

一类切换系统的最优控制及其优化算法

翟金剛^{*1}, 尹洪超¹, 冯恩民²

(1. 大连理工大学 能源与动力学院, 辽宁 大连 116024;

2. 大连理工大学 数学科学学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 在切换序列和切换次数未知的情况下, 研究了一类切换系统的最优控制问题. 首先, 以切换系统为基础, 通过构造嵌入系统, 研究了嵌入系统的最优性条件和切换系统次优解的构造方法; 其次, 讨论了两个系统的关系, 给出并证明了嵌入系统最优解是切换系统最优解的充分性条件; 最后, 根据充分性条件, 构造了求解切换系统最优或次优解的优化算法. 数值结果验证了算法的有效性.

关键词: 切换系统; 切换最优控制; 混杂系统; 优化算法

中图分类号: O232 **文献标志码:** A

0 引言

切换系统是一类特殊的混杂系统, 其广泛的应用吸引了越来越多研究者的关注^[1]. 许多现实过程, 诸如生物化学过程、汽车制造、航空航天、电力系统等领域的控制都涉及切换系统^[2-3].

近年来, 在切换系统的理论和应用方面涌现了一批成果^[2-11], 值得关注的是, Branicky 等^[4]给出了混杂系统最优控制的理论框架, 系统阐述了混杂控制的模型, 讨论了最优解和近似最优解的存在性及算法, 成为研究混杂最优控制的经典之作. 然而, 作为特殊的混杂系统, 切换系统最优控制仍然有许多待解决的问题. Xu 等^[2,5-6]和 Egerstedt 等^[7]通过计算性能指标的梯度, 建立了求解最优切换时刻的梯度下降算法, 特别是文献^[6]将切换时刻参数化, 通过求解一个两点边值代数微分方程, 给出了性能指标关于切换时刻的一阶和二阶梯度, 从而为应用数值优化方法求解参数化的切换时刻奠定了基础. 然而, 对于一般的非线性系统而言, 求解代数微分方程仍然是比较困难的. Kamgarpour 等^[8]基于固定的切换模式序列, 针对非自治切换系统的最优控制问题, 研究了最优值函数(optimal value function)梯度的计算

方法, 并利用最优值函数的梯度来优化切换时刻, 该方法较之直接计算性能指标关于切换时刻的梯度更加有效. 此外, Teo 等^[9-10]也提出了控制参数化技术, 并提出了时间尺度变换方法, 直接应用经典的数值优化方法求解切换时刻和控制输入的近似解, 他们的方法在后续工作中得到了广泛应用^[12-14]. 为进一步优化切换次数, Axelsson 等^[15]利用变分原理, 构造了双层优化算法, 即在内层基于固定的切换序列, 优化每一模式的切换时间; 而在外层基于梯度下降算法, 通过在已有切换序列中插入新切换模式的方法, 实现切换序列的优化, 取得了较好的效果. 然而, 上述这些方法一般需要假设系统是非奇异的, 或者需要给定切换序列. 与之相反, Bengea 等^[16-17]不考虑切换次数和切换序列, 研究了两个切换系统的最优控制问题, 考虑了最优解的必要条件和解存在的充分条件, 为求解切换系统的最优控制提供了新的解决方法.

在 Bengea 方法的启发下, 本文考虑具有 $s(s > 2)$ 个切换系统的最优控制问题. 通过将 s 个切换系统嵌入到一个更大的系统——嵌入系统中, 研究切换系统次优解的构造方法. 应用极大值原理, 讨论嵌入系统最优解的必要性条件.

收稿日期: 2012-05-04; 修回日期: 2013-05-12.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471014, 10871033, 11171050).

作者简介: 翟金剛^{*}(1973-), 男, 博士生, 副教授, E-mail: zhaijingang@hotmail.com; 尹洪超(1960-), 男, 教授, 博士生导师, E-mail: hcyin@dlut.edu.cn; 冯恩民(1939-), 男, 教授, 博士生导师.

