第53卷第6期
2013年11月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 53, No. 6
Nov. 2013

应用数学

文章编号：1000-8608(2013)06-0924-06

广义纳什均衡问题求解的极小极大方法

侯 剑*， 张立卫

（大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024）

摘要： 应用正则化 Nikaido-Isoda 函数，一类广义纳什均衡问题的求解被转化为一个极小极大问题的求解. 利用 Fischer-Burmeister 函数将与极小极大问题的必要性条件等价的变分不等式的 Karush-Kuhn-Tucker 系统转化为一个半光滑方程组. 应用牛顿法求解此方程组，并给出了半光滑牛顿法局部超线性收敛的充分条件. 数值结果验证了极小极大方法对解决广义纳什均衡问题的有效性.

关键词： 纳什均衡问题；广义纳什均衡问题；变分不等式；半光滑牛顿法

中图分类号： O225 **文献标志码：** A

0 引 言

经典纳什均衡理论的提出是 20 世纪重大的科学贡献之一，它对经济学和社会学的发展都有着深远的影响. 但随着实际问题越来越复杂，许多问题已经很难用经典纳什均衡理论来解决，于是进一步提出了广义纳什均衡问题. 与经典纳什均衡问题不同，广义纳什均衡问题中每一个博弈者的策略集不再是一个只依赖于自身决策变量的集合，这个策略集还依赖于其他博弈者的决策，这使得广义纳什均衡问题拥有比经典纳什均衡问题更广泛的应用前景.

近年来，在广义纳什均衡问题的求解方面涌现出了一些成果[1-7]. 值得关注的是，作为研究经典纳什均衡问题解存在性的工具，Nikaido-Isoda 函数被 Heusinger 等[1]推广到求解广义纳什均衡问题上来. 他们的工作为后续相关研究打好了基础. 受到经典纳什均衡问题可以被转化为一类有限维变分不等式的启发，Harker[8]证明了广义纳什均衡问题也等价于一类有限维拟变分不等式问题. 但遗憾的是，至今为止求解拟变分不等式问题还没有太好的办法，因此这一方法在具体应用中遇到了很大困难. 为了克服这一困难，Nabetani 等[9]提出了用参数变分不等式方法来求解广义纳什均衡问题. 他们给出了在相对较弱的约束规范条件下，参数变分不等式问题的解集与广义纳什均衡问题解集的等价性. 为了将广义纳什均衡问题中困扰大家的复杂约束去掉使其成为一个较简单的经典纳什均衡问题，Pang 等[6]提出了求解广义纳什均衡问题的序列罚方法，并证明了该方法在一定条件下的全局收敛性. 总的来说，关于广义纳什均衡问题数值方法的研究还处于起步阶段，相关文献也比较少. 基于正则化 Nikaido-Isoda 函数，本文研究将求解广义纳什均衡问题转化为求解一类极小极大问题，并应用 Fischer-Burmeister (F-B) 函数将这个极小极大问题的 Karush-Kuhn-Tucker(KKT) 系统转化为一个半光滑方程组，且在一定条件下证明该方程组在解点处的 Clarke 广义次微分的非奇异性.

1 预备知识

令 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 是有限维向量空间，$\boldsymbol{O}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 中的一个开集，$\boldsymbol{\Phi}:\boldsymbol{O}\subseteq\boldsymbol{X}\rightarrow\boldsymbol{Y}$ 是一个定义在 $\boldsymbol{O}$ 上的局部 Lipschitz 连续函数，由 Rademacher 定理知，$\boldsymbol{\Phi}$ 在集合 $\boldsymbol{O}$ 上几乎处处 Frechet 可微. 用 $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Phi}}$ 表示 $\boldsymbol{\Phi}$ 在 $\boldsymbol{O}$ 上所有 Frechet 可微点构成的集合，则函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 在 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{O}$ 处的 Bouligand 次微分(B-次微分) $\partial_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$

收稿日期： 2012-12-25； **修回日期：** 2013-09-02.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11071029；91130007).
作者简介： 侯 剑*(1979-)，男，博士生，E-mail：houjiantougao@163.com；张立卫(1966-)，男，教授，博士生导师，E-mail：lwzhang@dlut.edu.cn.

