第54卷第1期
2014年1月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 54, No. 1
Jan. 2014

文章编号：1000-8608(2014)01-0131-08

网络化控制系统鲁棒 H_∞ 保性能控制研究

刘于之[1,2]， 李木国*[2]， 杜 海[2]

（1. 大连理工大学 电子信息与电气工程学部，辽宁 大连 116024；
2. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室，辽宁 大连 116024）

摘要： 针对一类含有不确定参数被控对象的网络化控制系统(NCS)，研究了网络中存在时延与丢包情况下的鲁棒 H_∞ 保性能控制问题. 通过 Lyapunov-Krasovskii 泛函和 Jensen 不等式，推导出闭环 NCS 鲁棒渐近稳定的充分条件. 与已有文献相比，该充分条件可以转换为具有较少决策变量的 LMI 形式. 给出了 NCS 鲁棒 H_∞ 保性能控制律的优化设计算法. 最后通过数值实例验证了算法的有效性.

关键词： 网络化控制系统；H_∞ 保性能控制；线性矩阵不等式；时延；数据包丢失

中图分类号： TP273 **文献标识码：** A **doi：** 10.7511/dllgxb201401020

0 引 言

网络化控制系统(NCS)中，不同组件之间通过共享通信介质进行信息交换，因而使系统具有布线简单、结构灵活、易于维护等众多优点，但网络的引入同时也带来诸如网络诱导延时、数据丢包、抖动以及多包传输等问题，导致控制系统的性能下降甚至不稳定，给网络控制系统的分析与设计带来了严重的困难和挑战[1].

网络化控制系统的研究近十几年来已经得到众多国内外学者的关注. 文献[2-5]中分析了 NCS 的稳定性；文献[6-9]考虑了外部干扰情况下，如何设计 H_∞ 控制器的问题；文献[10-12]给出了 NCS 保性能控制器实现的充分条件. 注意到以上文献中，NCS 均被建模成具有时变时滞的连续时间系统，通过时滞系统相关理论得到系统稳定的充分条件，这些充分条件通常可转换为线性矩阵不等式(LMI)的形式. 此类方法的研究重点在于如何选取合适的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，以及怎样处理泛函求导过程中出现的交叉项，从而得到保守性更小的充分条件. 文献[2]首先利用该方法对 NCS 建模，将网络诱导时延和数据丢包的影响统一建模成有界分段连续的时变输入时滞，并得到了 NCS 的最大允许传输延迟(MADB). 文献[9]采用与文献[2]中相同的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，在求导过程中对交叉项作了更紧的界定，并利用自由权矩阵方法得到保守性更小的结果. 然而以上文献均未考虑时变时滞下限的影响. 文献[7]中构造了新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，由于构造的泛函中利用时滞下限的信息，降低了保守性. 文献[3,6,8,12]通过构造不同 Lyapunov-Krasovskii 泛函，在不同程度上获得了比文献[7]保守性更小的结果. 注意到以上文献中，为减小保守性，需要构造更为复杂的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，或是引入额外的矩阵变量(自由权矩阵)，因此导致了所得 LMI 决策变量的增加. 本文在文献[3,6,8,12]的基础上，构造一个形式更为简洁的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，通过 Jensen 不等式获得具有较少决策变量的 LMI，进一步给出 NCS 的 H_∞ 保性能控制器存在的充分条件，并利用线性锥补算法实现控制器的优化求解. 最后通过数值算例仿真验证该方法的有效性.

1 问题描述

考虑以下线性不确定系统：

收稿日期： 2013-01-12； **修回日期：** 2013-11-28.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(61202253).
作者简介： 刘于之(1986-)，男，博士生，E-mail：liuyuzhi_1@163.com；李木国*(1953-)，男，教授，博士生导师，E-mail：lmguo@dlut.edu.cn.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}(t)]\boldsymbol{x}(t)+[\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B}(t)]\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{w}(t);$$
$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0;$$
$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}^n$，是系统的状态向量；$\boldsymbol{u}(t)\in\boldsymbol{R}^m$，是控制输入；$\boldsymbol{w}(t)\in L_2[0,+\infty)$，是外部扰动输入；$\boldsymbol{z}(t)\in\boldsymbol{R}^q$，是控制输出；$\boldsymbol{x}(t_0)\in\boldsymbol{R}^n$，为系统初始状态；$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 为适维常数矩阵；$\Delta\boldsymbol{A}(t)$ 和 $\Delta\boldsymbol{B}(t)$ 是反映系统模型中参数不确定性的未知矩阵，且具有以下形式：

$$(\Delta\boldsymbol{A}(t)\quad\Delta\boldsymbol{B}(t))=\boldsymbol{M}\boldsymbol{F}(t)(\boldsymbol{E}_a\quad\boldsymbol{E}_b) \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{F}(t)$ 是一个满足

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{I} \tag{3}$$

的不确定矩阵；$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{E}_a$ 和 $\boldsymbol{E}_b$ 是已知的常数矩阵，它们反映了不确定参数的结构信息.

给定对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$，定义性能函数

$$J=\int_0^{\infty}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t \tag{4}$$

定义1 对于不确定系统(1)，若存在控制律 $\boldsymbol{u}^*(t)$，标量 $\gamma>0$，$J^*>0$，使得对所有允许的参数不确定性，闭环系统(1)满足如下设计指标：

(1) 当 $\boldsymbol{w}(t)\equiv\boldsymbol{0}$ 时，系统渐近稳定；

(2) 当 $\boldsymbol{w}(t)\equiv\boldsymbol{0}$ 时，系统对应的性能指标(4)具有上界 J^*，满足 $J\leqslant J^*$；

(3) 在零初始条件下($\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{0}$)，干扰输入 $\boldsymbol{w}(t)$ 和控制输出 $\boldsymbol{z}(t)$ 满足 H_∞ 范数约束条件：

$$\|\boldsymbol{z}(t)\|_2\leqslant\gamma\|\boldsymbol{w}(t)\|_2$$

则称 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 为系统(1)的一个 H_∞ 保性能控制律.

2 网络化控制系统建模

建立被控对象由式(1)描述的 NCS 模型，首先可做如下合理假设：

(1)网络数据传输采用单包传送，存在有界时延与数据丢包，控制器采用线性状态反馈控制律；

(2)传感器节点为时间驱动，采样周期为 h；

(3)控制器节点和执行器节点采用事件驱动，当没有新数据到来时输出维持不变；

(4)系统完全可控，且所有状态可测.