1 问题描述

考虑如下切换系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; t \in [t_0, t_f] \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态向量, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{U}_{\text{ad}} \subset \mathbf{R}^m$ 是凸紧集 $\mathbf{U}_{\text{ad}}$ 上的连续控制向量, $\mathbf{v}(t) \in \mathbf{V}_{\text{ad}} \subset \{0, 1\}^{s-1}$ 是集合 $\mathbf{V}_{\text{ad}}$ 上的切换控制向量. 集合 $\mathbf{V}_{\text{ad}}$ 可表示为

$$\mathbf{V}_{\text{ad}} = \{\mathbf{0}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^{s-1}\} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{e}^i (i = 1, 2, \dots, s-1)$ 是单位向量, 记 $\mathbf{e}^0 = \mathbf{0}$. $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是可测函数; $\mathbf{f}$ 是分片连续可微的实向量值函数; 系统状态不存在不连续跳跃. 初值约束集记为 $\mathbf{B}_0 = T_0 \times \mathbf{X}_0$, 终值约束集记为 $\mathbf{B}_f = T_f \times \mathbf{X}_f$, 且端点约束集

$\mathbf{B} = \{(t_0, \mathbf{x}_0, t_f, \mathbf{x}_f) \mid (t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbf{B}_0, (t_f, \mathbf{x}_f) \in \mathbf{B}_f\}$ 是 $\mathbf{R}^{2n+2}$ 上的紧集.

定义性能指标为

$$J_s(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = h(t_0, \mathbf{x}_0, t_f, \mathbf{x}_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) dt \quad (3)$$

其中 h 是定义在 $\mathbf{B}$ 上某邻域的分片连续可微实值函数, g 亦为分片连续可微实值函数. 为描述方便, 定义 $I_s \equiv \{1, 2, \dots, s\}$ 为指标集, 类似地有 I_N 等指标集. 对于给定的 $\mathbf{v}^i(t) \in \mathbf{V}_{\text{ad}}$, $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$ 相应地记为

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}^i(t)), \\ g^i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) &= g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}^i(t)); i \in I_s. \end{aligned}$$

从而, 切换系统的最优控制问题 (switched optimal control problem, 简记为 SOCP) 可描述为

$$\text{SOCP: } \min_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} J_s(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (4)$$

并满足约束条件:

- (1) $\mathbf{x}(\cdot)$ 是系统(1) 的解;
- (2) $(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_f, \mathbf{x}(t_f)) \in \mathbf{B}$;
- (3) 对任意的 $t \in [t_0, t_f], \mathbf{u}(t) \in \mathbf{U}_{\text{ad}}, \mathbf{v}(t) \in \mathbf{V}_{\text{ad}}$.

下面, 给出嵌入系统的定义如下:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t), \tilde{\mathbf{v}}(t)); t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (5)$$

相应的性能指标为

$$J_e(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = h(t_0, \mathbf{x}_0, t_f, \mathbf{x}_f) + \int_{t_0}^{t_f} \tilde{g}(t, \mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t), \tilde{\mathbf{v}}(t)) dt \quad (6)$$

其中控制 $\tilde{\mathbf{u}}(t) = (\tilde{\mathbf{u}}_1^T(t) \ \dots \ \tilde{\mathbf{u}}_s^T(t))^T \in [\mathbf{R}^m]^s$, 而 $\tilde{\mathbf{v}}(t) = (\tilde{v}_1(t) \ \dots \ \tilde{v}_s(t))^T \in [0, 1]^{s-1}$, 并令 $\zeta_1(t) = (1 - \tilde{v}_1(t))(1 - \tilde{v}_2(t)) \dots (1 - \tilde{v}_{s-1}(t))$, $\vdots$

$$\begin{aligned} \zeta_i(t) &= \tilde{v}_{i-1}(t)(1 - \tilde{v}_i(t)) \dots (1 - \tilde{v}_{s-1}(t)), \\ &\vdots \\ \zeta_s(t) &= \tilde{v}_{s-1}(t) \end{aligned}$$

对任意的 $t \in [t_0, t_f]$, 显然有 $\sum_{i=1}^s \zeta_i(t) = 1$. 向量场 $\tilde{\mathbf{f}}$ 和积分项 $\tilde{g}$ 分别表示如下:

$$\tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t), \tilde{\mathbf{v}}(t)) = \sum_{i=1}^s \zeta_i(t) \mathbf{f}^i(t, \mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{u}}_i(t)) \quad (7)$$

$$\tilde{g}(t, \mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t), \tilde{\mathbf{v}}(t)) = \sum_{i=1}^s \zeta_i(t) g^i(t, \mathbf{x}(t), \tilde{\mathbf{u}}_i(t)) \quad (8)$$

从而, 嵌入系统的最优控制 (embedded optimal control problem, 简记为 EOCP) 可描述为

$$\text{EOCP: } \min_{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}} J_e(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) \quad (9)$$

并满足约束条件:

- (1) $\mathbf{x}(\cdot)$ 是系统(5) 的解;
- (2) $(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_f, \mathbf{x}(t_f)) \in \mathbf{B}$;
- (3) 对任意的 $t \in [t_0, t_f], \tilde{\mathbf{u}}(t) \in [\mathbf{U}_{\text{ad}}]^s, \tilde{\mathbf{v}}(t) \in [0, 1]^{s-1}$.