定义为

$$\partial_B \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \{\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{J\Phi}(\boldsymbol{x}^k) | \boldsymbol{x}^k \in \boldsymbol{D_\Phi}, \boldsymbol{x}^k \to \boldsymbol{x}\}$$

其中 $\boldsymbol{J\Phi}(\boldsymbol{x}^k)$ 为 $\boldsymbol{\Phi}$ 在 $\boldsymbol{x}^k$ 处的 Jacobian 矩阵. $\boldsymbol{\Phi}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处的 Clarke 广义次微分 $\partial\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ 定义为 $\partial_B\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ 的凸包：

$$\partial\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{conv}\{\partial_B\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\}$$

定义 1[10]　令 $\boldsymbol{\Phi}:\boldsymbol{O}\subseteq\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ 是开集 $\boldsymbol{O}$ 上的局部 Lipschitz 连续函数，称 $\boldsymbol{\Phi}$ 在 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{O}$ 处半光滑，若

(1) $\boldsymbol{\Phi}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处方向可微；

(2) 对任意 $\Delta\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}, \Delta\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{V}\in\partial\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})$ 有

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{V}(\Delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}(\|\Delta\boldsymbol{x}\|)$$

进一步，称 $\boldsymbol{\Phi}$ 在 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{O}$ 处强半光滑，若 $\boldsymbol{\Phi}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处半光滑，并且对于任意 $\Delta\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}, \Delta\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{V}\in\partial\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})$，有

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{V}(\Delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{O}(\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2)$$

定义 2　设 $\boldsymbol{G}:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处是局部 Lipschitz 的，称 $\boldsymbol{G}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处是强 BD- 正则的，若对任意的 $\boldsymbol{H}\in\partial_B\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ 都满足 $\boldsymbol{H}$ 是非奇异的. 进一步，若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 满足系统 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{G}$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是强 BD- 正则的，那么称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是该系统的强 BD- 正则解.

本文考虑如下广义纳什均衡问题. 设有 N 个博弈者，将第 ν 个博弈者 $\nu\in\{1,\cdots,N\}$ 的决策变量记为 $\boldsymbol{x}^\nu\in\boldsymbol{R}^{n_\nu}$，且令 $\boldsymbol{x}=(x^1\quad\cdots\quad x^N)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^n$ 是由这 N 个博弈者的决策变量构成的向量，其中 $n=n_1+\cdots+n_N$. 设对应于第 ν 个博弈者的效用函数为 $\theta^\nu:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$，策略集为 $\boldsymbol{X}_\nu(\boldsymbol{x}^{-\nu})\subseteq\boldsymbol{R}^{n_\nu}$，那么第 ν 个博弈者的模型为

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{x}^\nu} \quad \theta^\nu(\boldsymbol{x}^\nu,\boldsymbol{x}^{-\nu})\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{x}^\nu\in\boldsymbol{X}_\nu(\boldsymbol{x}^{-\nu})\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{g}:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ 为所有博弈者的联合约束，$\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\geqslant 0\}$ 是一非空闭凸集合，定义 $\boldsymbol{X}_\nu(\boldsymbol{x}^{-\nu})=\{\boldsymbol{x}^\nu\in\boldsymbol{R}^{n_\nu} \mid (\boldsymbol{x}^\nu,\boldsymbol{x}^{-\nu})\in\boldsymbol{X}\}$.

在本文接下来的研究中，做以下假设：

假设 1　(1) θ^ν 是二次连续可微的，且对于每一个向量 $\boldsymbol{x}^{-\nu}\in\boldsymbol{R}^{n_{-\nu}}$，$\theta^\nu(\cdot,\boldsymbol{x}^{-\nu})$ 是凸的.

(2) $\boldsymbol{g}=(g_1\quad\cdots\quad g_m)$ 是二次连续可微的，$g_i(i=1,\cdots,m)$ 是凹的.

研究广义纳什均衡问题的一个重要工具是 Nikaido-Isoda 函数：

$$\Psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{\nu=1}^{N}[\theta^\nu(\boldsymbol{x}^\nu,\boldsymbol{x}^{-\nu}) - \theta^\nu(\boldsymbol{y}^\nu,\boldsymbol{x}^{-\nu})]$$

令 $\alpha>0$，正则化 Nikaido-Isoda 函数定义为

$$\Psi_\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$$

不难得到，$\Psi_\alpha(\boldsymbol{x},\cdot)$ 关于 $\boldsymbol{y}$ 是强凹的，因此对于每一个 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$，以下问题

$$\begin{aligned}&\max\quad \Psi_\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{X}\end{aligned}\tag{1}$$

有唯一解，记为 $\boldsymbol{y}_\alpha(\boldsymbol{x})$，即

$$\boldsymbol{y}_\alpha(\boldsymbol{x}) = \arg\max_{\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{X}}\Psi_\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

与问题(1)相联系的最优值函数为

$$V_\alpha(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{X}}\Psi_\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Psi_\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_\alpha(\boldsymbol{x}))$$

称向量 $\boldsymbol{x}^*\in\boldsymbol{X}$ 是广义纳什均衡问题的正则化纳什均衡解，若 $V_\alpha(\boldsymbol{x}^*)=0$. 由文献[1]知道，每一个正则化纳什均衡解都是广义纳什均衡问题的解，并且 $\boldsymbol{x}^*$ 是正则化纳什均衡解当且仅当 $\boldsymbol{x}^*$ 是优化问题

$$\begin{aligned}&\min\quad V_\alpha(\boldsymbol{x})\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}\end{aligned}\tag{2}$$

的解.

