

基于径向积分边界单元法的内场声学分析

屈 伸, 陈浩然*

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 由于 Helmholtz 方程的基本解是频率的函数, 传统边界单元法在处理声场特征值问题时具有天生的缺陷. 采用 Laplace 方程基本解生成积分方程, 通过径向积分法将在此过程中产生的域积分项转化为边界积分. 此方法克服了传统边界单元法系数矩阵对频率的依赖, 同时克服了特解积分法和双重互易法对特解的依赖, 将内场声学特征值问题转化为广义特征值问题. 最后通过内场声辐射分析和声学特征值分析验证了算法的有效性.

关键词: 径向积分边界单元法; 三维声场; 声辐射; 声学特征值

中图分类号: TB53 **文献标志码:** A

0 引 言

边界单元法以其降维、半解析、精度高等优点而在工程中获得了广泛的应用. 尤其对于外场声辐射问题来说, 由于 Helmholtz 方程基本解自动满足远场 Sommerfeld 辐射条件, 边界单元法在处理无限域问题时比有限单元法更具有优势^[1].

然而, 由于 Helmholtz 方程基本解的特点, 边界单元法在处理声腔特征值问题时遇到了困难. Helmholtz 方程的基本解是波数的函数, 因此造成最终生成的离散方程的系数矩阵是频率的函数, 而且该频率项无法提到系数矩阵外形成广义特征值问题, 不得不求助于逐步搜索法进行求解. 应用逐步搜索法时, 需要给定任意一个初始频率并给出搜索步长, 计算系数矩阵的行列式, 当系数矩阵的行列式实部与虚部都为零时, 此时的频率就是系统的特征频率^[2]. 从该方法的计算过程来看, 逐步搜索法需要对多个频率生成系数矩阵, 因而计算量极其庞大, 并且逐步搜索法无法获得数值相近的特征频率.

为了克服系数矩阵对频率的依赖, Nowak 等提出了多重互易边界单元法^[3]. Kamiya 等应用多

重互易边界单元法计算了声腔特征值问题, 虽然该方法克服了系数矩阵对频率的依赖, 但最终形成的离散方程是以波数为系数的矩阵多项式^[4-5], 需要采用 LU 分解和 Newton 迭代求解特征值. 由于该方法同样需要给出预估值作为 Newton 迭代初值, 因而又被称为增强型的逐步搜索法^[6]. 根据状态空间形式, Kamiya 等^[7]将多重互易边界单元法获得的矩阵多项式转化成广义特征值形式, 然而其系数矩阵的规模有了巨大的增长, 使得应用边界单元法与有限单元法相比没有任何优势.

针对多重互易边界单元法所遇到的上述困难, Leblanc 等采用特解积分边界单元法计算了声腔特征值问题^[8-10]. Ali 等^[11]和王锋等^[12]应用双重互易边界单元法分别分析了二维和三维声场特征值问题. 在原理上, 特解积分边界单元法和双重互易边界单元法都需要解析求解径向基函数的特解, 这就限制了一些插值性质好但形式复杂的径向基函数的应用. 为了克服特解积分法和双重互易法对特解的依赖, Gao 等提出了径向积分边界单元法^[13-14]. 近年来, 多位研究者基于径向积分边界单元法分析了变系数热传导问题^[15-16]、各向

异性板振动问题^[17]和非均质土石坝渗流问题^[18]等,但径向积分边界单元法在声学领域的研究工作还未见报道.本文采用径向积分边界单元法获得与频率无关的系数矩阵,将声腔特征值问题转化为广义特征值问题,以克服特解积分法和双重互易边界单元法对特解的依赖.

1 声学问题的径向积分边界单元法

稳态、线性声场的控制方程为 Helmholtz 方程^[19]:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \tag{1}$$

式中: ∇^2 为 Laplace 算子;波数 $k = \omega/c$, ω 是角频率, c 为介质中声速; p 为声压幅值.