2 嵌入系统与切换系统的关系

由嵌入系统的定义可知, 嵌入系统的轨线集包含切换系统的轨线集. 下面将进一步说明, 切换系统的轨线集是嵌入系统轨线集的稠密子集, 并可以任意逼近.

命题 1 设 $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot) \in [\mathbf{U}_{\text{ad}}]^s, \tilde{\mathbf{v}}(\cdot) \in [0, 1]^{s-1}$ 是嵌入系统(5) 的控制, 系统(1) 和(5) 的初值点均为 $(t_0, \mathbf{x}_0)$, $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ 是 $[t_0, t_f]$ 上对应于 $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot)$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot)$ 的轨线. 则任给 $\epsilon > 0$, 在区间 $[t_0, t_f]$ 上存在切换系统(1) 的控制 $\mathbf{u}_\epsilon(\cdot) \in \mathbf{U}_{\text{ad}}$ 和 $\mathbf{v}_\epsilon(\cdot) \in \{0, 1\}^{s-1}$ 以及相应的轨线 $\boldsymbol{\varphi}_\epsilon(\cdot)$, 使得对任意的 $t \in [t_0, t_f]$ 有 $|\boldsymbol{\varphi}_\epsilon(t) - \boldsymbol{\psi}(t)| < \epsilon$.

证明 任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 如果 $\mathbf{u}_\epsilon(\cdot)$ 和 $\mathbf{v}_\epsilon(\cdot)$ 按照以下方法构造, 则由文献[16-18] 的 Chattering 引理, 相应的轨线 $\boldsymbol{\varphi}_\epsilon(\cdot)$ 满足结论. 令 $[t_{k-1}, t_k]$ 为 $[t_0, t_f]$ 上的一个子区间, $t_k - t_{k-1} < \delta$, $E_{ki} (i \in I_s)$ 为 $[t_{k-1}, t_k]$ 上 s 个互不相交的子分割, 且使得 E_{ki} 的测度为

$$|E_{ki}| = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \zeta_i(t) dt; i \in I_s \quad (10)$$

则对任意的 $t \in [t_{k-1}, t_k]$ 以及对某个 i 而言($i \in I_s$), 如果 $t \in \text{int}(E_{ki})$, 令

$$u_\epsilon(t) = \tilde{u}_i(t), v_\epsilon(t) = e^{i-1} \quad (11)$$

其中 $e^0 = \mathbf{0}$. 相应地系统(1) 成为

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_\epsilon(t), v_\epsilon(t)); t \in E_{ki} \quad (12)$$

$\varphi_\epsilon(\cdot)$ 为系统(12) 及初值(t_0, x_0) 的解. 对任意的 $t \in [t_0, t_f]$, 按照式(10) ~ (12) 的构造方法得到的 $\varphi_\epsilon(\cdot)$ 可满足 $|\varphi_\epsilon(t) - \psi(t)| < \epsilon$. 余下的证明详见文献[16-18]. $\square$

由于 $g^i(i \in I_s)$ 是片分连续可微函数, 由连续性性质, 则轨线 $\varphi_\epsilon(\cdot)$ 可使性能指标满足

$$|J_s(\varphi_\epsilon, u_\epsilon, v_\epsilon) - J_e(\psi, \tilde{u}, \tilde{v})| < \epsilon$$

从而, 如果 $\psi(\cdot)$ 是 EOCP 的最优轨线, 则 $\varphi_\epsilon(\cdot)$ 是 SOCP 的次优轨线.

命题 2 设 $x_e^*(\cdot)$ 是 EOCP 的最优轨线, 如果满足 $x_e^*(t_f) \in \text{int}(X_f)$, 则下面至少有一个结论成立:

(1) SOCP 的解 $x_s^*(\cdot)$ 也是 EOCP 的解;

(2) SOCP 没有解, 但可以通过求解 EOCP 构造得到次优解.

3 最优解的必要条件

本节将讨论最优解的必要条件. 由命题 1 和 2 可知, 无论 SOCP 是否存在最优解, 通过求解 EOCP 至少能够得到 SOCP 的次优解. EOCP 存在最优解的充分条件详见文献[17]. 因而本节及以后只考虑 EOCP 存在最优解的情况.