注1 假设(3)中包含了控制器与执行器均采用零阶保持器这一条件.

由以上假设，当考虑网络延时与丢包时，可建立如下控制系统模型[10]：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{w}(t);$$
$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t);\ t\in[i_kh+\tau_{i_k},i_{k+1}h+\tau_{i_{k+1}})$$
$$\boldsymbol{u}(t^+)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t-\tau_{i_k});\ t\in\{i_kh+\tau_{i_k},\ k=1,2,3,\cdots\} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 表示状态反馈增益，h 为采样周期，i_k 为整数且 $\{i_1,i_2,i_3,\cdots\}\subset\{1,2,3,\cdots\}$；$\tau_{i_k}$ 为网络诱导时延，表示数据从传感器采样时刻 i_kh 经由网络传递到执行器端时所消耗的时间. 显然，$\bigcup_{k=1}^{\infty}[i_kh+\tau_{i_k},i_{k+1}h+\tau_{i_{k+1}})=[0,\infty)$.

定义 $\tau(t)=t-i_kh$，$t\in[i_kh+\tau_{i_k},i_{k+1}h+\tau_{i_{k+1}})$，$k=1,2,3,\cdots$. 则系统(5)可描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t)+\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t-\tau(t))+\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{w}(t);$$
$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t);\quad t\in[t_0-\tau_M,t_0]$$
$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t-\tau(t)) \tag{6}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_a$，$\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_b$. 令 τ_m 代表 τ_{i_k} 的下界，τ_M 代表 $(i_{k+1}-i_k)h+\tau_{i_{k+1}}$ 的上界，则 $\tau_m\leqslant\tau(t)\leqslant\tau_M$.

注2 在式(5)中，$\{i_1,i_2,i_3,\cdots\}$ 为 $\{1,2,3,\cdots\}$ 的一个子集. 若 $i_{k+1}=i_k$，说明网络传输过程中没有丢包；若 $i_{k+1}>i_k$，说明网络传输过程中出现数据包丢失现象，且连续丢包个数为 $i_{k+1}-i_k-1$；若 $i_{k+1}<i_k$，说明网络传输过程中出现数据包错序现象. 通常，当数据包错序发生时，在网络控制系统中一般会将过时的数据包丢弃，仅考虑当前最新数据，因此可以假设 $i_{k+1}>i_k$.

为定理证明需要，给出如下引理：

引理1(Jensen 不等式) 设向量函数 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续一阶导数，则对于任意给定正定对称矩阵 $\boldsymbol{W}$，有以下不等式成立：

$$\int_a^b\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{b-a}\begin{pmatrix}x(b)\\x(a)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\times\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}&-\boldsymbol{W}\\-\boldsymbol{W}&\boldsymbol{W}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(b)\\x(a)\end{pmatrix}$$

引理2 设 $\boldsymbol{Y}$、$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{E}$ 为适当维数的实矩阵，其中 $\boldsymbol{F}(t)$ 满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{Y}$ 为对称矩阵，则

$$\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}<\boldsymbol{0}$$

当且仅当存在一个标量 $\varepsilon>0$，使得

$$\boldsymbol{Y}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}<\boldsymbol{0}$$

3 主要结果

定理1 考虑系统(6)，给定正定对称矩阵 $\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$，标量 τ_m、τ_M 满足 $0\leqslant\tau_m<\tau_M$，若存在标量 $\varepsilon_i>0(i=1,2,3)$，对称正定矩阵 $\hat{\boldsymbol{P}}$、$\hat{\boldsymbol{Z}}$、$\hat{\boldsymbol{W}}_1$、$\hat{\boldsymbol{W}}_2$，以及矩阵 $\boldsymbol{Y}$，使得如下矩阵不等式成立，即

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\Pi}} & \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1 & \hat{\boldsymbol{\gamma}}_2 & \hat{\boldsymbol{\gamma}}_3 \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Sigma}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_2 & \boldsymbol{0} \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_3 \end{pmatrix} < \boldsymbol{0} \tag{7}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{11} & \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{13} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{22} & \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{23} & \boldsymbol{0} \\ \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{13}^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{23}^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{33} & \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{34} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{34}^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{44} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1 = (\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{11}^{\mathrm{T}} \quad \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{12}^{\mathrm{T}}), \quad \hat{\boldsymbol{\gamma}}_2 = (\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_2^{\mathrm{T}} \quad \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_2^{\mathrm{T}}),$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_3 = (\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_3^{\mathrm{T}} \quad \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_3^{\mathrm{T}} \quad \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_3^{\mathrm{T}}),$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = \mathbf{diag}\{-\boldsymbol{Q}^{-1}, -\boldsymbol{R}^{-1}\},$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_2 = \mathbf{diag}\{-\hat{\boldsymbol{P}}\hat{\boldsymbol{W}}_1^{-1}\hat{\boldsymbol{P}}/\tau_M + \varepsilon_2\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}, -\hat{\boldsymbol{P}}\hat{\boldsymbol{W}}_2^{-1}\hat{\boldsymbol{P}}/\delta + \varepsilon_3\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_3 = \mathbf{diag}\{-\varepsilon_1\boldsymbol{I}, -\varepsilon_2\boldsymbol{I}, -\varepsilon_3\boldsymbol{I}\},$$

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{11} = \hat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{P}} + \hat{\boldsymbol{Z}} - \hat{\boldsymbol{W}}_1/\tau_M + \varepsilon_1\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{13} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} + \hat{\boldsymbol{W}}_1/\tau_M,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{22} = -\hat{\boldsymbol{W}}_2/\delta, \quad \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{23} = \hat{\boldsymbol{W}}_2/\delta,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{33} = -(\tau_M^{-1} + \delta^{-1})\hat{\boldsymbol{W}}_1 - 2\hat{\boldsymbol{W}}_2/\delta,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{34} = \hat{\boldsymbol{W}}_1/\delta + \hat{\boldsymbol{W}}_2/\delta,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}}_{44} = -\hat{\boldsymbol{Z}} - \hat{\boldsymbol{W}}_1/\delta - \hat{\boldsymbol{W}}_2/\delta,$$

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{11} = (\hat{\boldsymbol{P}} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}), \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{12} = (\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{Y} \quad \boldsymbol{0}),$$