2　极小极大问题模型

考虑如下极小极大问题：

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}}(\max_{\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{X}}\Psi_\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$$

令 $(\boldsymbol{x}^*\quad\boldsymbol{y}^*)\in\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ 是 $\Psi_\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 的鞍点，即对任意 $(\boldsymbol{x}\quad\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$，

$$\Psi_\alpha(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y})\leqslant\Psi_\alpha(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)\leqslant\Psi_\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*)\tag{3}$$

则鞍点中向量 $\boldsymbol{x}$ 部分就是问题(2)的解，因此也是正则化纳什均衡解. $(\boldsymbol{x}^*\quad\boldsymbol{y}^*)\in\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ 是 $\Psi_\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 的鞍点的必要条件为

$$\begin{aligned}&\nabla_x^{\mathrm{T}}\Psi_\alpha(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)\geqslant 0\\&-\nabla_y^{\mathrm{T}}\Psi_\alpha(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^*)\geqslant 0\end{aligned}\tag{4}$$

问题(4)是一个变分不等式问题. 令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$，即 $\boldsymbol{Y}=\{\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^{2n} \mid \boldsymbol{G}(\boldsymbol{z})\geqslant\boldsymbol{0}\}$，其中 $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\quad\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}))^{\mathrm{T}}$，且令

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix}\nabla_x\Psi_\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\-\nabla_y\Psi_\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{pmatrix}$$

则问题(4)可以等价地表达为

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{z}^*)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}^*)\geqslant\boldsymbol{0};\ \forall\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{Y}\tag{5}$$

式(5)的 KKT 条件为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})-\nabla\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{0};\ 0\leqslant\boldsymbol{\lambda}\perp\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z})\geqslant 0 \tag{6}$$

应用 Fischer-Burmeister 函数

$$\varphi(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}-(a+b)$$

KKT 条件(6)等价地变为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{0} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}:\boldsymbol{R}^{2n+2m}\rightarrow\boldsymbol{R}^{2n+2m}$ 定义为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})-\nabla\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{\lambda}\\ \varphi(G_1(\boldsymbol{z}),\lambda_1)\\ \vdots\\ \varphi(G_{2m}(\boldsymbol{z}),\lambda_{2m})\end{pmatrix}$$

在假设 1 的条件下,$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})$ 是半光滑的.

3 非奇异性定理

令矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是一个 n 维方阵,把 $\boldsymbol{B}$ 的取向定义为 $\boldsymbol{B}$ 的行列式的符号,令 $\boldsymbol{L}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个 t 维子空间,$t\geqslant 1$,$\boldsymbol{Q}$ 是由 $\boldsymbol{L}$ 的一组基作为列向量构成的矩阵. 称 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$ 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 在子空间 $\boldsymbol{L}$ 上的截面,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 在子空间 $\boldsymbol{L}$ 上的取向定义为 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$ 的取向.

引理 1[11] 考虑以下矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{B}\\ -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{N}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$,$m\leqslant n$ 且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是列满秩的. 有矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的取向与 $\boldsymbol{N}$ 在子空间 $Ker(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ 上的取向相同.

引理 2[12] 令 $\boldsymbol{\omega}=(\boldsymbol{z}\quad\boldsymbol{\lambda})\in\boldsymbol{R}^{2n+2m}$,$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})-\nabla\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{\lambda}$,则 $\boldsymbol{H}\in\partial\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega})$ 可以表示为