构造 Hamilton 函数如下:

$$H(t, x, \tilde{u}, \tilde{v}, \lambda) = -\tilde{g}(t, x, \tilde{u}, \tilde{v}) + \lambda^T \tilde{f}(t, x, \tilde{u}, \tilde{v}) \quad (13)$$

将其简记为 H (或 $H(t)$). 由式(7)、(8) 及 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 的构造可得

$$H(t, x, \tilde{u}, \tilde{v}, \lambda) = \sum_{i=1}^s \zeta_i(t) [-g^i(t, x, \tilde{u}_i) + \lambda^T f^i(t, x, \tilde{u}_i)] \quad (14)$$

另一方面, 若令 $H^s = H$, 则可以按照递归形式得到如下的 Hamilton 函数:

$$H^1(t, x, \tilde{u}, \tilde{v}, \lambda) = -g^1(t, x, \tilde{u}_1) + \lambda^T f^1(t, x, \tilde{u}_1) \quad (15)$$

$$H^i(t, x, \tilde{u}, \tilde{v}, \lambda) = H^{i-1} + \tilde{v}_{i-1} [-g^i(t, x, \tilde{u}_i) + \lambda^T f^i(t, x, \tilde{u}_i) - H^{i-1}];$$

$$i = 2, \dots, s \quad (16)$$

假设 EOCP 的最优解为 $(x^*(t), \tilde{u}^*(t), \tilde{v}^*(t))$, 由逐点极大值原理, 存在一个绝对连续函数 $\lambda^*(t)$ 对几乎所有的 $t \in [t_0, t_f]$ 有

$$\dot{x}^*(t) = H_x^*(t, x^*(t), \tilde{u}^*(t), \tilde{v}^*(t), \lambda^*(t)) \quad (17)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -H_x^*(t, x^*(t), \tilde{u}^*(t), \tilde{v}^*(t), \lambda^*(t)) \quad (18)$$

其中 H_λ, H_x 分别表示关于 λ 和 x 的偏导数, 且对任意的 $\tilde{u}(\cdot) \in [U_{ad}]^s, \tilde{v}(\cdot) \in [0, 1]^{s-1}$,

$$H(t, x^*(t), \tilde{u}^*(t), \tilde{v}^*(t), \lambda^*(t)) = \max_{\tilde{u}, \tilde{v}} H(t, x^*(t), \tilde{u}(t), \tilde{v}(t), \lambda^*(t)) \quad (19)$$

成立. 为求解式(19), 需要下面的命题.

命题 3 若 $U \subset \mathbf{R}^m$ 是一紧集, $F, G: U \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续函数, 则有

$$P_1: \max_{(\sigma, \rho) \in [0, 1] \times U} [\sigma F(\rho) + G(\rho)] = \max_{\rho \in U} \{ \max_{\sigma \in [0, 1]} [\sigma F(\rho) + G(\rho)], \max_{\rho \in U} G(\rho) \}$$

$$P_2: \text{设 } (\hat{\sigma}, \hat{\rho}) \in [0, 1] \times U \text{ 满足}$$

$$\hat{\sigma} F(\hat{\rho}) + G(\hat{\rho}) = \max_{(\sigma, \rho) \in [0, 1] \times U} [\sigma F(\rho) + G(\rho)]$$

若 $F(\hat{\rho}) \neq 0$, 则 $\hat{\sigma} \in \{0, 1\}$. 若 $F(\hat{\rho}) = 0$, 则

$$\max_{\rho \in U} [F(\rho) + G(\rho)] = \max_{\rho \in U} G(\rho)$$

且 $\hat{\sigma}$ 可取 $[0, 1]$ 上的任意数.

$$P_3: \text{设 } (\hat{\sigma}, \hat{\rho}) \text{ 满足 } (P_2) \text{ 中条件, 若}$$

$$F(\hat{\rho}) + G(\hat{\rho}) = \max_{\rho \in U} [F(\rho) + G(\rho)] > \max_{\rho \in U} G(\rho)$$

则 $F(\hat{\rho}) > 0$ 且 $\hat{\sigma} = 1$. 反之, 若

$$G(\hat{\rho}) = \max_{\rho \in U} G(\rho) > \max_{\rho \in U} [F(\rho) + G(\rho)]$$

则 $F(\hat{\rho}) < 0$ 且 $\hat{\sigma} = 0$.

证明详见文献[17].