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_2 = (\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{P}} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} \quad \boldsymbol{0}),$$

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_3 = (\boldsymbol{E}_a\hat{\boldsymbol{P}} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{E}_b\boldsymbol{Y} \quad \boldsymbol{0}), \delta = \tau_M - \tau_m$$

则 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Y}\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}$ 为系统(6) 的一个保性能控制器增益，且性能函数(4) 满足

$$J \leqslant \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{\varphi}(0) + \int_{-\tau_M}^{0}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(s)\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\hat{\boldsymbol{Z}}\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{\varphi}(s)\mathrm{d}s + \int_{-\tau_M}^{0}\int_{s}^{0}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(\theta)\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\hat{\boldsymbol{W}}_1\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\dot{\boldsymbol{\varphi}}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s + \int_{-\tau_M}^{-\tau_m}\int_{s}^{0}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(\theta)\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\hat{\boldsymbol{W}}_2\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\dot{\boldsymbol{\varphi}}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s = J^* \tag{8}$$

证明　构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函如下：

$$\boldsymbol{V}(t) = \boldsymbol{V}_0(t) + \boldsymbol{V}_1(t) + \boldsymbol{V}_2(t) + \boldsymbol{V}_3(t) \tag{9}$$

其中

$$\boldsymbol{V}_0(t) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$$

$$\boldsymbol{V}_1(t) = \int_{t-\tau_M}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s$$

$$\boldsymbol{V}_2(t) = \int_{-\tau_M}^{0}\int_{t+s}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{W}_1\dot{\boldsymbol{x}}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s$$

$$\boldsymbol{V}_3(t) = \int_{-\tau_M}^{-\tau_m}\int_{t+s}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{W}_2\dot{\boldsymbol{x}}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s$$

注意到 $\tau_m \leqslant \tau(t) \leqslant \tau_M$，因此由引理 1 可得以下不等式成立：

$$\begin{aligned} &-\int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{W}_i\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s \leqslant \\ &-\frac{1}{\tau_M-\tau(t)}\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(t)\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}_i & -\boldsymbol{W}_i \\ -\boldsymbol{W}_i & \boldsymbol{W}_i\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1(t) \leqslant \\ &-\frac{1}{\tau_M-\tau_m}\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(t)\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}_i & -\boldsymbol{W}_i \\ -\boldsymbol{W}_i & \boldsymbol{W}_i\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1(t);\ i = 1,2 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &-\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{W}_1\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s \leqslant \\ &-\frac{1}{\tau(t)}\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}(t)\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}_1 & -\boldsymbol{W}_1 \\ -\boldsymbol{W}_1 & \boldsymbol{W}_1\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_2(t) \leqslant \\ &-\frac{1}{\tau_M}\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}(t)\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}_1 & -\boldsymbol{W}_1 \\ -\boldsymbol{W}_1 & \boldsymbol{W}_1\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_2(t) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &-\int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_m}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{W}_2\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s \leqslant \\ &-\frac{1}{\tau(t)-\tau_m}\boldsymbol{\xi}_3^{\mathrm{T}}(t)\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}_2 & -\boldsymbol{W}_2 \\ -\boldsymbol{W}_2 & \boldsymbol{W}_2\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_3(t) \leqslant \\ &-\frac{1}{\tau_M-\tau_m}\boldsymbol{\xi}_3^{\mathrm{T}}(t)\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}_2 & -\boldsymbol{W}_2 \\ -\boldsymbol{W}_2 & \boldsymbol{W}_2\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_3(t) \end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\boldsymbol{\xi}_1(t) = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t)) \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_M))^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\xi}_2(t) = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t)))^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\xi}_3(t) = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_m) \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t)))^{\mathrm{T}}$$

在 $t \in [i_k h + \tau_{i_k}, i_{k+1}h + \tau_{i_{k+1}})$ 上，对 $\boldsymbol{V}(t)$ 沿系统(6) 的轨线求导并结合式(10) ～ (12)，得

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{V}}(t) = {} & 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}(t) - \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_M)\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}(t-\tau_M) + \\ & \tau_M\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{W}_1\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \\ & (\tau_M-\tau_m)\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{W}_2\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \\ & \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{W}_1\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s - \\ & \int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{W}_1\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s - \\ & \int_{t-\tau_M}^{t-\tau(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{W}_2\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s - \\ & \int_{t-\tau(t)}^{t-\tau_m}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{W}_2\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s \leqslant \\ & \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) - \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t-\tau(t)) \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$\boldsymbol{\xi}(t)=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_m)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_M))^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Pi}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Pi}_{13} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Pi}_{22} & \boldsymbol{\Pi}_{23} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\Pi}_{13}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_{23}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_{33} & \boldsymbol{\Pi}_{34}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Pi}_{34}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_{44}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{11}=\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{A}}+\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{W}_1/\tau_M+\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}\overline{\boldsymbol{A}},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{13}=\boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{W}_1/\tau_M+\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{22}=-\boldsymbol{W}_2/\delta,\quad \boldsymbol{\Pi}_{23}=\boldsymbol{W}_2/\delta,$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{33}=-(\tau_M^{-1}+\delta^{-1})\boldsymbol{W}_1-2\boldsymbol{W}_2/\delta+(\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{34}=\boldsymbol{W}_1/\delta+\boldsymbol{W}_2/\delta,$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{44}=-\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{W}_1/\delta-\boldsymbol{W}_2/\delta,$$

$$\boldsymbol{\Theta}=\tau_M\boldsymbol{W}_1+\delta\boldsymbol{W}_2,\quad \delta=\tau_M-\tau_m$$

若 $\boldsymbol{\Psi}<\boldsymbol{0}$,则

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t)\leqslant-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t-\tau(t))+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)<\boldsymbol{0}\tag{14}$$