应用 Laplace 方程基本解,获得式(1)的积分方程为

$$C(P)p(P) = - \int_{\Gamma(Q)} [j\rho kcv_n(Q)u^*(P,Q) + p(Q)\frac{\partial u^*(P,Q)}{\partial n}]d\Gamma(Q) + \int_{\Omega(X)} [u^*(P,X)k^2p(X)]d\Omega(X) \tag{2}$$

式中: Ω 表示求解域; Γ 为 Ω 的边界; $\boldsymbol{n}$ 是求解域边界的外法向单位向量; P 表示源点; Q 表示边界 Γ 上的积分点; X 表示求解域 Ω 内的积分点; $u^*(P,Q) = r(P,Q)/4\pi$,是 Laplace 方程基本解, $r(P,Q)$ 表示点 P 和 Q 的距离; ρ 为声学介质密度; v_n 表示声学粒子速度; $j = \sqrt{-1}$,为虚数单位.系数 $C(P)$ 在计算内场问题时取值如下^[20]:

$$C(P) = \begin{cases} 1; & P \in \Omega \\ - \int_{\Gamma(Q)} \frac{\partial u^*(P,Q)}{\partial n}d\Gamma(Q); & P \in \Gamma \end{cases} \tag{3}$$

式(2)中,域积分项 $\int_{\Omega(X)} [u^*(P,X)k^2p(X)]d\Omega(X)$ 含有待求变量声压 p ,应用径向基函数^[21]将其近似表示为

$$p(X) = \sum_{A=1}^m \alpha^A \phi[R(X,A)] \tag{4}$$

式中: A 表示应用点; m 表示应用点的数量,其值等于边界点和域内点之和; $R(X,A)$ 表示点 A 与

X 的距离; $\phi[R(X,A)]$ 表示径向基函数; α^A 为待求系数.对于特解积分边界单元法和双重互易边界单元法,分别需要解析求得满足式(5)、(6)的特解^[8-12] p^i 及 $\hat{p}_A$:

$$\nabla^2 p^i = -k^2 \sum_{A=1}^m \alpha^A \phi[R(X,A)] \tag{5}$$

$$\nabla^2 \hat{p}_A = \phi[R(X,A)] \tag{6}$$

相对来说,双重互易边界单元法中对特解的求解相对容易一些,但是由于式(5)及(6)的存在,限制了一些插值性质好但形式复杂的径向基函数在边界单元法中的应用.径向积分法克服了这个问题,研究表明,四阶样条紧支径向基函数可给出非常稳定的结果^[22],其形式为

$$\phi[R(X,A)] = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{R}{d}\right)^2 + 8\left(\frac{R}{d}\right)^3 - 3\left(\frac{R}{d}\right)^4; & 0 \leq R \leq d \\ 0; & R \geq d \end{cases} \tag{7}$$

式中: d 为紧支域的大小.

将式(4)代入式(2),并且应用径向积分法原理^[13-14],式(2)变为

$$C(P)p(P) = - \int_{\Gamma(Q)} [j\rho kcv_n(Q)u^*(P,Q) + p(Q)\frac{\partial u^*(P,Q)}{\partial n}]d\Gamma(Q) + k^2 \sum_{A=1}^m \alpha^A \int_{\Gamma(Q)} \int_0^{r(P,Q)} \left\{ \frac{1}{4\pi} \times \phi[R(X,A)]r(P,X) \right\} dr \times \frac{1}{r^2(P,Q)} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma(Q) \tag{8}$$

式(8)中积分项 $\int_0^{r(P,Q)} \left\{ \frac{1}{4\pi} \phi[R(X,A)] \times r(P,X) \right\} dr$ 的积分变量为 r ,被积函数 $\phi[R(X,A)]$ 是 $R(X,A)$ 的函数,根据文献[13]的方法,将其表示成积分变量 r 的函数如下:

$$R(X,A) = \sqrt{\boldsymbol{r}^2(P,X) + \boldsymbol{R}^2(P,A) - 2r(P,X) \cdot \boldsymbol{R}(P,A)} \tag{9}$$

将式(8)离散为边界元方程为

$$\boldsymbol{H}'\boldsymbol{p} = -j\boldsymbol{kG}'\boldsymbol{v}_n + k^2\boldsymbol{B}'\boldsymbol{p} \tag{10}$$