由逐点极大值原理以及式(15)、(16), 对几乎所有的 $t \in [t_0, t_f]$, 可得

$$H(t, x^*(t), \tilde{u}^*(t), \tilde{v}^*(t), \lambda^*(t)) = \max_{(\mu, z) \in [0, 1]^{s-1} \times [U_{ad}]^s} H^s(t, x^*(t), z, \mu, \lambda^*(t)) = \max_{(\mu, z) \in [0, 1]^{s-1} \times [U_{ad}]^s} \{ H^{s-1} + \mu_{s-1} [-g^s(t, x^*(t), z_s) + \lambda^{*T}(t) f^s(t, x^*(t), z_s) - H^{s-1}] \}$$

应用命题 3 中 (P_1) , 则有

$$\max_{(\mu, z) \in [0, 1]^{s-1} \times [U_{ad}]^s} H^s(t, x^*(t), z, \mu, \lambda^*(t)) = \max_{z_s \in U_{ad}} \{ \max_{\mu \in [0, 1]} [-g^s(t, x^*(t), z_s) + \lambda^{*T}(t) f^s(t, x^*(t), z_s)], \max_{z_s \in U_{ad}} H^{s-1} \}$$

对 H^{s-1} 重复上面的过程直至 H^1 , 于是有

$$H = \max\{\widetilde{H}^s, \cdots, \widetilde{H}^2, \widetilde{H}^1\} \tag{20}$$

其中对每一个 $i \in I_s$,

$$\begin{aligned} \widetilde{H}^i = \max_{z_i \in U_{\text{ad}}} [&-g^i(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{z}_i) + \\ &\lambda^{*\text{T}}(t) f^i(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{z}_i)] \end{aligned} \tag{21}$$

令

$$\begin{aligned} T_i = \{t \in [t_0, t_f] \mid &-g^i(t, \mathbf{x}^*(t), \widetilde{\mathbf{u}}_i(t)) + \\ &\lambda^{*\text{T}}(t) f^i(t, \mathbf{x}^*(t), \widetilde{\mathbf{u}}_i(t)) - H^{i-1} = 0\}; \\ 1 &< i \leqslant s \\ T_1 &= T_2 \end{aligned}$$

则对几乎所有的 $t \in [t_0, t_f] \setminus T_i$, 由命题 3 中 (P_2) 及式(19), $\widetilde{v}_{i-1}^*(t) \in \{0, 1\}$. 下面给出嵌入系统最优解是切换系统解的充分条件.

定理 1 设 $[t_{k-1}, t_k]$ 为 $[t_0, t_f]$ 上的一个子区间, 满足 $t_k - t_{k-1} < \delta$, 如果存在 $i \in I_s$ 使得对任意的 $j \in I_s, j \neq i$ 及 a. a. $t \in [t_{k-1}, t_k] \setminus T_i$ 满足 $\widetilde{H}^i > \widetilde{H}^j$, 则 $\zeta_i(t) = 1$, 相应地式(17)、(18) 化为

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{f}^i(t, \mathbf{x}^*(t), \widetilde{\mathbf{u}}_i^*(t)) \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^*(t) = &g_x^i(t, \mathbf{x}^*(t), \widetilde{\mathbf{u}}_i^*(t)) - \\ &(f_x^i(t, \mathbf{x}^*(t), \widetilde{\mathbf{u}}_i^*(t)))^{\text{T}} \lambda^*(t) \end{aligned} \tag{23}$$

其中 f_x^i, g_x^i 为 $\mathbf{x}$ 的偏导数, 且 $\widetilde{\mathbf{u}}_i^*(t) = \arg \max \widetilde{H}^i$.

证明 由式(14)、(17)~(21)及命题 3 易证. □

推论 1 如果所有的集合 $T_i (i \in I_s)$ 测度均为零, 则 EOCP 的最优轨线也是 SOCP 的最优轨线, 并且 SOCP 的最优控制输入 $\mathbf{u}^*(t) =$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \zeta_i(t) \widetilde{\mathbf{u}}_i^*(t), \text{ 相应的切换控制 } \mathbf{v}^*(t) = \\ \sum_{i=1}^s \zeta_i(t) \mathbf{e}^{i-1}. \end{aligned}$$

定理 2 如果集合 $T_i (i \in I_s)$ 有非零测度, 则对 a. a. $t \in T_i$, 存在 $j \in I_s$ 使得 $\widetilde{H}^i = \widetilde{H}^j$ 且

$$\widetilde{\mathbf{u}}_i^*(t) = \arg \max \widetilde{H}^i, \widetilde{\mathbf{u}}_j^*(t) = \arg \max \widetilde{H}^j$$