利用Schur补定理和引理2可以得到,$\boldsymbol{\Psi}<\boldsymbol{0}$ 等价于

$$\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{\Pi}} & \boldsymbol{\gamma}_1 & \boldsymbol{\gamma}_2 & \boldsymbol{\gamma}_3\\ \boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Sigma}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_2 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_3\end{pmatrix}<\boldsymbol{0}\tag{15}$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{\Pi}}=\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{11} & \boldsymbol{0} & \overline{\boldsymbol{\Pi}}_{13} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Pi}_{22} & \boldsymbol{\Pi}_{23} & \boldsymbol{0}\\ \overline{\boldsymbol{\Pi}}_{13}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_{23}^{\mathrm{T}} & \overline{\boldsymbol{\Pi}}_{33} & \boldsymbol{\Pi}_{34}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Pi}_{34}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_{44}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1=(\boldsymbol{\Gamma}_{11}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\Gamma}_{12}^{\mathrm{T}}),\ \boldsymbol{\gamma}_2=(\boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{T}}),$$

$$\boldsymbol{\gamma}_3=(\boldsymbol{\Gamma}_3^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\Gamma}_3^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\Gamma}_3^{\mathrm{T}}),\quad \boldsymbol{\Sigma}_1=\mathbf{diag}\{-\boldsymbol{Q}^{-1},-\boldsymbol{R}^{-1}\},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_2=\mathbf{diag}\{-\boldsymbol{W}_1^{-1}/\tau_M+\varepsilon_2\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}},-\boldsymbol{W}_2^{-1}/\delta+\varepsilon_3\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_3=\mathbf{diag}\{-\varepsilon_1\boldsymbol{I},-\varepsilon_2\boldsymbol{I},-\varepsilon_3\boldsymbol{I}\},$$

$$\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{11}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{W}_1/\tau_M+\varepsilon_1\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P},$$

$$\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{13}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{W}_1/\tau_M,$$

$$\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{33}=-(\tau_M^{-1}+\delta^{-1})\boldsymbol{W}_1-2\boldsymbol{W}_2/\delta,$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{11}=(\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}),\quad \boldsymbol{\Gamma}_{12}=(\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{K}\quad \boldsymbol{0}),$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_2=(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\quad \boldsymbol{0}),\ \boldsymbol{\Gamma}_3=(\boldsymbol{E}_a\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{E}_b\boldsymbol{K}\quad \boldsymbol{0})$$

对不等式(15)两边分别左乘和右乘 $\mathbf{diag}\{\underbrace{\boldsymbol{P}^{-1},\cdots,\boldsymbol{P}^{-1}}_{4},\underbrace{\boldsymbol{I},\cdots,\boldsymbol{I}}_{7}\}$ 及其转置,并定义 $\hat{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{P}^{-1}$,$\hat{\boldsymbol{Z}}=\hat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{W}}_i=\hat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{W}_i\hat{\boldsymbol{P}}(i=1,2)$,$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{P}}$ 可得式(7).所以若式(7)成立,则式(14)成立.对式(14)两边从 $i_kh+\tau_{i_k}$ 到 $i_{k+1}h+\tau_{i_{k+1}}$ 积分,考虑到 $\bigcup_{k=1}^{\infty}[i_kh+\tau_{i_k},i_{k+1}h+\tau_{i_{k+1}})=[0,\infty)$,$\boldsymbol{V}(\infty)=\boldsymbol{0}$ 并根据定义,可以得到式(8).定理得证.

推论1 对于系统(6),给定矩阵 $\boldsymbol{K}$,标量 τ_m、τ_M 满足 $0\leqslant\tau_m<\tau_M$,若存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Z}$、$\boldsymbol{W}_1$、$\boldsymbol{W}_2$,使得矩阵不等式

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Pi}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Pi}_{13} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Pi}_{22} & \boldsymbol{\Pi}_{23} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\Pi}_{13}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_{23}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_{33} & \boldsymbol{\Pi}_{34}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Pi}_{34}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_{44}\end{pmatrix}<\boldsymbol{0}\tag{16}$$

成立,则系统(6)鲁棒渐近稳定.

定理2 考虑系统(6),给定标量 $\gamma>0$,τ_m、τ_M 满足 $0\leqslant\tau_m<\tau_M$,若存在标量 $\varepsilon_i>0(i=1,2,3)$,对称正定矩阵 $\hat{\boldsymbol{P}}$、$\hat{\boldsymbol{Z}}$、$\hat{\boldsymbol{W}}_1$、$\hat{\boldsymbol{W}}_2$,矩阵 $\boldsymbol{Y}$,使得如下矩阵不等式

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Omega} & \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_4^{\mathrm{T}} & \overline{\boldsymbol{\gamma}}_2 & \overline{\boldsymbol{\gamma}}_3\\ \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_4 & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \overline{\boldsymbol{\gamma}}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_2 & \boldsymbol{0}\\ \overline{\boldsymbol{\gamma}}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_3\end{pmatrix}<\boldsymbol{0}\tag{17}$$

成立,其中

$$\boldsymbol{\Omega}=\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\Pi}} & \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0^{\mathrm{T}}\\ \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0^{\mathrm{T}} & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{pmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0=(\boldsymbol{B}_w^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}),$$

$$\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_4=(\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{P}}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{D}\boldsymbol{Y}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}),$$

$$\overline{\boldsymbol{\gamma}}_2=(\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_2^{\mathrm{T}}\quad \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_2^{\mathrm{T}}),\quad \overline{\boldsymbol{\gamma}}_3=(\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_3^{\mathrm{T}}\quad \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_3^{\mathrm{T}}\quad \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_3^{\mathrm{T}}),$$

$$\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_2=(\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{P}}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{B}_w),$$

$$\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_3=(\boldsymbol{E}_a\hat{\boldsymbol{P}}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{E}_b\boldsymbol{Y}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0})$$

则系统是鲁棒渐近稳定的,且满足 H_∞ 扰动衰减指标 γ,其对应的 H_∞ 控制律为 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Y}\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}$.