式(10)中,

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma(Q)} f_a(P^1 A^1) d\Gamma(Q) & \int_{\Gamma(Q)} f_a(P^1 A^2) d\Gamma(Q) & \cdots & \int_{\Gamma(Q)} f_a(P^1 A^m) d\Gamma(Q) \\ \int_{\Gamma(Q)} f_a(P^2 A^1) d\Gamma(Q) & \int_{\Gamma(Q)} f_a(P^2 A^2) d\Gamma(Q) & \cdots & \int_{\Gamma(Q)} f_a(P^2 A^m) d\Gamma(Q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Gamma(Q)} f_a(P^m A^1) d\Gamma(Q) & \int_{\Gamma(Q)} f_a(P^m A^2) d\Gamma(Q) & \cdots & \int_{\Gamma(Q)} f_a(P^m A^m) d\Gamma(Q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1m} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m1} & T_{m2} & \cdots & T_{mm} \end{pmatrix}$$

(11)

式(11)中矩阵元素 T_{ij} ($i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, m$) 由式(4)确定, 积分项 $\int_{\Gamma(Q)} f_a(P^i A^j) d\Gamma(Q)$ 表达如下:

$$\int_{\Gamma(Q)} f_a(P^i A^j) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma(Q)} \int_0^{r(P^i, Q)} \left\{ \phi[R(X, A^j)] \times r(P^i, X) \frac{1}{4\pi} \right\} dr \frac{1}{r^2(P^i, Q)} \times \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma(Q);$$

$i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, m$ (12)

传统边界单元法求解稳态声学问题时, 采用 Helmholtz 方程基本解^[20]如下:

$$u_H^*(P, Q) = \frac{\exp[-jkr(P, Q)]}{4\pi r(P, Q)} \quad (13)$$

相应的边界元离散方程^[20]为

$$\mathbf{H}(k)\mathbf{p} = \mathbf{G}(k)\mathbf{v}_n \quad (14)$$

系数矩阵 $\mathbf{H}(k)$ 和 $\mathbf{G}(k)$ 是波数的函数, 因此形成非线性声场特征值问题, 不得不借助逐步搜索法求解特征频率. 应用逐步搜索法时, 针对每个搜索频率均需要生成系数矩阵, 并判断其行列式是否为零, 因而计算量极其庞大, 且逐步搜索法无法获得数值相近的特征频率. 应用径向积分边界单元法获得的边界元离散方程(10)的系数矩阵 $\mathbf{H}'$ 、 $\mathbf{G}'$ 和 $\mathbf{B}'$ 均与频率无关, 通过采用不含波数项的 Laplace 方程基本解, 将与频率相关的波数项提出到系数矩阵之外, 形成以波数为系数的矩阵多项式, 当边界条件为刚性边界条件时, 简化为广义特征值问题, 从而克服了传统边界单元法中系数矩阵对频率的依赖.

2 算例分析

2.1 三维长方体声波导管内场声辐射问题(算例 1)

首先以边长为 $L_x = 1.0\text{ m}$ 、 $L_y = 0.8\text{ m}$ 、 $L_z = 0.6\text{ m}$ 的三维长方体封闭声场为例, 其边界条件

为在 $x=0$ 处, $v_n = -1\text{ m/s}^2$; 在 $x=1$ 处, $p/v_n = \rho c$, 其中, 声学介质为空气, 声速 $c = 340\text{ m/s}$, 密度 $\rho = 1.21\text{ kg/m}^3$, 其余表面为刚性边界条件, 激励频率为 5.459 Hz . 根据声学原理, 此时封闭声腔内声压解析解^[19]为

$$p = \rho c e^{-ikx}$$

(15)

采用不同的网格划分, 其中网格 1 是将长方体声腔表面划分为 94 个线性四边形单元; 网格 2 是将声腔表面划分为 320 个线性四边形单元, 为了提高计算精度, 取 54 个内点^[20]. 径向积分边界单元法计算结果与解析解的比较如图 1、2 所示. 从图 1 和 2 可见计算结果和解析解吻合得很好.

