of Surfaces XI**. Berlin: Springer-Verlag, 2005:458-471.
- [7] Catmull E, Clark J. Recursively generated B-spline surface on arbitrary topological meshes [J]. **Computer-Aided Design**, 1978, **10**(6):350-355.
- [8] Halstead M, Kass M, DeRose T. Efficient, fair interpolation using Catmull-Clark surfaces [C] // **Proceedings of the ACM SIGGRAPH '93 Conference on Computer Graphics**. New York: ACM, 1993:35-44.
- [9] HUANG Zhang-jin, DENG Jian-song, WANG Guo-ping. A bound on the approximation of a Catmull-Clark subdivision surface by its limit mesh [J]. **Computer Aided Geometric Design**, 2008, **25**:457-469.
- [10] Kevin W. Edge-based data structures for solid modeling in curved-surface environments [J]. **IEEE Computer Graphics and Applications**, 1985, **5**(1):21-40.
- [11] Denis Z, Peter S. A unified framework for primal/dual quadrilateral subdivision schemes [J]. **Computer Aided Geometric Design**, 2001, **18**:429-454.
- [12] Settgast V, Müller K, Fünzig C, *et al.* Adaptive tessellation of subdivision surfaces [J]. **Computers & Graphics**, 2004, **28**(1):73-78.

An efficient algorithm for computing intersection between line and high precision subdivision surface

ZHU Jian-ning, WANG Min-jie*, WEI Zhao-cheng, CAO Bin

(School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: To solve the problem of inefficiency and poor stability in computing intersection between line and high precision subdivision surface, an efficient method is presented for computing intersection between line and Catmull-Clark subdivision surface by utilizing topological characteristics of subdivision surface. Firstly, a new data structure is constructed for piecewise representation of Catmull-Clark subdivision surface. Then, an axis aligned bounding box (AABB) is created for each subdivision surface patch. Based on AABB collision detection technology, subdivision surface patches non-intersecting the line can be eliminated rapidly. Subdivision surface patch multi-segmentation technology is presented on the basis of topological characteristics of subdivision surface patch. Lastly, quadrilateral face intersecting the line can be determined and intersection point can be obtained by combination of multi-segmentation and AABB collision detection technology.

Key words: line/subdivision surface intersection; data structure; divide and conquer strategy; multi-segmentation