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_z\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\omega}) & -\nabla\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z})\\ \boldsymbol{D}_a(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{J}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}) & \boldsymbol{D}_b(\boldsymbol{\omega})\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{D}_a(\boldsymbol{\omega})=\mathbf{diag}\{a_1(\boldsymbol{\omega}),\cdots,a_{2m}(\boldsymbol{\omega})\}\in\boldsymbol{R}^{2m\times 2m}$ 和 $\boldsymbol{D}_b(\boldsymbol{\omega})=\mathbf{diag}\{b_1(\boldsymbol{\omega}),\cdots,b_{2m}(\boldsymbol{\omega})\}\in\boldsymbol{R}^{2m\times 2m}$ 是对角阵,第 i 个对角元素表示为若 $(G_i(\boldsymbol{z})\quad\lambda_i)\neq\boldsymbol{0}$,

$$a_i(\boldsymbol{\omega})=\frac{G_i(\boldsymbol{z})}{\sqrt{G_i^2(\boldsymbol{z})+\lambda_i^2}}-1$$

$$b_i(\boldsymbol{\omega})=\frac{\lambda_i}{\sqrt{G_i^2(\boldsymbol{z})+\lambda_i^2}}-1$$

若 $(G_i(\boldsymbol{z})\quad\lambda_i)=\boldsymbol{0}$,

$$a_i(\boldsymbol{\omega})=\xi_i-1,\ b_i(\boldsymbol{\omega})=\rho_i-1$$

其中 $(\xi_i\quad\rho_i)$ 满足条件 $\|(\xi_i\quad\rho_i)\|\leqslant 1$.

下面讨论 $\boldsymbol{\Phi}$ 在解点 $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ 处强 BD- 正则性的条件. 将指标集 $I=\{1,\cdots,2m\}$ 分划为

$$I=\{1,\cdots,2m\}$$

$$I_0=\{i\mid G_i(\bar{\boldsymbol{z}})=0,\bar{\lambda}_i\geqslant 0\}$$

$$I_>=\{i\mid G_i(\bar{\boldsymbol{z}})>0,\bar{\lambda}_i=0\}$$

$$I_{00}=\{i\in I_0\mid\bar{\lambda}_i=0\}$$

$$I_+=\{i\in I_0\mid\bar{\lambda}_i>0\}$$

$$I_{01}=\{i\in I_{00}\mid\rho_i=1\}$$

$$I_{02}=\{i\in I_{00}\mid\rho_i<1,\xi_i<1\}$$

$$I_{03}=\{i\in I_{00}\mid\xi_i=1\}$$

显然有

$$I=I_0\cup I_>,\ I_0=I_{00}\cup I_+,$$
$$I_{00}=I_{01}\cup I_{02}\cup I_{03}$$

进一步,$\boldsymbol{H}\in\partial\boldsymbol{\Phi}(\overline{\boldsymbol{\omega}})$ 可以等价地表示为

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_z\boldsymbol{L} & -\nabla\boldsymbol{G}_+ & -\nabla\boldsymbol{G}_{01} & -\nabla\boldsymbol{G}_{02} & -\nabla\boldsymbol{G}_{03} & -\nabla\boldsymbol{G}_>\\ -\boldsymbol{J}\boldsymbol{G}_+ & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{J}\boldsymbol{G}_{01} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ (\boldsymbol{D}_a)_{02}\boldsymbol{J}\boldsymbol{G}_{02} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{D}_b)_{02} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{E}\end{pmatrix} \tag{8}$$

其中 $(\boldsymbol{D}_a)_{02}$ 和 $(\boldsymbol{D}_b)_{02}$ 为负定对角阵,为了简便,将 $\boldsymbol{J}_z\boldsymbol{L}(\overline{\boldsymbol{\omega}})$ 简记为 $\boldsymbol{J}_z\boldsymbol{L}$,$\nabla\boldsymbol{G}_+(\bar{\boldsymbol{z}})$ 简记为 $\nabla\boldsymbol{G}_+$ 等.

定理 1 令 $\overline{\boldsymbol{\omega}}=(\bar{\boldsymbol{z}}\quad\bar{\boldsymbol{\lambda}})\in\boldsymbol{R}^{2n+2m}$ 满足 $\boldsymbol{\Phi}(\overline{\boldsymbol{\omega}})=\boldsymbol{0}$. 若 $\nabla\boldsymbol{G}_i(\bar{\boldsymbol{z}})(i\in I_0)$ 是线性独立的,且 $\boldsymbol{J}_z\boldsymbol{L}(\overline{\boldsymbol{\omega}})$ 在子空间 $Ker(\boldsymbol{J}\boldsymbol{G}_+(\bar{\boldsymbol{z}}))$ 上是正定的,则 $\partial\boldsymbol{\Phi}(\overline{\boldsymbol{\omega}})$ 中的任意元素非奇异.