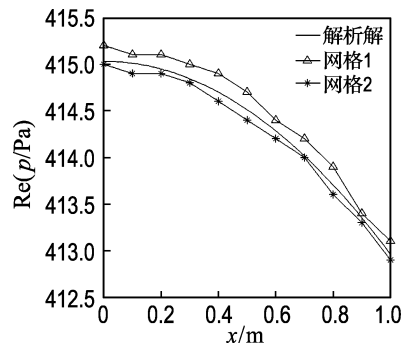


图 1 声压实部

Fig. 1 Real part of sound pressure

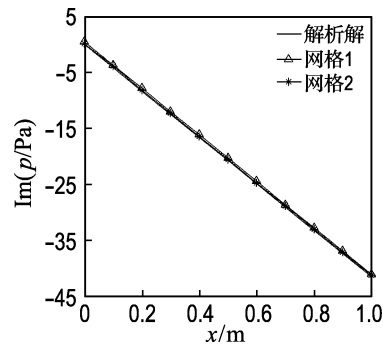


图 2 声压虚部

Fig. 2 Imaginary part of sound pressure

2.2 三维长方体声腔特征值问题(算例 2)

该算例的几何模型和网格划分与上一问题一致,各表面边界条件定义为刚性边界条件,其解析解^[23]为

$$k = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{t}{L_z}\right)^2};$$

$m,n,t = 0,1,2,\cdots$

(16)

刚性边界条件下,采用径向积分边界单元法获得的边界元离散方程为

$$\boldsymbol{H}'\boldsymbol{p} = k^2\boldsymbol{B}'\boldsymbol{p}$$

(17)

式(17)为一广义特征值问题.与之相反,采用传统边界单元法^[20]时,式(14)变为

$$\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$$

(18)

此时系数矩阵 $\boldsymbol{H}(k)$ 是波数的函数,并且由于此矩阵是复数矩阵,采用逐步搜索法计算声腔特征值时,需要保证该矩阵行列式实部、虚部同时等于零.图 3 为采用逐步搜索法时声腔特征值的计算结果.从图中可以看出,在整个计算频率范围内,系数矩阵 $\boldsymbol{H}(k)$ 的行列式的量级为 10^{-45} ,非常接近于零,因此采用逐步搜索法时,循环截止判据难以给定.同时,采用逐步搜索法时,针对每一个给定的初值,只能找到一个特征频率.表 1 列出了该模型的前八阶特征频率,其中(0,1,1)、(1,0,1)和(1,1,0)阶特征频率由于和其他阶特征频率数值接近,逐步搜索法无法通过其系数矩阵行列式确定.

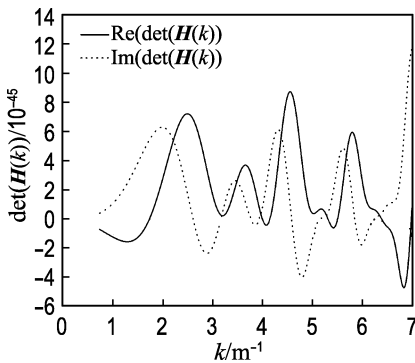


图 3 传统边界单元法系数矩阵行列式

Fig. 3 Determination of coefficient matrices in traditional boundary element method

径向积分边界单元法计算结果如表 1 所示.从表 1 可以看出,随着网格细化,计算结果更加精确.至此,通过算例 1 和 2 中径向积分边界单元法

计算结果和解析解的比较,证明了该算法的有效性.

表 1 刚性边界条件下长方体声腔声学模态

Tab. 1 Eigenvalues of a rectangular parallelepiped acoustical cavity with rigid boundary condition

模态	解析解	网格 1		网格 2	
		计算值	误差/%	计算值	误差/%
(0,0,1)	3.14	3.15	0.3	3.15	0.3
(0,1,0)	3.93	3.92	0.3	3.93	0
(0,1,1)	5.03	5.04	0.2	5.04	0.2
(1,0,0)	5.24	5.28	0.8	5.23	0.2
(1,0,1)	6.11	6.14	0.5	6.11	0
(0,0,2)	6.28	6.35	1.1	6.29	0.2
(1,1,0)	6.55	6.59	0.6	6.55	0
(1,1,1)	7.26	7.31	0.7	7.26	0

2.3 声腔特征值问题(算例 3)

