文章编号：1000-8608(2013)05-0777-04

折叠立方体网络 Q_{fn} Laplace 矩阵的谱

徐喜荣*[1]，曹　楠[2]，张　勇[3]，高立青[1]，彭旭庐[2]，林晓惠[1]

（1.大连理工大学 电子信息与电气工程学部，辽宁 大连　116024；
2.中国科学技术大学 数学系，安徽 合肥　230026；
3.大连理工大学 建设工程学部，辽宁 大连　116024）

摘要： 图 G 的 Laplace 矩阵的谱是由 $\boldsymbol{L}(G)$ 的所有特征值构成的. 研究了一类重要的互连网络拓扑结构折叠立方体网络 Q_{fn} 的 Laplace 矩阵的谱. 由于折叠立方体 Q_{fn} 是在超立方体 Q_n 的基础上增加了互补边形成的，利用从 Q_n 的 Laplace 矩阵 $\boldsymbol{A}_n$ 构造 Q_{fn} 的 Laplace 矩阵 $\boldsymbol{B}_n$ 的对偶矩阵 $\boldsymbol{C}_n=\boldsymbol{A}_n-\boldsymbol{I}_n^*+\boldsymbol{I}_n$ 的方法，确定了 $\boldsymbol{B}_n$ 和 $\boldsymbol{C}_n$ 的关系为 $|\boldsymbol{B}_{n+1}|=|\boldsymbol{B}_n|\,|\boldsymbol{C}_n-4\boldsymbol{I}_n|$，从而确定了折叠立方体的 Laplace 矩阵 $\boldsymbol{B}_n$ 的谱.

关键词： 折叠立方体；Laplace 矩阵；特征值；谱
中图分类号： O157.9；TP302　　**文献标志码：** A

0　引　言

给定一个图 G，对应着一个邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$，那么 $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征值称为图 G 的特征值，而图 G 的谱是由 $\boldsymbol{A}(G)$ 的所有特征值构成的. 在此基础上，人们又提出了图的 Laplace 谱的概念. 图 G 的 Laplace 矩阵定义为 $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$，其中 $\boldsymbol{D}(G)$ 是度数矩阵. $\boldsymbol{L}(G)$ 的特征值称为图 G 的 Laplace 特征值. 显然 $\boldsymbol{L}(G)$ 为实对称矩阵，其特征值均为实数.

Mohar[1] 说过：Laplace 特征值，能更好地反映图的图论性质，所以对图的 Laplace 矩阵的特征值的研究越来越多. 由于 Laplace 矩阵可以变换成一个黎曼流形上的 Laplace 算子的离散情形，在数学领域内通常称为 Laplace 矩阵.

图 G 的 Laplace 矩阵的谱（简称为 Laplace 谱），不仅具有重要的图论理论意义，而且在物理、化学、生物和计算机科学等领域有着广泛的应用[2]，因而受到人们的关注.

图的 Laplace 谱的探究是图论中一个活跃的研究方向，近 30 年来已有许多相关文献和结果. 李乔等[3] 讨论了图的最大特征根的性质；Li 等[4-6] 给出了图的 Laplace 矩阵的性质并研究了树的 Laplace 矩阵的最大和次大特征值；贺金陵等[7] 也研究了树的 Laplace 特征值的部分和的可达上界，郭曙光[8] 给出了单圈图的 Laplace 矩阵的最大特征值；文献[9]、[10]分别给出了超立方体的 Laplace 矩阵的谱. 本文利用构造对偶矩阵等方法确定折叠立方体的 Laplace 矩阵的谱.

1　折叠立方体的概念及性质

在文献[11] 中，El-Amawy 等提出 n 维折叠立方体网络 Q_{fn} 的概念，它是通过在 n 维超立方体网络 Q_n 中添加 2^{n-1} 条边而得到的新网络. n 维折叠立方体网络 Q_{fn} 的顶点集合为 $V(Q_{fn})=\{x_nx_{n-1}\cdots x_1: x_i\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots,n\}$，顶点 $x=x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 与 $y=y_ny_{n-1}\cdots y_1$ 有边相连当且仅当满足以下两条其中一条：

（1）$y=y_ny_{n-1}\cdots y_1=x_nx_{n-1}\cdots x_{i+1}\,\overline{x}_ix_{i-1}\cdots x_1$（$1\leqslant i\leqslant n$），此时称边 $(x;y)$ 为正常边；

（2）$y=y_ny_{n-1}\cdots y_1=\overline{x}_n\overline{x}_{n-1}\cdots\overline{x}_1$（此时称边

收稿日期： 2011-12-22；　**修回日期：** 2013-03-27.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(61170303，10671191，60973014)；高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(200801411073).
作者简介： 徐喜荣*(1967-)，女，博士，副教授，E-mail：xirongxu@dlut.edu.cn.