证明 任取 $\boldsymbol{H}\in\partial\boldsymbol{\Phi}(\overline{\boldsymbol{\omega}})$,由式(8)得到,$\boldsymbol{H}$ 非奇异当且仅当

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_z\boldsymbol{L} & -\nabla\boldsymbol{G}_+ & -\nabla\boldsymbol{G}_{01} & -\nabla\boldsymbol{G}_{02}\\ -\boldsymbol{J}\boldsymbol{G}_+ & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{J}\boldsymbol{G}_{01} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ (\boldsymbol{D}_a)_{02}\boldsymbol{J}\boldsymbol{G}_{02} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{D}_b)_{02}\end{pmatrix}$$

非奇异,进一步等价于矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_z\boldsymbol{L} & \nabla\boldsymbol{G}_+ & \nabla\boldsymbol{G}_{01} & \nabla\boldsymbol{G}_{02}\\ -\boldsymbol{J}\boldsymbol{G}_+ & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{J}\boldsymbol{G}_{01} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{J}\boldsymbol{G}_{02} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{D}_a)_{02}^{-1}(\boldsymbol{D}_b)_{02}\end{pmatrix}$$

的非奇异性. 将矩阵 $\boldsymbol{M}$ 表示为 $\boldsymbol{M}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{D}}$,其中

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_z\boldsymbol{L} & \nabla\boldsymbol{G}_+ & \nabla\boldsymbol{G}_{01} & \nabla\boldsymbol{G}_{02}\\ -\boldsymbol{J}\boldsymbol{G}_+ & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{J}\boldsymbol{G}_{01} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{J}\boldsymbol{G}_{02} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

和

$$\overline{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&(\boldsymbol{D}_a)_{02}^{-1}(\boldsymbol{D}_b)_{02}\end{pmatrix}$$

令 $r=2n+|I_+|+|I_{01}|+|I_{02}|$，由文献[13]得到

$$\det(\overline{\boldsymbol{D}}+\overline{\boldsymbol{A}})=\sum_{\alpha}\det\overline{\boldsymbol{D}}_{\alpha\alpha}\cdot\det\overline{\boldsymbol{A}}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}$$

这里，α 取遍 $\{1,\cdots,r\}$ 的所有子集，$\bar{\alpha}=\{1,\cdots,r\}\backslash\alpha$，并且假定空矩阵的行列式为 1. 因此有

$$\det(\boldsymbol{M})=\det(\overline{\boldsymbol{A}})+\sum_{\varnothing\neq\alpha\subseteq I_{02}}\det(\overline{\boldsymbol{D}}_{\alpha\alpha})\cdot\det(\overline{\boldsymbol{A}}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})$$

由引理 1，矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的取向与 $\boldsymbol{J}_z\boldsymbol{L}(\overline{\boldsymbol{\omega}})$ 在子空间 $Ker((\nabla\boldsymbol{G}_+(\bar{z})\quad\nabla\boldsymbol{G}_{01}(\bar{z})\quad\nabla\boldsymbol{G}_{02}(\bar{z}))^{\mathrm{T}})$ 上的取向相同，因此 $\det(\overline{\boldsymbol{A}})>0$，同理有 $\det(\overline{\boldsymbol{A}}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})>0$. 因为对于任意 $\alpha\subseteq I_{02}$，都有 $\overline{\boldsymbol{D}}_{\alpha\alpha}$ 是正定的，这就得到 $\boldsymbol{M}$ 是非奇异的，因此 $\boldsymbol{H}$ 也是非奇异的. 由 $\boldsymbol{H}$ 的任意性，命题得证.

推论 1 令 $\overline{\boldsymbol{\omega}}=(\bar{z}\quad\bar{\boldsymbol{\lambda}})\in\boldsymbol{R}^{2n+2m}$ 满足 $\boldsymbol{\Phi}(\overline{\boldsymbol{\omega}})=\mathbf{0}$. 若 $\nabla\boldsymbol{G}_i(\bar{z})(i\in I_0)$ 是线性独立的，且对任意给定的 $\boldsymbol{y}$，$\Psi_\alpha(\cdot,\boldsymbol{y})$ 在 $\boldsymbol{X}$ 是强凸的，则 $\partial\boldsymbol{\Phi}(\overline{\boldsymbol{\omega}})$ 中所有元素都非奇异.