对于汽车工业或航空工业来说,声腔特征频率的预测对于实际结构降噪十分重要,为了验证提出的方法处理实际问题的能力,算例 3 所计算的车体几何模型如图 4 所示,车体表面被划分为 190 个线性四边形单元.考虑边界条件为刚性边界条件,表 2 列出了有限单元法、文献[9]中的特解积分边界单元法和径向积分边界单元法的计算结果.从表 2 中可以看出,相比于特解积分边界单元法,径向积分边界单元法采用更少的网格即可获得更精确的结果.而且,从原理上说,径向积分边界单元法更是克服了特解积分边界单元法对特解的依赖,扩展了径向基函数可以选择的函数类型.

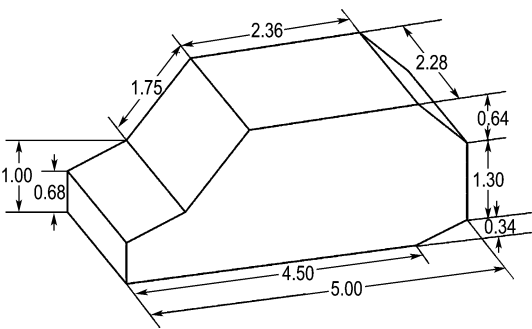


图 4 车体几何模型(单位:m)

Fig. 4 Car geometry model (unit: m)

表 2 刚性边界条件下车体内腔声学模态
Tab. 2 Eigenvalues of the sound field in the car cabin
with rigid boundary condition

解析方法	车体内腔声学模态				
	1	2	3	4	5
有限单元法(54 块单元)	0.710	1.220	1.380	1.490	1.550
特解积分边界单元法 ^[9] (172 面单元)	0.723	1.242	1.458	1.563	1.644
特解积分边界单元法 ^[9] (688 面单元)	0.719	1.221	1.418	1.526	1.592
径向积分边界单元法 (190 面单元+87 内点)	0.718	1.230	1.392	1.489	1.574

3 结 论

基于径向积分边界单元法,建立了处理内场声学问题的数学模型,并将其应用到内场声辐射问题和声腔特征值分析之中.采用 Laplace 方程基本解生成积分方程,通过径向积分法将在此过程中产生的域积分项转化为边界积分.此方法克服了传统边界单元法系数矩阵对频率的依赖,将内场声学特征值问题转化为广义特征值问题,同时克服了特解积分法和双重互易边界单元法对特解的依赖.提供的声辐射和声腔特征值算例表明,径向积分边界单元法是求解内场声学问题的一种有效的数值方法.

参考文献：

[1] 黎 胜,赵德有. 用边界元法计算结构振动辐射声场[J]. 大连理工大学学报, 2000, **40**(4):391-394.
LI Sheng, ZHAO De-you. Calculation of acoustic field radiated by vibrating structures using BEM [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2000, **40**(4):391-394. (in Chinese)

[2] Ali A, Rajakumar C. **The Boundary Element Method Applications in Sound and Vibration** [M]. Tokyo: A. A. Balkema Publishers, 2004.

[3] Nowak A J, Brebbia C A. The multiple-reciprocity method - a new approach for transforming BEM domain integrals to the boundary [J]. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 1989, **6**(3):164-167.

[4] Kamiya N, Andoh E. Helmholtz eigenvalue analysis by boundary element method [J]. **Journal of Sound and Vibration**, 1993, **160**(2):279-287.

[5] Kamiya N, Andoh E, Nogae K. 3-Dimensional

eigenvalue analysis of the Helmholtz-equation by multiple reciprocity boundary-element method [J]. **Advances in Engineering Software**, 1993, **16**(3): 203-207.

[6] Ali A, Rajakumar C, Yunus S M. Advances in acoustic eigenvalue analysis using boundary-element method [J]. **Computers & Structures**, 1995, **56**(5): 837-847.

[7] Kamiya N, Andoh E. Standard eigenvalue analysis by boundary-element method [J]. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 1993, **9**(6): 489-495.

[8] Leblanc A, Lavie A. Numerical analysis of eigenproblem for cavities by a particular integral method with a low frequency approximation of surface admittance [J]. **Journal of the Acoustical Society of America**, 2012, **131**(5):3876-3882.