$(x;y)$ 为补边)，顶点 y 称为 x 的补点.

Q_{fn} 具有下述优良的性质，所以被认为是替代超立方体网络 Q_n 的挑战性网络结构：

(1)Q_{fn} 是 $n+1$ 正则的，有 2^n 个顶点，$(n+1)2^{n-1}$ 条边；

(2)Q_{fn} 直径为$\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$；

(3)Q_{fn} 为 $n+1$ 连通；

(4)Q_{fn} 是 Cayley 图，而且是点和边可迁的.

本文利用构造对偶矩阵等方法确定了折叠立方体的 Laplace 矩阵的谱.

2 折叠立方体的 Laplace 矩阵的谱

为了方便书写，在此引入几个定义.

定义 1 $\boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{2^n\times 2^n}$ 与 $\boldsymbol{I}_n^* = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \iddots & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}_{2^n\times 2^n}$

定义 2 $\boldsymbol{A}_n$ 为 Q_n 的 Laplace 特征矩阵，即

$$\boldsymbol{A}_n = \lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{L}(Q_n) = \lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{D}(Q_n) + \boldsymbol{A}(Q_n) \tag{1}$$

定义 3 $\boldsymbol{B}_n$ 为 Q_{fn} 的 Laplace 特征矩阵，即

$$\boldsymbol{B}_n = \lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{L}(Q_{fn}) = \lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{D}(Q_{fn}) + \boldsymbol{A}(Q_{fn}) \tag{2}$$

为了求出折叠立方体的 Laplace 矩阵的谱，首先要分析折叠立方体 Q_{fn} 的 Laplace 特征矩阵，然而折叠立方体是从超立方体演变过来的，所以本文从超立方体 Q_n 的 Laplace 特征矩阵入手.

显然 n 维超立方体 Q_n 的每个点的度数为 n，所以度数矩阵 $\boldsymbol{D}(Q_n) = \mathbf{diag}\{n,n,\cdots,n\}$. 因为不同点的排列，对应不同的邻接矩阵，为了计算的确定性，所以必须规定一种点的排列.

本文规定将所有点按从小到大排列，利用二进制与十进制的转换方法，在十进制内比较大小.

引理 1 $\boldsymbol{A}_{n+1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_n - \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A}_n - \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$.

证明 由于超立方体的递归性质，一个超立方体 Q_n 可以由两个 Q_{n-1} 按一定规律拼接形成 Q_n，所以得到每个点的度数增加 1，而且第 i 个点与第 $i+2^{n-1}$ 个点之间有边相连，其中 $1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}$. 代入 $\boldsymbol{A}_n$ 的定义得

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} - \boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{I}_{n-1} \\ \boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{A}_{n-1} - \boldsymbol{I}_{n-1} \end{pmatrix}$$

证毕.

引理 2 $\boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{A}_n + \boldsymbol{I}_n^* - \boldsymbol{I}_n$.

证明 由于 Q_{fn} 是在 Q_n 的基础上增加了互补边形成的，也就是说每个点的度数都增加 1，并且第 i 个点与第 2^n+1-i 个点之间有连边($1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}$)，则可以得到

$$\boldsymbol{D}(Q_{fn}) - \boldsymbol{D}(Q_n) = \boldsymbol{I}_n$$

$$\boldsymbol{A}(Q_{fn}) - \boldsymbol{A}(Q_n) = \boldsymbol{I}_n^*$$

将上两个式子相减后，代入定义式(1)、(2)，可以得到

$$\boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{A}_n + \boldsymbol{I}_n^* - \boldsymbol{I}_n$$

证毕.

定义 4 定义 $\boldsymbol{B}_n$ 关于 $\boldsymbol{A}_n$ 的对偶矩阵为 $\boldsymbol{C}_n = \boldsymbol{A}_n - \boldsymbol{I}_n^* + \boldsymbol{I}_n$.