证明 由定理 1 可知，只需证明 $\boldsymbol{J}_z\boldsymbol{L}(\overline{\boldsymbol{\omega}})$ 是正定的. 因为

$$\boldsymbol{L}(\overline{\boldsymbol{\omega}})=\boldsymbol{F}(\bar{z})-\nabla\boldsymbol{G}(\bar{z})\boldsymbol{\lambda}=\begin{pmatrix}\nabla_x\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})-\nabla\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}})\lambda_1\\-\nabla_y\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})-\nabla\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{y}})\lambda_2\end{pmatrix}$$

有

$$\boldsymbol{J}_z\boldsymbol{L}(\overline{\boldsymbol{\omega}})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_x(\nabla_x\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}))-\boldsymbol{J}_x(\nabla\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}})\lambda_1)&\boldsymbol{J}_y(\nabla_x\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}))-\boldsymbol{J}_y(\nabla\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}})\lambda_1)\\-\boldsymbol{J}_x(\nabla_y\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}))-\boldsymbol{J}_x(\nabla\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{y}})\lambda_2)&-\boldsymbol{J}_y(\nabla_y\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}))-\boldsymbol{J}_y(\nabla\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{y}})\lambda_2)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\nabla_{xx}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})-\boldsymbol{J}_x(\nabla\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}})\lambda_1)&\nabla_{xy}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\\-\nabla_{yx}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})&-\nabla_{yy}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})-\boldsymbol{J}_y(\nabla\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{y}})\lambda_2)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\nabla_{xx}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})&\nabla_{xy}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\\-\nabla_{yx}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})&-\nabla_{yy}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\boldsymbol{J}_x(\nabla\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}})\lambda_1)&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&-\boldsymbol{J}_y(\nabla\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{y}})\lambda_2)\end{pmatrix}$$

因为矩阵

$$\begin{pmatrix}-\boldsymbol{J}_x(\nabla\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}})\lambda_1)&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&-\boldsymbol{J}_y(\nabla\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{y}})\lambda_2)\end{pmatrix}$$

是半正定的，因此若能证明矩阵

$$\begin{pmatrix}\nabla_{xx}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})&\nabla_{xy}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\\-\nabla_{yx}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})&-\nabla_{yy}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\end{pmatrix}$$

是正定的，则 $\boldsymbol{J}_z\boldsymbol{L}(\overline{\boldsymbol{\omega}})$ 的正定性就显然成立. 事实上，对于任意 $\mathbf{0}\neq(\boldsymbol{x}_1\quad\boldsymbol{x}_2)\in\boldsymbol{R}^{2n}$，

$$(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}\nabla_{xx}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})&\nabla_{xy}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\\-\nabla_{yx}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})&-\nabla_{yy}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}=$$

$$\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\nabla_{xx}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\nabla_{yx}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\nabla_{xy}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\nabla_{yy}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{x}_2=$$

$$\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\nabla_{xx}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\nabla_{yy}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{x}_2\tag{9}$$

由 $-\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\cdot)$ 和 $\Psi_\alpha(\cdot,\bar{\boldsymbol{y}})$ 的强凸性得到

$$\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\nabla_{xx}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\nabla_{yy}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\boldsymbol{x}_2>0$$

这就意味着 $\begin{pmatrix}\nabla_{xx}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})&\nabla_{xy}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\\-\nabla_{yx}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})&-\nabla_{yy}^2\Psi_\alpha(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})\end{pmatrix}$ 是正定的. 证明完成.

4 算法与数值结果

用半光滑牛顿法求解系统(7)，有 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{\Phi}(z,\boldsymbol{\lambda})=\mathbf{0}$. 首先定义度量函数

$$\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\omega})=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega})=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega})\|^2$$

$\boldsymbol{\Theta}$ 是连续可微的，且 $\nabla\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega})$，其中 $\boldsymbol{H}\in\partial\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega})$.

算法 1

步骤 0 选取 $\boldsymbol{\omega}^0=(z^0\quad\boldsymbol{\lambda}^0)\in\boldsymbol{R}^{2n}\times\boldsymbol{R}^{2m}$，$\rho>0$，$\kappa>0$，$\sigma\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\beta\in(0,1)$，$\varepsilon\geqslant0$，置 $k=0$.

步骤 1 若 $\|\nabla\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\omega}^k)\|\leqslant\varepsilon$，停止，否则转入步骤 2.

步骤 2 选取 $\boldsymbol{H}_k\in\partial_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega}_k)$，求解

$$\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega}^k)\tag{10}$$

的解 $\boldsymbol{d}^k$. 如果式(10)不可解或者解得的 $\boldsymbol{d}^k$ 不满足条件

$$\nabla\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\omega}^k)\boldsymbol{d}^k \leqslant -\rho\|\boldsymbol{d}^k\|^{\kappa}$$

则置 $\boldsymbol{d}^k = -\nabla\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\omega}^k)$.