证明 由命题 3 中 (P_2) , 对 a. a. $t \in T_i$,

$$\begin{aligned} \max H^i(t, \mathbf{x}^*(t), \widetilde{\mathbf{u}}(t), \boldsymbol{\mu}, \lambda^*(t)) = \\ \max \{H^{i-1} + \mu_{i-1}[-g^i(t, \mathbf{x}^*(t), \widetilde{\mathbf{u}}_i(t)) + \\ \lambda^{*\text{T}}(t) f^i(t, \mathbf{x}^*(t), \widetilde{\mathbf{u}}_i(t)) - H^{i-1}]\} = \\ \max H^{i-1}(t, \mathbf{x}^*(t), \widetilde{\mathbf{u}}(t), \boldsymbol{\mu}, \lambda^*(t)) \end{aligned}$$

对 $\mu_{i-1} \in [0, 1]$ 成立. 若 $\widetilde{H}^{i-1} > \max H^{i-2}$, 则取 $j = i - 1$, 从而

$$\begin{aligned} \max H^{i-1}(t, \mathbf{x}^*(t), \widetilde{\mathbf{u}}(t), \boldsymbol{\mu}, \lambda^*(t)) = \\ \max \{\widetilde{H}^{i-1}, \max H^{i-2}\} = \widetilde{H}^{i-1} = \widetilde{H}^j \end{aligned}$$

否则继续上面的过程, 直至存在一个 $j \in I_s$

使得

$$\max H^{i-1} = \max H^{i-2} = \cdots = \max H^j = \widetilde{H}^j$$

从而对 a. a. $t \in T_i$, 可得

$$\max H^{i-1} = \widetilde{H}^i = \widetilde{H}^j$$

相应的最优控制为

$$\widetilde{\mathbf{u}}_i^*(t) = \arg \max \widetilde{H}^i, \widetilde{\mathbf{u}}_j^*(t) = \arg \max \widetilde{H}^j$$

□

由定理 1 和 2 可知, 对某一个分割 $[t_{k-1}, t_k]$ 而言, 如果式(20)中仅在某个指标 i 处达到, 且仅有一个, 同时集合 T_i 的测度为零, 则第 i 个切换系统在 $[t_{k-1}, t_k]$ 上是起作用的. 否则 SOCP 在该区间上没有最优解, 但可以将定理 2 中的 $\widetilde{\mathbf{u}}_i^*(t)$ 和 $\widetilde{\mathbf{u}}_j^*(t)$ 视为次优解, 按照命题 1 方法进行构造.

4 优化算法

假设 EOCP 存在最优解, 由命题 1、2 可知, 可以通过求解 EOCP 获得 SOCP 的最优解或次优解. 特别地, 如果在某一个剖分区间上, EOCP 的最优控制是 bang-bang 类型的解, 则它也是 SOCP 的最优解. 又由定理 1、2 可知, 求解 EOCP 可以通过独立求解 SOCP 的每一个子问题而得到. 下面给出算法的主要步骤:

步骤 1 将区间 $[t_0, t_f]$ 剖分为 N 个子区间, 记剖分点为 $t_0, t_1, \cdots, t_N$ 且 $t_N = t_f$.

步骤 2 依次选取 $\mathbf{v}^i(\cdot) \in \mathbf{V}_{\text{ad}}$, 分别求解第 i 个切换子问题, $i \in I_s$.

步骤 3 令 $J[t_k] = \{i \mid \widetilde{H}^i[t_k] = H[t_k], i \in I_s\}, k \in I_N, L^i = \{t_k \mid \widetilde{H}^i[t_k] = H[t_k], k \in I_N\}, i \in I_s$.

步骤 4 对每一个 $t_k \in L^i$, 如果 $|J[t_k]| = 1$, 则第 i 个子系统是起作用的, 得到切换系统的最优控制为 $\mathbf{u}^*(t) = \widetilde{\mathbf{u}}_i^*(t_k), \mathbf{v}^*(t) = \mathbf{e}^{i-1}, t \in (t_{k-1}, t_k]$. 否则构造次优解: 令 $n_k = |J[t_k]|$, 并将 $[t_{k-1}, t_k]$ 剖分为 n_k 个更小的子区间, 记剖分点为 $t_0^k, t_1^k, \cdots, t_{n_k}^k, t_{\tau-1}^k \leqslant t_{\tau}^k, \tau = 1, \cdots, n_k$, 且 $t_0^k = t_{k-1}, t_{n_k}^k = t_k$. 对每一个 $i_k \in J[t_k]$ 及 $\tau = 1, \cdots, n_k$, 令

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \widetilde{\mathbf{u}}_{i_k}^*(t_k), \hat{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{e}^{i_k-1}; t \in (t_{\tau-1}^k, t_{\tau}^k]$$

步骤 5 利用得到的 $\mathbf{u}^*(\cdot)$ 和 $\mathbf{v}^*(\cdot)$ (或 $\hat{\mathbf{u}}(\cdot)$ 和 $\hat{\mathbf{v}}(\cdot)$) 重新求解系统(1)得到 $\mathbf{x}^*(\cdot)$.