证明 构造Lyapunov-Krasovskii泛函(8),由定理1的证明过程可知

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t)\leqslant\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\zeta}(t)-\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)+\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t)\tag{18}$$

其中

$$\boldsymbol{\zeta}(t)=(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Pi}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Pi}_{13} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Pi}_{15}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Pi}_{22} & \boldsymbol{\Pi}_{23} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\Pi}_{13}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_{23}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_{33} & \boldsymbol{\Pi}_{34} & \boldsymbol{\Pi}_{35}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Pi}_{34}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Pi}_{44} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\Pi}_{15}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Pi}_{35}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Pi}_{55}\end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ (\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{D}\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{15}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_w+\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{B}_w,\quad \boldsymbol{\Pi}_{35}=(\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{B}_w$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{55}=\boldsymbol{B}_w^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{B}_w$$

利用与定理 1 中证明类似的方法，可以证明若式(17) 成立，则 $\boldsymbol{\Lambda}<\boldsymbol{0}$ 成立. 由此可得

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t)\leqslant-\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)+\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t)\tag{19}$$

显然，当 $\boldsymbol{w}(t)\equiv\boldsymbol{0}$ 时，$\dot{\boldsymbol{V}}(t)<\boldsymbol{0}$. 对式(19) 两边从 $i_kh+\tau_{i_k}$ 到 $i_{k+1}h+\tau_{i_{k+1}}$ 积分，并注意到 $\bigcup_{k=1}^{\infty}[i_kh+\tau_{i_k},i_{k+1}h+\tau_{i_{k+1}})=[t_0,\infty)$，可得

$$\boldsymbol{V}(\infty)-\boldsymbol{V}(t_0)\leqslant\int_{t_0}^{\infty}(-\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{z}(s)+\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{w}(s))\mathrm{d}s\tag{20}$$

零初始条件下，由式(20) 可知 $\|\boldsymbol{z}(t)\|_2\leqslant\gamma\|\boldsymbol{w}(t)\|_2$. 定理得证.

推论 2　对于系统(6)，给定矩阵 $\boldsymbol{K}$，标量 $\gamma>0$，τ_m、τ_M 满足 $0\leqslant\tau_m<\tau_M$，若存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Z}$、$\boldsymbol{W}_1$、$\boldsymbol{W}_2$，使得 $\boldsymbol{\Lambda}<\boldsymbol{0}$ 成立，则系统是鲁棒渐近稳定的，且满足 H_∞ 扰动衰减指标 γ.

注 3　当给定控制器增益 $\boldsymbol{K}$，且不考虑系统参数不确定性(即 $\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}$，$\overline{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}$) 时，推论 1、2 中的条件均可表示为 LMI 形式.

定理 3　考虑系统(6)，给定标量 $\gamma>0$，τ_m、τ_M 满足 $0\leqslant\tau_m<\tau_M$，对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$，若存在标量 $\varepsilon_i>0(i=1,2,3)$，对称正定矩阵 $\hat{\boldsymbol{P}}$、$\hat{\boldsymbol{Z}}$、$\hat{\boldsymbol{W}}_1$、$\hat{\boldsymbol{W}}_2$，矩阵 $\boldsymbol{Y}$，使得矩阵不等式

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Omega} & \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_4^{\mathrm{T}} & \overline{\boldsymbol{\gamma}}_1 & \overline{\boldsymbol{\gamma}}_2 & \overline{\boldsymbol{\gamma}}_3\\ \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_4 & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \overline{\boldsymbol{\gamma}}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \overline{\boldsymbol{\gamma}}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_2 & \boldsymbol{0}\\ \overline{\boldsymbol{\gamma}}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_3\end{pmatrix}<\boldsymbol{0}\tag{21}$$

成立，其中

$\overline{\boldsymbol{\gamma}}_1=(\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{11}^{\mathrm{T}}\quad\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{12}^{\mathrm{T}})$，

$\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{11}=(\hat{\boldsymbol{P}}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0})$，$\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{12}=(\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{Y}\quad\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{0})$

则 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Y}\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}$ 为系统(6) 的鲁棒 H_∞ 保性能控制器增益，满足 H_∞ 扰动衰减指标 γ，其系统性能上界由式(8) 给出.

证明　略.

注意到矩阵不等式(7)、(17)、(21) 中，均含有非线性项 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_2$，为了求解控制器增益，需要对其进一步转换. 首先假设存在矩阵 $\boldsymbol{L}_1$、$\boldsymbol{L}_2$ 满足

$$-\boldsymbol{L}_i\geqslant-\hat{\boldsymbol{P}}\hat{\boldsymbol{W}}_i^{-1}\hat{\boldsymbol{P}};\ i=1,2\tag{22}$$

根据 Schur 补定理，式(22)等价于

$$\begin{pmatrix}-\hat{\boldsymbol{P}}\hat{\boldsymbol{W}}_i^{-1}\hat{\boldsymbol{P}} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{L}_i^{-1}\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{0};\ i=1,2\tag{23}$$

对式(23) 左乘和右乘 $\mathbf{diag}\{\hat{\boldsymbol{P}}^{-1},\boldsymbol{I}\}$ 得

$$\begin{pmatrix}-\hat{\boldsymbol{W}}_i^{-1} & \hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\\ \hat{\boldsymbol{P}}^{-1} & -\boldsymbol{L}_i^{-1}\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{0};\ i=1,2\tag{24}$$

引入新的变量 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}$、$\boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}}$、$\boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}}$、$\boldsymbol{L}_{1\mathrm{n}}$、$\boldsymbol{L}_{2\mathrm{n}}$，式(24) 可改写为

$$\begin{pmatrix}-\boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}} & \boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\\ \boldsymbol{P}_{\mathrm{n}} & -\boldsymbol{L}_{1\mathrm{n}}\end{pmatrix}<\boldsymbol{0};\ \begin{pmatrix}-\boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}} & \boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\\ \boldsymbol{P}_{\mathrm{n}} & -\boldsymbol{L}_{2\mathrm{n}}\end{pmatrix}<\boldsymbol{0}\tag{25}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}=\boldsymbol{I},\ \hat{\boldsymbol{W}}_1\boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}}=\boldsymbol{I},$$

$$\hat{\boldsymbol{W}}_2\boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}}=\boldsymbol{I},\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_{1\mathrm{n}}=\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{L}_2\boldsymbol{L}_{2\mathrm{n}}=\boldsymbol{I}\tag{26}$$

为进一步获取满足最小保性能值的控制器增益，可考虑构造以下优化问题：

$$\min\quad J^*$$

$$\text{s. t.}\quad\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Omega} & \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_4^{\mathrm{T}} & \overline{\boldsymbol{\gamma}}_1 & \overline{\boldsymbol{\gamma}}_2 & \overline{\boldsymbol{\gamma}}_3\\ \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_4 & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \overline{\boldsymbol{\gamma}}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \overline{\boldsymbol{\gamma}}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_2 & \boldsymbol{0}\\ \overline{\boldsymbol{\gamma}}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_3\end{pmatrix}<\boldsymbol{0}\tag{27}$$