步骤 3 令 t^k 是 $\{\beta^j \mid j=0,1,2,\cdots\}$ 中的最大者,并且满足

$$\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\omega}^k + t^k\boldsymbol{d}^k) \leqslant \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\omega}^k) + t^k\sigma\,\nabla\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\omega}^k)\boldsymbol{d}^k$$

步骤 4 置 $\boldsymbol{\omega}^{k+1} = \boldsymbol{\omega}^k + t^k\boldsymbol{d}^k$, $k=k+1$,转步骤 1.

下述定理给出了算法 1 的收敛性和收敛速度,定理的证明可参考文献[14].

定理 2 假设算法 1 不在有限步终止,令 $\{\boldsymbol{\omega}^k\}$ 是由算法 1 产生的序列,则序列 $\{\boldsymbol{\omega}^k\}$ 的每一个聚点 $\boldsymbol{\omega}^*$ 都是 $\boldsymbol{\Theta}$ 的稳定点. 进一步,若 $\boldsymbol{\omega}^*$ 是系统 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{0}$ 的强 BD- 正则解,则 $\{\boldsymbol{\omega}^k\}$ 超线性收敛于 $\boldsymbol{\omega}^*$.

例 1 此 Internet 网络模型广义纳什均衡问题取自文献[15]. 在这个问题中,每一个博弈者的效用函数为

$$\theta^{\nu}(x) = \frac{x^{\nu}}{B} - \frac{x^{\nu}}{\sum_{\nu=1}^{N} x^{\nu}}$$

要满足约束条件 $x^{\nu} \geqslant 0.01$, $\nu = 1,\cdots,N$ 且 $\sum_{\nu=1}^{N} x^{\nu} \leqslant B$. 取 $N=10$, $B=1$,且设初始点 $\boldsymbol{x}^0 = (0.10\quad 0.11\quad 0.12\quad \cdots)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^{10}$. 这个问题的精确解为 $\boldsymbol{x}^* = (0.09\quad 0.09\quad \cdots\quad 0.09)^{\mathrm{T}}$. 在表 1 中给出 $\boldsymbol{x}$ 的前 3 个分量的计算结果.

表 1 例 1 的数值结果

Tab. 1 Numerical results for Example 1

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	步长
0	0.100 0	0.110 0	0.120 0	0
1	0.134 9	0.131 2	0.127 5	1
2	0.074 4	0.076 6	0.078 7	1
3	0.088 4	0.088 7	0.089 0	1
4	0.089 9	0.089 9	0.089 9	1
5	0.090 0	0.090 0	0.090 0	1

例 2 此广义纳什均衡问题是一个河流污染模型,取自文献[1]和[16]. 在这个模型中假设有 3 个博弈者,每一个博弈者 ν 的决策变量 $x^{\nu} \in \mathbf{R}$ 并且他的效用函数定义为

$$\theta^{\nu}(x) = x^{\nu}(c_{1\nu} + c_{2\nu}x^{\nu} - d_1 + d_2(x^1 + x^2 + x^3))$$

3 个博弈者都满足条件

$$\mu_{11}e_1x^1 + \mu_{21}e_2x^2 + \mu_{31}e_3x^3 \leqslant K_1$$

$$\mu_{12}e_1x^1 + \mu_{22}e_2x^2 + \mu_{32}e_3x^3 \leqslant K_2$$

其中 $d_1 = 3.0$, $d_2 = 0.01$, $K_1 = K_2 = 100$. 表 2 中给出常数 $c_{1\nu}$、$c_{2\nu}$、e_{ν}、$\mu_{\nu1}$ 和 $\mu_{\nu2}$ 的值. 在表 3 中,给出相应的数值结果.

表 2 例 2 中各常数的取值

Tab. 2 Constants for Example 2

ν	$c_{1\nu}$	$c_{2\nu}$	e_{ν}	$\mu_{\nu1}$	$\mu_{\nu2}$
1	0.10	0.01	0.50	6.5	4.583
2	0.12	0.05	0.25	5.0	6.250
3	0.15	0.01	0.75	5.5	3.750

表 3 例 2 的数值结果

Tab. 3 Numerical results for Example 2

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	步长
0	0	0	0	0
1	9.208 9	2.481 2	8.931 6	0.166 4
2	11.531 1	3.106 9	11.183 9	0.050 3
3	12.744 1	3.433 8	12.360 3	0.027 7
4	13.100 8	3.529 9	12.706 4	0.008 3
5	13.159 7	3.545 7	12.763 5	0.001 4
6	13.177 5	3.550 5	12.780 7	0.000 4
7	13.182 9	3.552 0	12.785 9	0.000 2
8	21.175 4	16.026 8	2.771 6	1
9	21.149 2	16.027 7	2.732 6	1
10	21.144 9	16.027 8	2.726 1	1
11	21.144 7	16.027 8	2.725 9	1

在达到相同精度的条件下,例 1 在文献[15]中经过了 26 步迭代. 例 2 在文献[1]中经过了 18 步迭代,在文献[16]中经过了 20 步迭代.