步骤 6 如果满足精度要求, 则停止. 否则, 将 $t_{\tau}^k (\tau = 1, \cdots, n_k - 1, k \in I_N)$ 作为新的剖分点增加到剖分点集合中, 转向步骤 2.

5 数值结果

考虑具有 4 个子系统的切换控制问题：

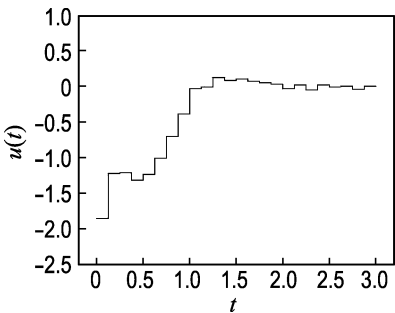
$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + u(t)\sin x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) - u(t)\cos x_2(t) \end{cases}$$
$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u(t)\sin x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - u(t)\cos x_1(t) \end{cases}$$
$$S_3: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) - u(t)\sin x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u(t)\cos x_2(t) \end{cases}$$
$$S_4: \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) - u(t)\sin x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t)\cos x_1(t) \end{cases}$$

其中 $t \in [0, 3]$, $x_1(0) = 2, x_2(0) = 3$. 性能指标为 $J = 0.5(x_1(3) - 1)^2 + 0.5(x_2(3) + 1)^2 +$

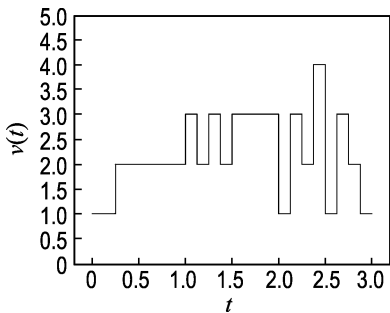
$$\int_0^3 \{ (x_1(t) - 1)^2 + (x_2(t) + 1)^2 + u^2(t) \} dt$$

切换系统的最优控制为求 $\min J$ 使得对任意的 $t \in [0, 3], x(t) \in \mathbf{R}^2$ 满足子系统 $S_1 \sim S_4$ 之一.

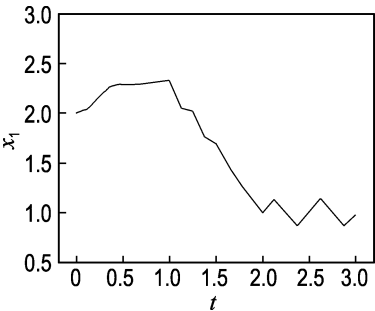
使用上面算法, 并应用基于两点边值问题、可变步长的梯度下降算法^[19] 求解子问题, 利用 C++ 语言编程求得最优切换序列为 (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 3, 1, 3, 2, 4, 1, 3, 2, 1), 其中剖分区间数 $N = 24$, 相应的最优性能指标为 4. 476 74. 求得的连续最优控制变量、切换最优控制变量及状态轨线如图 1 所示. 这个结果优于 Xu 等^[6] 在给定切换序列的基础上, 求得的最优值 5. 439 9, 说明本文提出的算法是有效的.



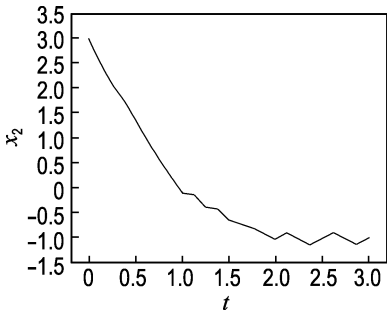
(a) 连续最优控制变量



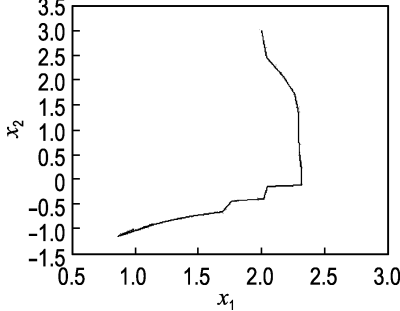
(b) 切换最优控制变量



(c) 状态轨线 x_1-t



(d) 状态轨线 x_2-t



(e) 相轨线

图 1 优化结果

Fig. 1 Optimization results

6 结 语

本文研究了切换序列和切换次数未知的一类最优切换控制问题, 推广了 Bengua 两个切换子系统的方法到 $s(s \geq 2)$ 个切换子系统. 通过构造嵌入系统, 讨论了切换系统次优解的构造方法, 并基于极大值原理, 给出了嵌入系统是切换系统最优解的充分条件. 根据充分条件, 形成了求解切换系统最优或次优解的优化算法. 最后的数值结果显示了算法的有效性.