其中 J^* 定义于式(8). 根据矩阵迹的性质，可以得到

$$J^*=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Phi}_0\hat{\boldsymbol{P}}^{-1})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Phi}_1\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\hat{\boldsymbol{Z}}\hat{\boldsymbol{P}}^{-1})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Phi}_2\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\hat{\boldsymbol{W}}_1\hat{\boldsymbol{P}}^{-1})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Phi}_3\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\hat{\boldsymbol{W}}_2\hat{\boldsymbol{P}}^{-1})\tag{28}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}_0=\boldsymbol{\varphi}(0)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(0),\quad\boldsymbol{\Phi}_1=\int_{-\tau_M}^{0}\boldsymbol{\varphi}(s)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s$$

$$\boldsymbol{\Phi}_2=\int_{-\tau_M}^{0}\int_{s}^{0}\dot{\boldsymbol{\varphi}}(s)\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s$$

$$\boldsymbol{\Phi}_3=\int_{-\tau_M}^{-\tau_m}\int_{s}^{0}\dot{\boldsymbol{\varphi}}(s)\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s$$

假设存在对称矩阵 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{X}_1$、$\boldsymbol{X}_2$、$\boldsymbol{F}$ 满足

$$\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\leqslant\boldsymbol{T}\\&\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\hat{\boldsymbol{Z}}\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\leqslant\boldsymbol{F}\\&\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\hat{\boldsymbol{W}}_i\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\leqslant\boldsymbol{X}_i;\ i=1,2\end{aligned}\tag{29}$$

引入新的变量 $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{n}}$ 使得

$$\hat{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Z}_{\mathrm{n}}=\boldsymbol{I}\tag{30}$$

则根据 Schur 补定理,式(29)等价于

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}-\boldsymbol{T}&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&-\hat{\boldsymbol{P}}\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{0},\ \begin{pmatrix}-\boldsymbol{F}&\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\\\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}&-\boldsymbol{Z}_{\mathrm{n}}\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{0}\\&\begin{pmatrix}-\boldsymbol{X}_1&\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\\\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}&-\boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}}\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{0},\ \begin{pmatrix}-\boldsymbol{X}_2&\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\\\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}&-\boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}}\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{31}$$

由式(28)、(29) 可知,存在常数 J_0 使得

$$\begin{aligned}J^*\leqslant&\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Phi}_0\boldsymbol{T})+\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{F})+\\&\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{X}_1)+\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Phi}_3\boldsymbol{X}_2)\leqslant J_0\end{aligned}\tag{32}$$

由此可以将定理 3 中的条件转换成如下非线性优化问题的求解:

$$\begin{aligned}\min\quad&\operatorname{tr}(\hat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}+\hat{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Z}_{\mathrm{n}}+\hat{\boldsymbol{W}}_1\boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}}+\\&\hat{\boldsymbol{W}}_2\boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}}+\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_{1\mathrm{n}}+\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{L}_{2\mathrm{n}})\\\text{s.t.}\quad&\begin{pmatrix}-\boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}}&\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\\\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}&-\boldsymbol{L}_{1\mathrm{n}}\end{pmatrix}<\boldsymbol{0},\\&\begin{pmatrix}-\boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}}&\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\\\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}&-\boldsymbol{L}_{2\mathrm{n}}\end{pmatrix}<\boldsymbol{0}\\&\begin{pmatrix}-\boldsymbol{T}&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&-\hat{\boldsymbol{P}}\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{0},\ \begin{pmatrix}-\boldsymbol{F}&\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\\\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}&-\boldsymbol{Z}_{\mathrm{n}}\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{0}\\&\begin{pmatrix}-\boldsymbol{X}_1&\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\\\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}&-\boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}}\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{0},\ \begin{pmatrix}-\boldsymbol{X}_2&\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\\\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}&-\boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}}\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{0}\\&J^*\leqslant\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Phi}_0\boldsymbol{T})+\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{F})+\\&\qquad\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{X}_1)+\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Phi}_3\boldsymbol{X}_2)\leqslant J_0\\&\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Omega}&\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_4^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{\gamma}_1&\boldsymbol{\gamma}_2&\boldsymbol{\gamma}_3\\\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_4&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\overline{\boldsymbol{\gamma}}_1^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{\Sigma}_1&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\overline{\boldsymbol{\gamma}}_2^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_2&\boldsymbol{0}\\\overline{\boldsymbol{\gamma}}_3^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{\Sigma}_3\end{pmatrix}<\boldsymbol{0}\\&\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{P}}&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\end{pmatrix}\geqslant\boldsymbol{0},\ \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{Z}}&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{Z}_{\mathrm{n}}\end{pmatrix}\geqslant\boldsymbol{0}\\&\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{W}}_1&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}}\end{pmatrix}\geqslant\boldsymbol{0},\ \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{W}}_2&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}}\end{pmatrix}\geqslant\boldsymbol{0}\\&\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{L}_{1\mathrm{n}}\end{pmatrix}\geqslant\boldsymbol{0},\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_2&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{L}_{2\mathrm{n}}\end{pmatrix}\geqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{33}$$

其中

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_2=\mathbf{diag}\{&-\boldsymbol{L}_1/\tau_M+\varepsilon_2\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}},\\&-\boldsymbol{L}_2/\delta+\varepsilon_3\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\}\end{aligned}$$

若上述优化问题的解为 $6n$,即

$$\begin{aligned}\min\quad&\operatorname{tr}(\hat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}+\hat{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Z}_{\mathrm{n}}+\hat{\boldsymbol{W}}_1\boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}}+\hat{\boldsymbol{W}}_2\boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}}+\\&\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_{1\mathrm{n}}+\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{L}_{2\mathrm{n}})=6n\end{aligned}$$

则式(33) 中的条件有解. 根据线性锥补原理(CCL),可以得到次优鲁棒 H_∞ 保性能控制器求解算法如下:

算法 1

步骤 1 设 $k=0$,选择一个充分大的初始值 $J_0>0$,使得式(33)中的 LMIs 有可行解.