5 结 语

基于正则化 Nikaido-Isoda 函数,本文研究了求解一类广义纳什均衡问题的极小极大方法. 在给出正则化纳什均衡解与鞍点的关系之后,将极小极大问题的必要性条件等价于一个变分不等式问题,并将变分不等式问题的 KKT 条件等价于一个半光滑方程组. 为了应用半光滑牛顿法求解该方程组,在一定的条件下证明了半光滑方程组在解点处的强 BD-正则性. 最后的数值结果显示了方法的有效性.

参考文献:

[1] Heusinger A, Kanzow C. Optimization reformulations of the generalized Nash equilibrium problem using Nikaido-Isoda-type functions [J]. **Computational Optimization and Applications**, 2009,

43(3):353-377.

[2] Panicucci B, Pappalardo M, Passacantando M. On solving generalized Nash equilibrium problems via optimization [J]. **Optimization Letters**, 2009, **3**(3): 419-435.

[3] Heusinger A, Kanzow C, Fukushima M. Newton′s method for computing a normalized equilibrium in the generalized Nash game through fixed point formulation [J]. **Mathematical Programming**, 2012, **132**(1):99-123.

[4] Heusinger A, Kanzow C. SC1 optimization reformulations of the generalized Nash equilibrium problem [J]. **Optimization Methods and Software**, 2008, **23**(6):953-973.

[5] Facchinei F, Fischer A, Piccialli V. Generalized Nash equilibrium problems and Newton methods [J]. **Mathematical Programming**, 2009, **117**(1): 163-194.

[6] Pang J S, Fukushima M. Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi-leader-follower games [J]. **Computational Management Science**, 2005, **2**(1):21-56.

[7] Facchinei F, Pang J S. Exact penalty functions for generalized Nash problems [J]. **Large-Scale Nonlinear Optimization, Nonconvex Optimization and Its Applications**, 2006, **83**(1):115-126.

[8] Harker P T. Generalized Nash games and quasi-variational inequalities [J]. **European Journal of Operational Research**, 1991, **54**(1):81-94.

[9] Nabetani K, Tseng P, Fukushima M. Parametrized variational inequality approaches to generalized Nash equilibrium problems with shared constraints [J]. **Computational Optimization and Applications**, 2011, **48**(3):423-452.

[10] QI Li-qun, SUN Jie. A nonsmooth version of Newton′s method [J]. **Mathematical Programming**, 1993, **58**(1):353-367.

[11] LIU Ji-ming. Strong stability in variational inequalities [J]. **SIAM Journal on Control and Optimization**, 1995, **33**(3):725-749.

[12] Facchinei F, Fischer A, Kanzow C. Regularity properties of a semismooth reformulation of variational inequalities [J]. **SIAM Journal on Optimization**, 1998, **8**(3):850-869.

[13] Cottle R W, Pang J S, Stone R E. **The Linear Complementarity Problem** [M]. Boston: Academic Press, 1992.

[14] Luca D T, Facchinei F, Kanzow C. A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems [J]. **Mathematical Programming**, 1996, **75**(3):407-439.

[15] Heusinger A, Kanzow C. Relaxation methods for generalized Nash equilibrium problems with inexact line search [J]. **Journal of Optimization Theory and Applications**, 2009, **143**(1):159-183.

[16] Krawczyk J B, Uryasev S. Relaxation algorithms to find Nash equilibria with economic applications [J]. **Environmental Modeling and Assessment**, 2000, **5**(1):63-73.

A minimax approach to solving generalized Nash equilibrium problem

HOU　Jian*，　ZHANG　Li-wei

(School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Using the regularized Nikaido-Isoda function, the generalized Nash equilibrium problem is reformulated as a minimax problem. Based on Fischer-Burmeister function, the Karush-Kuhn-Tucker system of the variational inequality problem equivalent to the necessary conditions for this minimax problem, is transformed into a semismooth system of equations. The semismooth Newton method is used to solve the system and sufficient conditions for the local superlinear convergence of the semismooth Newton method are derived. Numerical results show that the minimax approach to solving the generalized Nash equilibrium problem is practical.

Key words: Nash equilibrium problem; generalized Nash equilibrium problem; variational inequality; semismooth Newton method