参考文献:

[1] van der Schaft A J, Schumacher J M. **An Introduction to Hybrid Dynamical Systems** [M]. London:Springer, 2000.

[2] XU Xu-ping, Antsaklis P J. Results and perspectives on computational methods for optimal control of switched systems [C] // **HSCC 2003, Lecture Notes in Computer Science**. Prague: Springer, 2003:540-555.

[3] Li R, Teo K L, Wong K H, *et al.* Control

- parameterization enhancing transform for optimal control of switched systems [J]. **Mathematical and Computer Modelling**, 2006, **43**(11):1393-1403.
- [4] Branicky M S, Borkar V S, Mitter S K. A unified framework for hybrid control: Model and optimal control theory [J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1998, **43**(1):31-45.
- [5] XU Xu-ping, Antsaklis P J. Optimal control of switched systems via nonlinear optimization based on direct differentiations of value functions [J]. **International Journal of Control**, 2002, **75**(16-17): 1406-1426.
- [6] XU Xu-ping, Antsaklis P J. Optimal control of switched systems based on parameterization of the switching instants [J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2004, **49**(1):2-16.
- [7] Egerstedt M, Wardi Y, Delmotte F. Optimal control of switching times in switched dynamical systems [C] // **Proceedings of the 42nd IEEE CDC**. Hawaii:IEEE, 2003:2138-2143.
- [8] Kamgarpour M, Tomlin C. On optimal control of non-autonomous switched systems with a fixed mode sequence [J]. **Automatica**, 2012, **48**(6): 1177-1181.
- [9] Teo K L, Goh C J, Wong K H. **A Unified Computational Approach to Optimal Control Problems** [M]. New York:Longman, 1991.
- [10] Teo K L, Jennings L S, Lee H W, *et al.* The control parameterization enhancing transform for constrained optimal control problems [J]. **The Journal of the Australian Mathematical Society, Series B: Applied Mathematics**, 1999, **40**(3):314-335.
- [11] Luus R, Chen Y Q. Optimal switching control via direct search optimization [J]. **Asian Journal of Control**, 2004, **6**(2):302-306.
- [12] Loxton R C, Teo K L, Rehbock V, *et al.* Optimal switching instants for a switched capacitor DC/DC power converter [J]. **Automatica**, 2009, **45**(4): 973-980.
- [13] Loxton R C, Teo K L, Rehbock V. Computational method for a class of switched system optimal control problems [J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2009, **54**(10):2455-2460.
- [14] Lin Q, Loxton R C, Teo K L, *et al.* Optimal control computation for nonlinear systems with state-dependent stopping criteria [J]. **Automatica**, 2012, **48**(9):2116-2129.
- [15] Axelsson H, Wardi Y, Egerstedt M, *et al.* Gradient descent approach to optimal mode scheduling in hybrid dynamical systems [J]. **Journal of Optimization Theory and Applications**, 2008, **136**(2):167-186.
- [16] Bengea S C, de Carlo R A. Optimal and suboptimal control of switching systems [C] // **Proceedings of the 42nd IEEE CDC**. Hawaii: IEEE, 2003: 5295-5300.
- [17] Bengea S C, de Carlo R A. Optimal control of switching systems [J]. **Automatica**, 2005, **41**(1): 11-27.
- [18] Berkovitz L D. **Optimal Control Theory** [M]. New York:Springer, 1974.
- [19] Kirk D E. **Optimal Control Theory: An Introduction** [M]. New York:Dover, 1998.

A class of optimal control for switching system and optimization algorithm

ZHAI Jin-gang^{*1}, YIN Hong-chao¹, Feng En-min²

(1. School of Energy and Power Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A class of optimal control problems for the switching system is studied without imposing restrictions on the switching sequence and the number of mode switching. On the basis of the switching system, the necessary conditions for optimality and the construction method for suboptimal solutions are developed by constructing an embedded system. The relationship between the two systems is discussed, and the sufficient conditions which make the optimal solutions of the embedded system optimal for the switching system are given and proved. Finally, according to the sufficient conditions, an optimization algorithm for solving optimal or suboptimal solutions is proposed. The numerical results testify the effectiveness of the algorithm.

Key words: switching systems; switching optimal control; hybrid system; optimization algorithm