步骤 2 设 $k=1$,寻找满足式(33) 中 LMIs 的可行解:

$$\begin{aligned}&(\hat{\boldsymbol{P}}^0,\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}^0,\hat{\boldsymbol{Z}}^0,\boldsymbol{Z}_{\mathrm{n}}^0,\hat{\boldsymbol{W}}_1^0,\boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}}^0,\hat{\boldsymbol{W}}_2^0,\boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}}^0,\\&\boldsymbol{L}_1^0,\boldsymbol{L}_{1\mathrm{n}}^0,\boldsymbol{L}_2^0,\boldsymbol{L}_{2\mathrm{n}}^0)\end{aligned}$$

步骤 3 求解下面的优化问题

$$\begin{aligned}\min\quad&\operatorname{tr}(\hat{\boldsymbol{P}}^k\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}+\hat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}^k+\hat{\boldsymbol{Z}}^k\boldsymbol{Z}_{\mathrm{n}}+\hat{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Z}_{\mathrm{n}}^k+\hat{\boldsymbol{W}}_1^k\boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}}+\\&\hat{\boldsymbol{W}}_1\boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}}^k+\hat{\boldsymbol{W}}_2^k\boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}}+\hat{\boldsymbol{W}}_2\boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}}^k+\boldsymbol{L}_1^k\boldsymbol{L}_{1\mathrm{n}}+\\&\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_{1\mathrm{n}}^k+\boldsymbol{L}_2^k\boldsymbol{L}_{2\mathrm{n}}+\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{L}_{2\mathrm{n}}^k)\\\text{s.t.}\quad&\begin{pmatrix}-\boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}}&\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\\\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}&-\boldsymbol{L}_{1\mathrm{n}}\end{pmatrix}<\boldsymbol{0},\\&\begin{pmatrix}-\boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}}&\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\\\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}&-\boldsymbol{L}_{2\mathrm{n}}\end{pmatrix}<\boldsymbol{0}\\&\begin{pmatrix}-\boldsymbol{T}&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&-\hat{\boldsymbol{P}}\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{0},\ \begin{pmatrix}-\boldsymbol{F}&\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\\\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}&-\boldsymbol{Z}_{\mathrm{n}}\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{0}\\&\begin{pmatrix}-\boldsymbol{X}_1&\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\\\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}&-\boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}}\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{0},\ \begin{pmatrix}-\boldsymbol{X}_2&\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\\\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}&-\boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}}\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{0}\\&J^*\leqslant\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Phi}_0\boldsymbol{T})+\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{F})+\\&\qquad\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{X}_1)+\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Phi}_3\boldsymbol{X}_2)\leqslant J_0\\&\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Omega}&\boldsymbol{\Gamma}_4^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{\gamma}_1&\boldsymbol{\gamma}_2&\boldsymbol{\gamma}_3\\\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_4&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\overline{\boldsymbol{\gamma}}_1^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{\Sigma}_1&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\overline{\boldsymbol{\gamma}}_2^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_2&\boldsymbol{0}\\\overline{\boldsymbol{\gamma}}_3^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{\Sigma}_3\end{pmatrix}<\boldsymbol{0}\\&\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{P}}&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}\end{pmatrix}\geqslant\boldsymbol{0},\ \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{Z}}&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{Z}_{\mathrm{n}}\end{pmatrix}\geqslant\boldsymbol{0}\\&\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{W}}_1&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}}\end{pmatrix}\geqslant\boldsymbol{0},\ \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{W}}_2&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}}\end{pmatrix}\geqslant\boldsymbol{0}\\&\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{L}_{1\mathrm{n}}\end{pmatrix}\geqslant\boldsymbol{0},\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_2&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{L}_{2\mathrm{n}}\end{pmatrix}\geqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

设

$$\hat{\boldsymbol{P}}^{k+1}=\hat{\boldsymbol{P}},\ \boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}^{k+1}=\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}},\ \hat{\boldsymbol{Z}}^{k+1}=\hat{\boldsymbol{Z}},$$

$$\boldsymbol{Z}_{\mathrm{n}}^{k+1}=\boldsymbol{Z}_{\mathrm{n}},\ \hat{\boldsymbol{W}}_1^{k+1}=\hat{\boldsymbol{W}}_1,\ \boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}}^{k+1}=\boldsymbol{W}_{1\mathrm{n}},$$

$$\hat{\boldsymbol{W}}_2^{k+1}=\hat{\boldsymbol{W}}_2,\ \boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}}^{k+1}=\boldsymbol{W}_{2\mathrm{n}},\ \boldsymbol{L}_1^{k+1}=\boldsymbol{L}_1,$$

$$\boldsymbol{L}_{1\mathrm{n}}^{k+1}=\boldsymbol{L}_{1\mathrm{n}},\ \boldsymbol{L}_2^{k+1}=\boldsymbol{L}_2,\ \boldsymbol{L}_{2\mathrm{n}}^{k+1}=\boldsymbol{L}_{2\mathrm{n}}$$

步骤 4　若步骤 3 中所求解满足式(22)、(29)，则减小 J_0 然后返回步骤 2；若所求解不满足式(22)、(29)且 $k<k_{\max}$(最大迭代次数)，则设 $k=k+1$，转到步骤 3；否则退出.

步骤 5　输出次优保性能指标 J_0 及其对应的控制器增益 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Y}\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}$.

注 4　在数值上获取式(33)的最小解 $6n$ 非常困难，因此选择式(22)、(29)作为算法终止条件.

注 5　算法 1 可以求出给定 H_∞ 干扰抑制水平 γ 条件下，系统的优化保性能指标 J_0. 通过求解优化问题(33)，还可以得到在给定条件下系统对外界干扰的最小抑制能力 $\gamma_{\min}$. 然而由于 CCL 算法不能保证总是找到全局最优解，通过算法 1 只能获得次优解.

注 6　定理 1 和定理 2 中控制器的求解均可采用类似算法 1 的步骤实现.