[9] Leblanc A, Lavie A, Vanhille C. An acoustic resonance study of complex three-dimensional cavities by a particular integral method [J]. **Acta Acustica United with Acustica**, 2005, **91**(5): 873-879.

[10] Leblanc A, Malesys A, Lavie A. Compactly supported radial basis functions for the acoustic 3D eigenanalysis using the particular integral method [J]. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2012, **36**(4):520-526.

[11] Ali A, Rajakumar C, Yunus S M. On the formulation of the acoustic boundary element eigenvalue problems [J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1991, **31**(7): 1271-1282.

[12] 王 锋,黎 胜,赵德有. 采用双互易边界元法进行三维声场特征值分析的近似函数研究[J]. 船舶力学, 2009, **13**(1):136-143.
WANG Feng, LI Sheng, ZHAO De-you. Research on the approximation functions in the dual reciprocity boundary element method for the three-dimensional acoustic eigenvalue analysis [J]. **Journal of Ship Mechanics**, 2009, **13**(1):136-143. (in Chinese)

[13] GAO Xiao-wei. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization [J]. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2002, **26**(10):905-916.

[14] GAO Xiao-wei. A boundary element method

- without internal cells for two-dimensional and three-dimensional elastoplastic problems [J]. **Journal of Applied Mechanics — Transactions of the ASME**, 2002, **69**(2):154-160.
- [15] Al-Jawary M A, Wrobel L C. Radial integration boundary integral and integro-differential equation methods for two-dimensional heat conduction problems with variable coefficients [J]. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2012, **36**(5):685-695.
- [16] YANG Kai, GAO Xiao-wei, LIU Yun-fei. Using analytical expressions in radial integration BEM for variable coefficient heat conduction problems [J]. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2011, **35**(10):1085-1089.
- [17] Albuquerque E L, Sollero P, Portilho de Paiva W. The radial integration method applied to dynamic problems of anisotropic plates [J]. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 2007, **23**(9): 805-818.
- [18] 王燕昌, 郑 静, 高效伟. 径向积分边界元法确定非均质土石坝渗流自由面[J]. 计算力学学报, 2010, **27**(6):1011-1015.
- WANG Yan-chang, ZHENG Jing, GAO Xiao-wei. Radial integration boundary element method determining seepage free surface of non-homogeneous soil-stone dams [J]. **Chinese Journal of Computational Mechanics**, 2010, **27**(6): 1011-1015. (in Chinese)
- [19] Morse P M, Ingard K U. **Theoretical Acoustics** [M]. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [20] Ciskowski R D, Brebbia C A. **Boundary Element Methods in Acoustics** [M]. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1991.
- [21] Partridge P W. Towards criteria for selecting approximation functions in the dual reciprocity method [J]. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2000, **24**(7-8):519-529.
- [22] Gao Xiao-wei, ZHANG Chuan-zeng, Sladek J, *et al.* Fracture analysis of functionally graded materials by a BEM [J]. **Composites Science and Technology**, 2008, **68**(5):1209-1215.
- [23] Morse P M, Feshbach H. **Methods of Theoretical Physics** [M]. New York: McGraw-Hill, 1953.

Interior acoustic analysis based on radial integration boundary element method

QU Shen, CHEN Hao-ran*

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The traditional boundary element method has a well-known difficulty when calculating acoustic eigenvalue problems since the fundamental solution of the Helmholtz equation is dependent on the frequency. The integral equation of acoustics Helmholtz equation is obtained by using the fundamental solution of Laplace equation, and then, the radial integration method is presented to transform domain integrals to boundary integrals. The proposed method eliminates the frequency dependency of the coefficient matrices in the traditional boundary element method and the dependence on particular solutions of the dual reciprocity method and the particular integral method. Eventually, the acoustic eigenvalue analysis procedure based on the radial integration boundary element method resorts to a generalized eigenvalue problem. Interior acoustic radiation analysis and acoustic eigenvalue analysis demonstrate the validity and accuracy of the proposed approach.

Key words: radial integration boundary element method; three-dimensional sound field; acoustic radiation; acoustic eigenvalue