引理 3 $$|\boldsymbol{B}_{n+1}| = |\boldsymbol{B}_n|\,|\boldsymbol{C}_n - 4\boldsymbol{I}_n| \tag{3}$$

证明 结合引理 1 和 2 可得

$$\boldsymbol{B}_{n+1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_n - 2\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{I}_n^* \\ \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{I}_n^* & \boldsymbol{A}_n - 2\boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$$

对此进行行列式变换可得

$$|\boldsymbol{B}_{n+1}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_n - 2\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{I}_n^* \\ \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{I}_n^* & \boldsymbol{A}_n - 2\boldsymbol{I}_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_n - \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{I}_n^* & \boldsymbol{A}_n - \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{I}_n^* \\ \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{I}_n^* & \boldsymbol{A}_n - 2\boldsymbol{I}_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_n - \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{I}_n^* & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{I}_n^* & \boldsymbol{A}_n - 3\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{I}_n^* \end{vmatrix} =$$

$$|\boldsymbol{A}_n - \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{I}_n^*|\,|\boldsymbol{A}_n - 3\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{I}_n^*| =$$

$$|\boldsymbol{A}_n - \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{I}_n^*|\,|\boldsymbol{A}_n + \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{I}_n^* - 4\boldsymbol{I}_n| =$$

$$|\boldsymbol{B}_n|\,|\boldsymbol{C}_n - 4\boldsymbol{I}_n|$$

证毕.

引理 4 $|\boldsymbol{C}_{n+1}| = |\boldsymbol{B}_n|\,|\boldsymbol{C}_n|$.

证明 结合引理 1 与定义 4 可得

$$|C_{n+1}| = |A_{n+1} - I_{n+1}^* + I_{n+1}| = \begin{vmatrix} A_n & I_n - I_n^* \\ I_n - I_n^* & A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_n + I_n - I_n^* & A_n + I_n - I_n^* \\ I_n - I_n^* & A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_n + I_n - I_n^* & \mathbf{0} \\ I_n - I_n^* & A_n - I_n + I_n^* \end{vmatrix} = |A_n + I_n - I_n^*| \, |A_n - I_n + I_n^*| = |B_n| \, |C_n|$$

证毕.

由于 Laplace 矩阵特征根构成的谱另一种表现形式为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

其中第一行为各异特征值，第二行为每个特征值的重数，以下将采用这种形式表示 B_n、C_n.

由引理 3 和 4 可以计算得到

$$|B_2| = \lambda(\lambda-4)^3,\ |C_2| = \lambda^3(\lambda-4)$$

经过递归可以求得

$|B_3| = \lambda(\lambda-4)^6(\lambda-8)$,

$|C_3| = \lambda^4(\lambda-4)^4$;

$|B_4| = \lambda(\lambda-4)^{10}(\lambda-8)^5$,

$|C_4| = \lambda^5(\lambda-4)^{10}(\lambda-8)$;

$|B_5| = \lambda(\lambda-4)^{15}(\lambda-8)^{15}(\lambda-12)$,

$|C_5| = \lambda^6(\lambda-4)^{20}(\lambda-8)^6$;

…

结合引理 3、4，可以得到如下 B_n、C_n 的递推公式.

定理 1

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & \cdots & 4\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^4 & \cdots & C_{n+1}^{2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \end{pmatrix},$$

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & \cdots & 4\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ C_{n+1}^1 & C_{n+1}^3 & C_{n+1}^5 & \cdots & C_{n+1}^{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1} \end{pmatrix}$$

证明　由举例可知，前几项全部都成立. 下面用数学归纳法对 n 进行归纳.

假设 n 的时候定理成立，只需要证明 $n+1$ 时，定理也成立即可.

当 n 为偶数时，$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$. 此时由引理 3 并将 B_n、C_n 代入式(3) 即可得到

$$B_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & \cdots & 2n & 2n+4 \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} + C_{n+1}^n & C_{n+1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & \cdots & 2n & 2n+4 \\ C_{n+2}^0 & C_{n+2}^2 & \cdots & C_{n+2}^n & C_{n+2}^{n+2} \end{pmatrix}$$

由于 $n+1$ 为奇数，满足归纳式，归纳完毕. 同理，对 C_n 进行归纳可证明归纳式成立. 当 n 为奇数时同理可证.

综上所述，B_n 的谱为

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & \cdots & 4\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^4 & \cdots & C_{n+1}^{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \end{pmatrix}$$

证毕.

3　结　语

确定图的 Laplace 谱是代数图论中基本问题之一，除了理论外，在化学、物理、生物等学科都有广泛的应用意义. 由于它的困难性，确定著名图类 Laplace 谱是当前研究热点之一. 本文利用超立方体的 Laplace 矩阵 A_n，构造了折叠立方体 Q_{fn} 的 Laplace 矩阵 B_n 的对偶矩阵 $C_n = A_n - I_n^* + I_n$，进一步确定了 Q_{fn} 的 Laplace 矩阵 B_n 和其对偶矩阵 C_n 的关系 $|B_{n+1}| = |B_n| \, |C_n - 4I_n|$，从而完全确定了著名图类折叠超立方体的 Laplace 矩阵的谱.