4　算　例

例 1　考虑 NCS 中如下被控对象：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -0.1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}0\\ 0.1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t)\quad(34)$$

控制器增益 $\boldsymbol{K}=(-3.75\quad -11.5)$. 设 $\eta=0$，通过求解推论 1 中的矩阵不等式，可得 $\tau_m=0$ 时，最大允许传输延迟 $\tau_M=1.008\,1$，所得结果与文献[3,6,8]中相同，但是推论 1 中 LMI 所用决策变量个数为 $2(n^2+n)$，而文献[3,6,8]中 LMI 所用决策变量个数分别为 $2.5(n^2+n)$、$3(n^2+n)$、$9.5(n^2+n)$. 进一步考虑系统中存在外部干扰的情形，式(34)可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -0.1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}0\\ 0.1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t)+\begin{pmatrix}0.1\\ 0.1\end{pmatrix}\boldsymbol{w}(t);$$

$$\boldsymbol{z}(t)=(0\quad 1)\boldsymbol{x}(t)+0.1\boldsymbol{u}(t)\quad(35)$$

设 $\tau_m=0$，$\tau_M=0.869\,5$，通过求解推论 2 中的矩阵不等式，可得最小 H_∞ 抑制指标 $\gamma_{\min}=1.000\,5$，其结果与文献[6]中相同，而略大于文献[8]中的结果 $\gamma_{\min}=1.00$.

例 2　考虑 NCS 中如下被控对象：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -0.1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}0.1\\ 0.1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t),$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{pmatrix}-0.2\mathrm{e}^{t+1}\\ 0\end{pmatrix};\ t\in[-1.2,0]\quad(36)$$

设 $\boldsymbol{Q}=\mathbf{diag}\{0.05,0.05\}$，$R=0.1$，$\tau_m=0.1$，$\tau_M=1.2$，利用算法 1 可得次优保性能指标 $J_0=0.157\,6$，对应的 $\boldsymbol{K}=(-0.713\,8\quad -2.972\,8)$，而文献[12]中 $J_0=3.527\,9$，$\boldsymbol{K}=(-0.656\,8\quad -2.411\,9)$. 由此可见，通过算法 1 能得到比文献[12]中保守性更小的结果.

例 3　考虑系统(35)为不确定系统的情形，其中不确定参数

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0.1\\ 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}_a=(0.1\quad 0),\quad E_b=0.2$$

系统初始状态为 $x_1(t)=0.3\mathrm{e}^{t+1}$，$x_2(t)=0$，$t\in[-0.8,0]$. 设 $\boldsymbol{Q}=\mathbf{diag}\{0.1,0.1\}$，$R=0.5$，$\tau_m=0.1$，$\tau_M=0.8$，$\gamma=1$，根据算法 1 可得 H_∞ 次优保性能指标 $J_0=1.187\,1$，对应的 $\boldsymbol{K}=(-1.023\,3\quad -6.307\,7)$.

5　结　语

针对一类含有不确定参数被控对象的网络控制系统(NCS)，研究了网络中同时存在延时与丢包情况下的鲁棒 H_∞ 保性能控制问题. 构造了一个形式更为简洁的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，通过 Jensen 不等式得到系统鲁棒渐近稳定的充分条件. 分别给出了 NCS 保性能控制器、H_∞ 控制器以及 H_∞ 保性能控制器存在的充分条件，并利用线性锥补算法实现了 H_∞ 保性能控制器的求解. 本文方法对于 NCS 稳定性分析及 H_∞ 控制问题，在不影响保守性的前提下，可以得到具有较少决策变量的 LMI；对于 NCS 保性能控制问题，能获得比已有文献保守性更小的结果. 最后通过数值算例验证了本文方法的有效性

参考文献：

[1]　Hespanha J P, Naghshtabrizi P, XU Yong-gang. A survey of recent results in networked control

systems [J]. **Proceedings of the IEEE**, 2007, **95**(1):138-162.

[2] YUE Deng, HAN Qing-long, PENG Chen. State feedback controller design of networked control systems [J]. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II-Express Briefs**, 2004, **51**(11):640-644.

[3] LI Bing, WU Jun-feng. Stability criteria of uncertain networked control systems [C] // **2012 International Conference on Measurement, Information and Control**. Piscataway: IEEE, 2012: 769-772.

[4] SUN Jian-dong, JIANG Jing-ping. Stability of uncertain networked control systems [J]. **Procedia Engineering**, 2011, **24**:551-557.

[5] ZHU Xun-lin, YANG Guang-hong. New results on stability analysis of networked control systems [C] // **2008 American Control Conference**. Seattle: IEEE, 2008:3792-3797.

[6] JIANG X F, HAN Q L, LIU S, *et al*. A new *H*-infinity stabilization criterion for networked control systems [J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2008, **53**(4):1025-1032.

[7] YUE Deng, HAN Qing-long, Lam J. Network-based robust H_∞ control of systems with uncertainty [J]. **Automatica**, 2005, **41**(6): 999-1007.

[8] ZHU Xun-lin, YANG Guang-hong. Network-based robust H_∞ control of continuous-time systems with uncertainty [J]. **Asian Journal of Control**, 2009, **11**(1):21-30.

[9] 郭亚锋,李少远. 网络控制系统的 H_∞ 状态反馈控制器设计[J]. 控制理论与应用, 2008, **25**(3):414-420.
GUO Ya-feng, LI Shao-yuan. H_∞ state-feedback controller design for networked control systems [J]. **Control Theory and Application**, 2008, **25**(3): 414-420. (in Chinese)

[10] PENG Chen. Networked, guaranteed cost control for a class of industrial processes with state delay [J]. **Asia-Pacific Journal of Chemical Engineering**, 2007, **2**(6):650-658.

[11] XIE Jin-song, FAN Bing-quan, Lee Young-sam, *et al*. Guaranteed cost controller design of networked control systems with state delay [J]. **Acta Automatica Sinica**, 2007, **33**(2):170-174.

[12] ZHOU Gu, WANG Dao-bo, CHEN Peng, *et al*. Guaranteed cost control for networked control system with interval time-varying delay [C] // **21st Chinese Control and Decision Conference**. Guilin: IEEE, 2009:538-543.

Research on robust H_∞ guaranteed cost control for networked control systems

LIU Yu-zhi[1,2], LI Mu-guo[*2], DU Hai[2]

(1. Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Robust H_∞ guaranteed cost control problem for a class of uncertain networked control systems (NCS) with network-induced delay and packet dropout is investigated. A sufficient condition for robust asymptotic stability of the closed-loop NCS is derived by using Lyapunov-Krasovskii functional and Jensen′s inequality, which can be expressed as a linear matrix inequality (LMI) with fewer decision variables than those in existing literatures. An algorithm for optimization design of the robust H_∞ guaranteed cost control law is also presented. Numerical examples are given finally to illustrate the effectiveness of the algorithm.

Key words: networked control systems; H_∞ guaranteed cost control; linear matrix inequality (LMI); time delay; data packet dropout