参考文献：

[1]　Mohar B. Laplace eigenvalues of graphs — a survey [J]. **Discrete Mathematics**, 1992, **109**:171-183.

[2]　Mohar B. Some applications of Laplace eigenvalues of graphs [M] // Hahn G, Sabidusasi G, eds. **Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications**. Hingham: Kluwer Academic Publishers, 1997:225-275.

[3]　李　乔，冯克勤. 论图的最大特征根[J]. 应用数学学报，1979，**2**(2):167-175.

LI Qiao, FENG Ke-qin. The discussion about the largest eigenvalue of graphs [J]. **Acta Mathematicae Applicatae Sinica**, 1979, **2** (2): 167-175. (in Chinese)

[4] LI Jiong-sheng, ZHANG Xiao-dong. A new upper bound for eigenvalues of Laplacian matrix of a graph [J]. **Linear Algebra and Its Applications**, 1997, **265**:93-100.

[5] 张晓东,李炯生. 树的 Laplace 矩阵的最大和次大特征值[J]. 中国科学技术大学学报, 1998, **28**(5): 513-518.

ZHANG Xiao-dong, LI Jiong-sheng. The two largest eigenvalues of Laplacian matrices of trees [J]. **Journal of University of Science and Technology of China**, 1998, **28**(5):513-518. (in Chinese)

[6] 李炯生, 张晓东, 潘永亮. 图的 Laplace 特征值[J]. 数学进展, 2003, **32**(2):157-165.

LI Jiong-sheng, ZHANG Xiao-dong, PAN Yong-liang. Laplacian eigenvalues of graphs [J]. **Advances in Mathematics**, 2003, **32** (2): 157-165. (in Chinese)

[7] 贺金陵,郭继明. 树的拉普拉斯特征值的部分和的可达上界[J]. 同济大学学报:自然科学版, 2006, **34**(7):970-972.

HE Jin-ling, GUO Ji-ming. An attainable upper bound for sum of first k Laplacian eigenvalues of a tree [J]. **Journal of Tongji University: Natural Science**, 2006, **34**(7):970-972. (in Chinese)

[8] 郭曙光. 单圈图的 Laplace 矩阵的最大特征值[J]. 高校应用数学学报:A 辑, 2001, **16** (2):131-136.

GUO Shu-guang. The largest eigenvalues of Laplacian matrices of unicyclic graphs [J]. **Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities: Series A**, 2001, **16** (2):131-136. (in Chinese)

[9] XU Jin, QU Rui-bin. The spectra of hypercubes [J]. **Journal of Engineering Mathematics**, 1999, **4**(16):1-5.

[10] 殷剑宏,汪荣贵. 超立方体的 Laplace 矩阵的谱[J]. 浙江大学学报:理学版, 2007, **34**(3):321-323.

YIN Jian-hong, WANG Rong-gui. Spectra of Laplacian matrices of hypercubes [J]. **Journal of Zhejiang University: Science Edition**, 2007, **34**(3): 321-323. (in Chinese)

[11] El-Amawy A, Lati S. Properties and performance of folded hypercubes [J]. **IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems**, 1991, **2**(1):31-42.

Spectra of Laplacian matrix of folded hypercube Q_{fn}

XU Xi-rong*[1], CAO Nan[2], ZHANG Yong[3], GAO Li-qing[1], PENG Xu-lu[2], LIN Xiao-hui[1]

(1. Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China;
3. Faculty of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The spectra of Laplacian matrix of graph G consist of all eigenvalues of $\boldsymbol{L}(G)$. The Laplace spectra of folded hypercube Q_{fn} are studied, which are important interconnection network topological structure. The n dimensional folded hypercube is an undirected graph obtained from n dimensional hypercube by adding all complementary edges. By means of Laplacian matrix $\boldsymbol{A}_n$ of Q_n, the dual matrix of Laplace matrix $\boldsymbol{B}_n$ of Q_{fn} is constructed as $\boldsymbol{C}_n=\boldsymbol{A}_n-\boldsymbol{I}_n^*+\boldsymbol{I}_n$, the relationship between $\boldsymbol{B}_n$ and $\boldsymbol{C}_n$ is $|\boldsymbol{B}_{n+1}|=|\boldsymbol{B}_n|\,|\boldsymbol{C}_n-4\boldsymbol{I}_n|$ and the spectra of Laplace matrix $\boldsymbol{B}_n$ of Q_{fn} are obtained.

Key words: folded hypercube; Laplacian matrix; eigenvalues; spectra